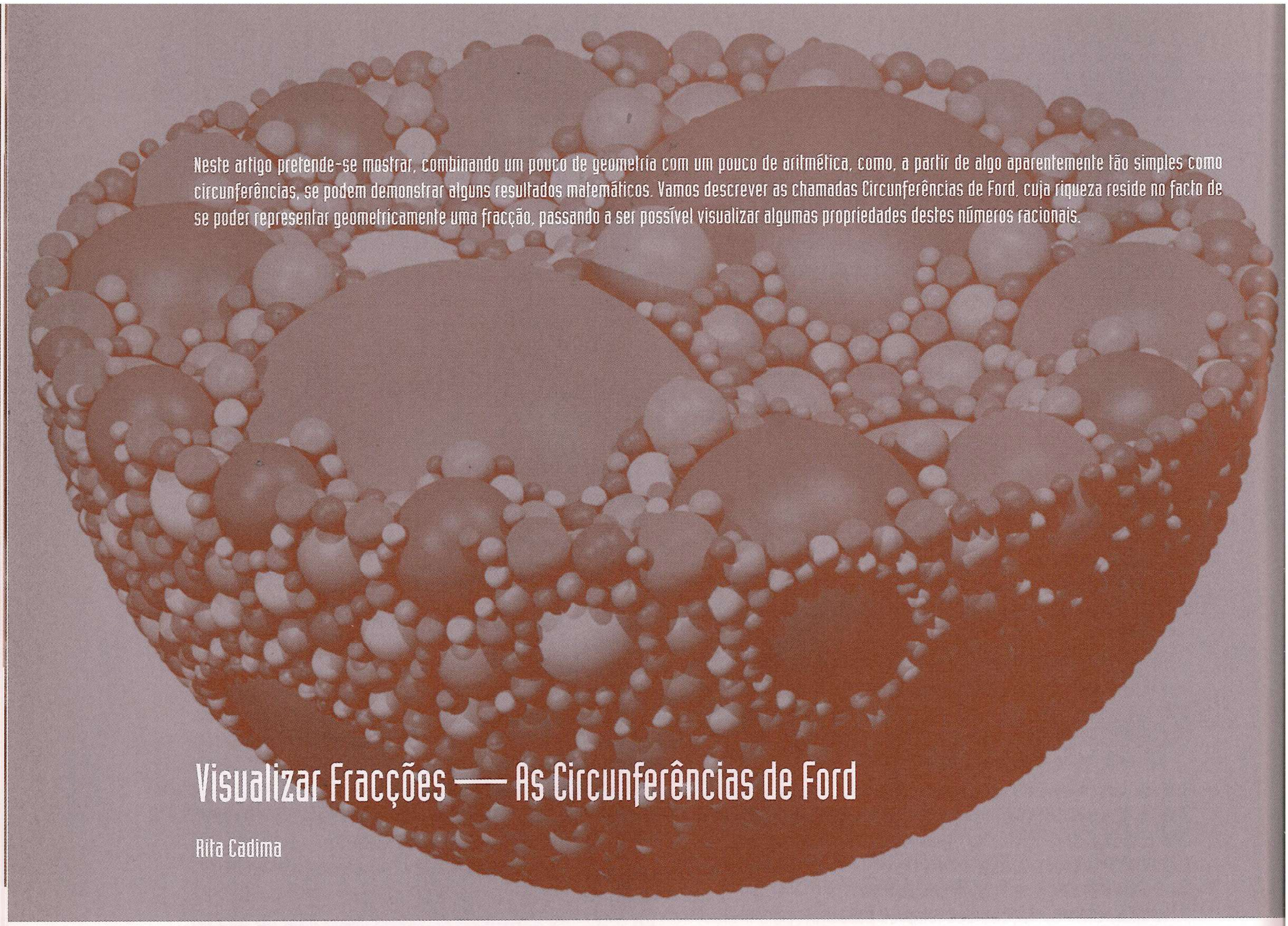


Neste artigo pretende-se mostrar, combinando um pouco de geometria com um pouco de aritmética, como, a partir de algo aparentemente tão simples como circunferências, se podem demonstrar alguns resultados matemáticos. Vamos descrever as chamadas Circunferências de Ford, cuja riqueza reside no facto de se poder representar geometricamente uma fracção, passando a ser possível visualizar algumas propriedades destes números racionais.

Visualizar Fracções — As Circunferências de Ford

Rita Cadima

Circunferências de Ford

Consideremos uma fracção irredutível h/k, em que h e k são dois números inteiros sem factores em comum. Podemos construir uma circunferência de centro $(h/k, 1/(2k^2))$ e raio $1/(2k^2)$. Variando h e k obtemos uma infinidade de circunferências $\lfloor h, k \rfloor$ de diferentes tamanhos ao longo do eixo xx, conhecidas por *Circunferências de Ford*. O seu nome deve-se ao americano Lester Ford Sr (1886–1975), o primeiro matemático a descrever estas circunferências num artigo publicado no jornal *American Mathematical Monthly* [9], em 1938. Na introdução ao seu artigo, Ford salientava que "embora possa parecer estranho ao leitor como é que o autor se pode debruçar sobre um assunto tão elementar," … "a representação de uma fracção através de uma circunferência é uma ideia que demorou muitos anos a concretizar". Segundo Ford, esta representação geométrica inovadora iria permitir a visualização de diversos resultados aritméticos.

