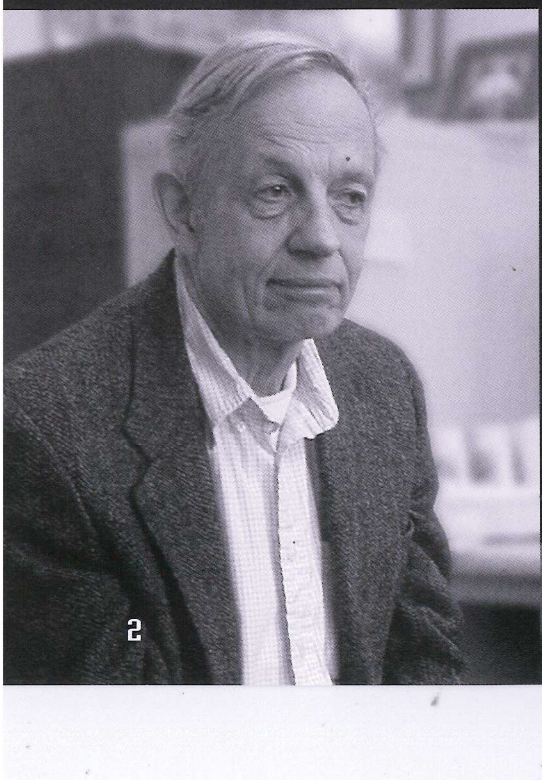
Programação Linear e Teoria dos Jogos: que lugar podem ocupar nos actuais programas de Matemática?

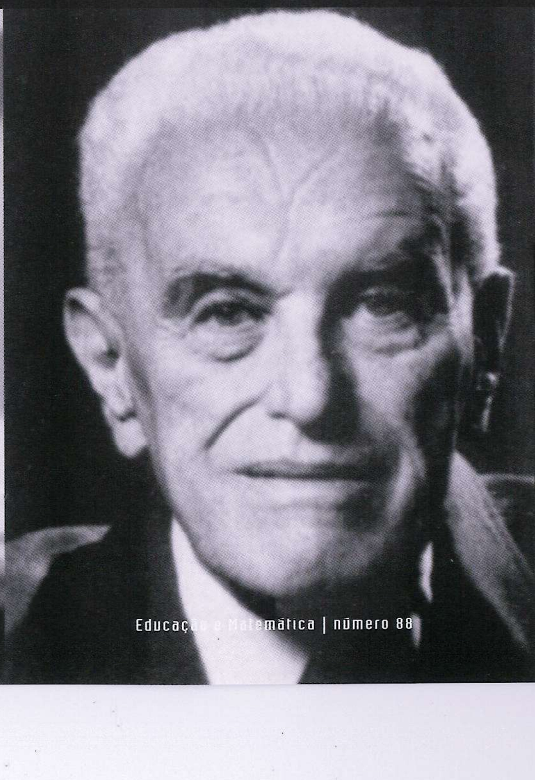
Rui Feiteira

Em Outubro de 1994, a Real Academia de Ciências da Suécia atribuía o prémio Nobel da Economia[1] a John Nash, Reinhard Selten[2] e John Harsanyi[3] pelos seus estudos pioneiros na teoria dos jogos não cooperativos. Foi o reconhecimento formal que a Teoria dos Jogos desempenha um papel importante como ferramenta de análise de toda uma série de questões sociais. Tudo começou com John Von Neumann[4] que, em 1928, publicou *Zur Theorie der Gersellschaftsspiel* (Sobre a teoria dos jogos de estratégia) onde estabeleceu os primeiros esboços de uma teoria especializada em lidar com a natureza humana. Demonstrou ainda, através de métodos matemáticos, a possibilidade de determinar a solução de jogos de soma zero[5]. Em 1944, em conjunto com o economista alemão Morgenstern, publica o livro *The theory of games and Economic Behavior*. Este é considerado o trabalho que estabeleceu a teoria dos jogos como campo de estudo. Von Neumann e Morgenstern propuseram uma teoria simples que analisava o mundo social a partir de modelos baseados em jogos de estratégia. Segundo Casti, podemos afirmar que este tipo de jogos ficou encerrado com o teorema de minimax[6], pois fornece uma teoria completa de actuação em tais tipos de confrontos. No entanto, apesar de *The theory of games and Economic Behavior* ser uma obra fundamental, apresentava uma limitação: concentrava-se apenas nos jogos de soma zero, mas estes jogos, mostravam-se pouco eficazes na análise das interacções sociais e organizações da sociedade. O problema foi ultrapassado na década de 50 com John Nash. Este definiu em *Non-Cooperative Games* uma noção de equilíbrio que não se restringia apenas aos jogos de soma zero. O teorema de Nash estende os resultados de John Von Neumann, restritos a jogos de soma zero e com dois jogadores, para a situação mais geral de jogos que não são de soma zero e têm mais de dois jogadores. Trata-se de um resultado central na Teoria dos Jogos, que tem sido amplamente aplicado para o tratamento analítico de interacções estratégicas em Economia, Sociologia e Relações Internacionais Sociais. Esta noção ficou conhecida como o "equilíbrio de Nash". Diz-se que uma combinação de estratégias constitui um equilíbrio de Nash quando cada estratégia é a melhor resposta possível às estratégias dos outros jogadores, sendo isto verdadeiro para todos os jogadores. Dito de outra forma, quando um conjunto de estratégias constitui um equilíbrio de Nash, nenhum jogador mudará unilateralmente a sua jogada, porque esta é a melhor resposta possível ao conjunto

John Nash



John Harsanyi



Reinhard Selten

John von Neumann

de estratégias dos seus oponentes. Segundo Zugman, a genialidade deste equilíbrio vem da sua estabilidade sem os jogadores estarem a cooperar. Durante a segunda grande guerra, áreas como a logística, a guerra submarina e a defesa aérea basearam-se directamente na teoria dos jogos que, depois disso, se desenvolveu no contexto das ciências sociais. Hoje, a maioria dos jogos com aplicações práticas são aqueles em que se podem formar várias coligações entre os jogadores, pode haver comunicação e em que a conjugação de esforços pode melhorar a solução para todos. Para nos apercebermos da importância do estudo da teoria dos jogos, atentemos no seguinte exemplo: "... a atribuição de licenças da nova geração de telemóveis (...) só podem ser atribuídas licenças a um número muito reduzido de operadores, conduzindo a um mercado de oligopólio. A teoria económica diz-nos que a forma mais eficiente de atribuir licenças, neste caso, é através de um leilão, através do qual o Estado (a favor dos contribuintes) colecta a renda antecipada que vai ser realizada pelo oligopolista. Nos países europeus em que este método não foi seguido, alguns dos melhores economistas protestaram contra os métodos tipo "concurso de beleza" que foram seguidos, como foi o caso em Portugal. Mas a forma de fazer os leilões não pode ser entregue a qualquer pessoa. E é aqui que entra o ramo da teoria dos jogos conhecida como teoria dos leilões (*auction theory*). Nos EUA, onde os leilões foram orientados por estes especialistas, o processo gerou para o Estado cerca de 18 mil milhões de USD, e a atribuição final de licenças foi eficiente. Na Nova Zelândia, onde as pessoas que conduziram o processo não tinham essa formação, o Estado recebeu menos de dez por cento do valor esperado ..."[7] Este exemplo, na nossa opinião, ilustra bem a importância desta nova área do conhecimento como um instrumento de apoio fundamental nas tomadas de decisão.

Passado o enquadramento histórico e depois de um pequeno exemplo que ilustra algumas das vantagens da utilização desta teoria, estamos em condições de prosseguir a nossa pequena apresentação. O que pretendemos mostrar, aproveitando as novas orientações do currículo da disciplina de Matemática A de 11.º ano, é que é possível leccionar Teoria dos Jogos aos nossos alunos do ensino secundário. No 10.º ano da mesma disciplina, são abordados os domínios planos e, no final do tema de Geometria no Plano e no Espaço II, os alunos recebem um pouco de programação linear. "A programação linear vai permitir ao estudante aplicar na resolução de problemas (...) conceitos aprendidos no 10.º e ampliados no 11.º."[8] Portanto, temos as ferramentas necessárias[9] para começar a estudar jogos de soma zero: jogos de estratégia pura e jogos de estratégia mista. É óbvio que não pretendemos propor um estudo exaustivo, mas sim o suficiente para os alunos terem uma boa ideia do que é a Teoria dos Jogos.

Um jogo de estratégia relaciona sempre três elementos: jogadores (um jogo tem pelo menos dois jogadores, com objectivos conflituais); actuações (a qualquer momento cada jogador escolhe o seu movimento) e ganhos (depois de uma actuação, um jogador obtém um certo ganho). Entendemos como estratégia qualquer regra para escolha de decisões. Um jogador procura sempre uma estratégia que aumente os seus ganhos e diminua as suas perdas. O objectivo de um jogo é para cada jogador, seleccionar a estratégia que traga a melhor recompensa [*payoff*] independentemente do que o opositor faça. A melhor estratégia para cada jogador designa-se por estratégia optimal. Quando cada jogador adopta uma estratégia única como estratégia optimal, então o jogo é de estratégia pura. Caso contrário, se os jogadores adoptam diferentes estratégias de cada vez que jogam então estamos na presença de um jogo de estratégia mista.

Jogos de estratégia pura

Consideremos a matriz de ganhos de um jogo de soma zero, que define a forma normal do jogo:

		Jogador B		
		Y_1	Y_2	Y_3
Jogador A	X_1	9	7	2
	X_2	11	8	1
	X_3	4	1	-7

Por convenção a matriz apenas mostra os ganhos do jogador A, designado por jogador maximizante (jogador ofensivo) e as perdas do jogador B, jogador minimizante (jogador defensivo). Neste caso, assumimos que ambos os jogadores conhecem a matriz. Para melhor percebermos a matriz segue-se um exemplo: se o jogador A escolher a estratégia X_2 e o jogador B escolher a estratégia Y_3, temos como resultado um ganho de 4 para o jogador A e uma perda de 4 para o jogador B. Neste caso, designamos o número 4 como o valor do jogo.

Imaginemos que o jogador A representa uma empresa de vestuário desportivo, Futlex, que pretende lançar no mercado um novo produto, e por sua vez, o jogador B representa o seu concorrente directo, *TuttiDespor*. Vejamos como as linhas de actuação racionais podem ser extraídas da matriz anterior. Assim, a *Futlex* pretende maximizar o seu ganho mínimo, então assinalemos o número mínimo em cada uma das linhas. Analogamente, o *TuttiDespor* pretende minimizar ao máximo as suas perdas com o novo produto no mercado. Portanto, assinalaremos o máximo de cada coluna da matriz:

TuttiDespor

		Y_1	Y_2	Y_3	Min linha
Futlex	X_1	9	7	2	**2**
	X_2	11	8	1	1
	X_3	4	1	-7	-7
	Max Coluna	11	8	**2**	

A *Futlex* irá procurar o maior dos mínimos e a *TuttiDespor* procurará o menor dos máximos. Estes dois números (a negrito) correspondem à estratégia X_1 para *Futlex* e Y_3 para *TuttiDespor*. A combinação de actuações, onde o máximo dos mínimos das linhas (maxmini) e o mínimo dos máximos (minimax), chama-se ponto de equilíbrio do jogo, pois os jogadores ao escolherem estas actuações garantem para si um ganho mínimo — independentemente do que o outro jogador venha a fazer. Neste caso 2 é o valor do jogo. Um ponto de equilíbrio deste tipo é frequentemente designado por ponto sela. Este representa decisões dos dois jogadores que nenhum pode melhorar saindo unilateralmente delas, portanto, a melhor decisão de cada jogador é o ponto sela, que é considerado uma solução para o jogo de estratégias puras.

Jogos de estratégia mista

Quando não existe ponto sela, não existe uma jogada de estratégia pura e os jogadores irão jogar cada estratégia por uma fracção de tempo. A isto chama-se jogos de estratégia mista. Comecemos por olhar para os jogos 2 × 2, neste caso, o jogo de caças e bombardeiros. Durante a 2.ª Guerra Mundial era usual os pilotos de caça atacarem os bombardeiros mergulhando, de cima para baixo, com o sol pelas costas. Como esta táctica estava a ter sucesso os pilotos dos bombardeiros, para se defenderem, começaram a usar óculos escuros. Desta forma os pilotos dos bombardeiros podiam olhar frontalmente para o sol. Como resposta, os caças variaram o seu estilo de ataque e passaram a atacar directamente de baixo para cima. Este ataque era eficaz mas apenas quando não era detectado, pois os caças eram muito mais lentos a subir do que a mergulhar. Construímos assim um jogo de soma zero entre duas pessoas: os pilotos dos caças e os pilotos dos bombardeiros. Os caças podem aplicar duas estratégias, mergulhar e subir, enquanto que os pilotos dos bombardeiros podem olhar para cima ou para baixo. Suponhamos que a seguinte matriz traduz a situação acima descrita:

Tripulação dos Bombardeiros

		Olhar cima	Olhar baixo
Piloto do caça	Mergulhar	0.95	1
	Subir	1	0

Se analisarmos a matriz com atenção verificamos que não existe ponto sela, logo não existem estratégias puras, para ambos os jogadores. Em vez de uma estratégia pura, ambos os jogadores têm de diversificar as suas actuações de forma a surpreender o adversário. Cada um deve seleccionar aleatoriamente uma actuação de entre as que tem à escolha. Vejamos como proceder: suponhamos que o piloto de caça usa a estratégia mergulhar por uma percentagem x de tempo, então usará a estratégia subir por outra percentagem de tempo $(1 - x)$. O ganho do piloto de caça se a tripulação olhar para cima é dado por:

$$0.95x + 1(1 - x) = -0.05x + 1$$

O ganho do piloto de caça se a tripulação olhar para baixo é dado por:

$$1x + 0(1 - x) = x$$

Seja v o valor do jogo para o piloto do caça. Isto significa que v é a quantidade que o piloto do caça ganha por jogo, se jogar a sua melhor estratégia e se a tripulação também jogar a sua melhor estratégia.

O nosso problema resume-se a determinar x que maximize v onde (estamos na presença do conjunto de restrições do nosso problema):

$$v \leq -0.05x + 1$$
$$v \leq x$$

Consideremos os gráficos das funções $v = -0.05x + 1$ e $v = x$, para valores de x entre 0 e 1 (x representa uma fracção e por isso $0 \leq x \leq 1$) (ver figura 1).

Observamos então que o ponto que nos interessa é o ponto P, pois estamos a tentar maximizar a situação. O ponto P é o ponto mais alto da região admissível (a sombreado). Neste tipo de problemas a solução encontra-se sempre num dos vértices da região admissível.

Algebricamente teríamos:

$$-0.05x + 1 = x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{1.05} \cong 0.95$$

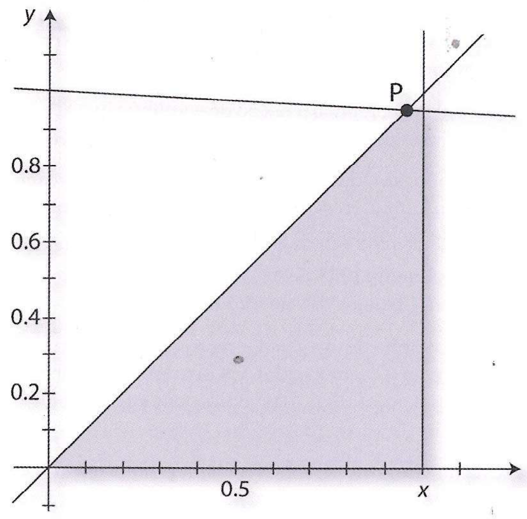


Figura 1.

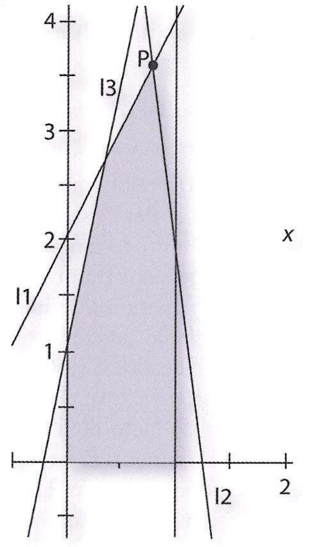


Figura 2.

Portanto se $x = 0.95$ temos que $1 - x = 0.05$. Logo o piloto de caça mergulhará 95% das vezes e, atacará a subir apenas 5% das vezes. Neste caso o valor do jogo é dado por:

$$-0.05x + 1 \text{ quando } x = 0.95$$
$$x \text{ quando } x = 0.95$$

Logo $v \cong 0.95$.

Para o caso da tripulação do bombardeiro procederíamos de uma forma análoga. Notemos apenas que o jogador minimizante receberá $-v$, pois o jogo é de soma nula. O ganho para a tripulação do bombardeiro é dado por:

$$-[0.95x + 1(1-x)], \text{ se o piloto de caça mergulhar para atacar}$$
$$-[1x + 0(1-x)], \text{ se o piloto de caça subir para atacar}$$

Não nos devemos esquecer que estas estratégias seriam definidas antes de ambas as tripulações levantarem voo, procedendo depois conforme o escolhido.

Analisemos agora um jogo de estratégia mista 2×3. Consideremos um jogo de soma zero para duas pessoas, em que a matriz de recompensas é:

		Jogador B		
		Y_1	Y_2	Y_3
Jogador A	X_1	4	2	6
	X_2	2	10	1

Mais uma vez o jogo não tem ponto sela. Como o jogador A tem apenas disponíveis duas estratégias, suponha-se que usa X_1 por uma fracção de tempo (x) e usa X_2 por uma fracção $1 - x$ de tempo. Então o ganho esperado do jogador A, se o jogador B usa Y_1 é:

$$4x + 2(1-x) = 2x + 2$$

O ganho esperado do jogador A, se o jogador B usa Y_2 é:

$$2x + 10(1-x) = -8x + 10$$

O ganho esperado do jogador A, se o jogador B usa Y_3 é:

$$6x + (1-x) = 5x + 1$$

O nosso problema resume-se a determinar x que maximize v onde:

$$v \leq 2x + 2$$
$$v \leq -8x + 10$$
$$v \leq 5x + 1$$

Podemos determinar o valor de x que maximiza as condições anteriores, se traçarmos os gráficos de

$$v = 2x + 2 \quad (l_1)$$
$$v = -8x + 10 \quad (l_2)$$
$$v = 5x + 1 \quad (l_3)$$

para $0 \leq x \leq 1$.

O jogador A pode maximizar o valor do jogo escolhendo o ponto P, que corresponde ao valor mais alto da região admissível. Por observação, facilmente se conclui que P resulta da intersecção de l_1 e l_2, portanto o valor de x é dado por:

$$2 + 2x = 10 - 8x \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$$

Logo se $x = 4/5$ temos que $1 - x = 1/5$. Como consequência, o jogador A deve usar a estratégia X_1 em $4/5$ do tempo e no restante ($1/5$ do tempo) usar a estratégia X_2. Notemos ainda que, o jogador B nunca utilizará a estratégia Y_3, usará apenas Y_1 e Y_2 para minimizar o ganho do jogador A. Este pequeno exemplo ilustra a forma como decorrem os jogos $2 \times n$, pois o jogador B (jogador minimizante) apesar de ter à sua disposição n estratégias, apenas utilizará duas delas. Isto decorre do facto de a qualquer combinação que o jogador maximizante usar, resultar da intersecção das 2 rectas que correspondem às suas duas únicas estratégias.

A programação linear é parte da programação matemática e esta, que desde a década de 50 é uma disciplina consolidada dentro do conhecimento matemático, estimulou o estudo de fenómenos económicos e, também por isso, está intimamente ligada à Teoria dos Jogos. Segundo Soares, "... é uma ciência que tem um papel fundamental na gestão racional de recursos usados em operações e processos e na melhoria da produtividade, tendo um campo privilegiado de aplicação em diversas áreas científicas, como a engenharia, a gestão, a economia, a matemática, e muitas outras." Tentámos mostrar a ligação entre dois campos de conhecimento que se tocam e que são fundamentais para o estudo e resolução de problemas dentro das ciências sociais. Sabemos de antemão que trabalhar este assunto, mesmo que seja por um período curto de tempo é muito difícil, pois professores e alunos estão muito pressionados pela existência do exame de 12.° ano, embora este facto, na nossa opinião, não seja definitivamente limitativo. Pensamos que esta abordagem mostraria, por certo, uma aplicação muito diferente da programação linear que está prevista no programa de Matemática. Por esta razão, e como vimos anteriormente, por estarmos perante dois ramos da matemática que se desenvolveram no seio das ciências sociais (mais a Teoria dos Jogos do que a Programação Matemática). São temas bastante actuais e com interesse e, por isso, deveriam ter um espaço reservado na Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS), já que são por excelência dois métodos diferentes de apoio à decisão. É de referir ainda que, no programa de 10.° ano (ou de 11.° ano) desta última disciplina, está previsto leccionar o conteúdo "Métodos de Apoio à Decisão". Como estes dois campos da Matemática são excelentes ferramentas de apoio às tomadas de decisão, o programa de MACS poderia, e na nossa opinião, deveria de alguma forma permitir que estes tópicos pudessem ser trabalhados. Mas, como é do conhecimento geral, esta disciplina ainda está a dar os primeiros passos e poderá acontecer que, mais cedo ou mais tarde, o seu programa seja reformulado e aí sim, estes dois tópicos poderiam ser incluídos.

Notas

1 Pela primeira vez em 93 anos a Academia atribuía um prémio Nobel a um trabalho de matemática pura.

2 Economista alemão, refinou a noção de equilíbrio que ficou conhecida por "equilíbrio perfeito em subjogos".

3 Economista húngaro, desenvolveu um modelo em que ambos os jogadores não tem acesso à mesma quantidade de informação — modelo de informação incompleta.

4 John Von Neumann (1903–1957), matemático húngaro, radicado nos Estados Unidos da América desde os anos 30.

5 Nestes jogos o ganho de um jogador representa necessariamente uma perda para o outro jogador. Os interesses são diametralmente opostos e, além disso, não existe comunicação entre os jogadores.

6 O teorema do minimax de Von Neumann postula que há sempre, no mínimo, uma estratégia mista para cada jogador, sendo que o ganho médio tem o mesmo valor para cada um dos jogadores. Mais, este ganho médio é o melhor a que os jogadores podem aspirar.

7 Cf Mateus, Abel, "Mente Brilhante", *UMTS e o Alargamento da União Europeia.*

8 Silva, Jaime *et al*, *Matemática A 11.° ano* p. 4.

9 Apesar do que foi exposto reconhecemos que a Teoria de Jogos deveria ser leccionada na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, pela natureza diferente desta disciplina e porque a Teoria dos Jogos teve grandes desenvolvimentos nas Ciências Sociais.

Referências Bibliográficas

Casti, John L., (1999). *Cinco Regras de Ouro*, Lisboa: Gradiva.

Fiani, R., (2004). *Teoria dos jogos*. São Paulo: Editora Campus.

Ferreira, A., Amaral, I., (1995). *Programação Matemática.* Lisboa: Edições Sílabo.

Hebborn, J., (2001). *Decision Mathematics*. Oxford: Heinemann Modular Education.

Mateus, A., *"Mente Brilhante"*, *UMTS e o Alargamento da União Europeia*.

Silva, Jaime *et al.* (2002). *Matemática A 11.° ano*, Lisboa: ME-DES.

Soares, João L., Optimização Matemática, *Gazeta da Matemática* n.° 149.

Tellez, Claúdio, O *Desenvolvimento da Teoria dos Jogos*. Disponível em `http://www.claudiotellez.org/research/teojogri.pdf` e `http://docentes.fe.unl.pt/~amateus/entrevistas/Mente-Brilhante.htm#_ftn1`

Zugman, Fábio, *Teoria dos jogos — Uma introdução à disciplina que vê a vida como uma sequência de jogos*. Disponível em `http://www.iced.org.br/artigos/teoria_jogos_fabio_zugman.PDF`

Rui Feteira

Escola Secundária Manuel Teixeira Gomes