Como a ordenada do centro de cada circunferência coincide com o valor do raio, todas as Circunferências de Ford são tangentes ao eixo xx, nos pontos $(h/k, 0)$. Outra das particularidades destas circunferências é que nunca se intersectam umas às outras e cada uma delas possui uma infinidade de circunferências que lhe são tangentes.

Para demonstrarmos estas propriedades, vamos considerar duas circunferências distintas $\lfloor h_1, k_1 \rfloor$ e $\lfloor h_2, k_2 \rfloor$. A distância d entre os seus centros é, aplicando o Teorema de Pitágoras, dada pela equação

$$d^2 = \left(\frac{h_2}{k_2} - \frac{h_1}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2k_2^2} - \frac{1}{2k_1^2}\right)^2.$$

Ao considerarmos a soma dos raios das duas circunferências,

$$s = \frac{1}{2k_1^2} + \frac{1}{2k_2^2},$$

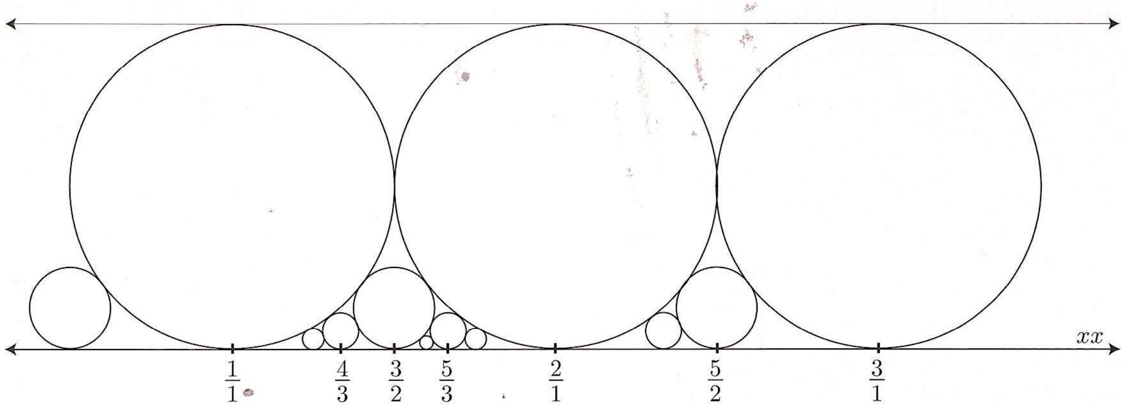
podemos comparar s^2 com d^2. Calculando $d^2 - s^2$ temos,

$$\left(\frac{h_2}{k_2} - \frac{h_1}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2k_2^2} - \frac{1}{2k_1^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2k_1^2} + \frac{1}{2k_2^2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{h_2}{k_2} - \frac{h_1}{k_1}\right)^2 - \frac{1}{k_1^2 k_2^2} = \frac{(h_2 k_1 - h_1 k_2)^2 - 1}{k_1^2 k_2^2}.$$

O número $h_2 k_1 - h_1 k_2$ é um número inteiro (pois h_1, k_1, h_2 e k_2 são inteiros) e é diferente de zero, pois escolhemos duas circunferências distintas, pelo que $(h_2 k_1 - h_1 k_2)^2 - 1 \geq 0$.

Ao verificarmos que a diferença $d^2 - s^2$ nunca é negativa, constatamos que a distância entre os centros nunca é inferior à soma dos raios, o que nos leva a concluir que duas quaisquer Circunferências de Ford nunca se intersectam, podendo, quando muito, serem tangentes num único ponto,



Para visualizar a distribuição das circuferências de Ford ao longo do eixo xx, podemos construir algumas destas circunferências. Comecemos por construir as circuferências da forma $\lfloor n, 1 \rfloor$, cujo raio é $1/2$ e cujos pontos de tangência à recta $y = 0$ são os valores inteiros n da recta real. Estas circunferências são tangentes entre si duas a duas e possuem todas uma infinidade de circunferências tangentes. Por exemplo, entre $\lfloor 1, 1 \rfloor$ e $\lfloor 2, 1 \rfloor$ é possível construir a circunferência $\lfloor 3, 2 \rfloor$ tangente a estas. E entre estas três circunferências é possível encaixar outras duas, $\lfloor 4, 3 \rfloor$ e $\lfloor 5, 3 \rfloor$. E assim sucessivamente.

Figura 1.

o que sucede se $|h_2k_1 - h_1k_2| = 1$. Como esta equação tem infinitas soluções inteiras, podemos também concluir que cada circunferência possui uma infinidade de outras circunferências que lhe são tangentes (ver Figura 1).

Podemos ainda procurar saber como é que, dada uma circunferência $\lfloor h, k \rfloor$, se determinam todas as circunferências com as quais é tangente e quais as propriedades comuns a estas circunferências.

Se $\lfloor h_1, k_1 \rfloor$ e $\lfloor h_2, k_2 \rfloor$ são circunferências tangentes a $\lfloor h, k \rfloor$ então $h_1k - hk_1 = 1$ e $h_2k - hk_2 = 1$. Subtraindo

$$(h_1k - hk_1) - (h_2k - hk_2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow h(k_1 - k_2) = k(h_1 - h_2),$$

observamos que h divide $(h_1 - h_2)$ e que k divide $(k_1 - k_2)$ e então podemos concluir que $h_2 = h_1 + nh$ e $k_2 = k_1 + nk$, para algum valor $n \in \mathbb{Z}$.

Resumindo, se $\lfloor H, K \rfloor$ for tangente a $\lfloor h, k \rfloor$ é possível obter todas as outras circunferências tangentes a $\lfloor h, k \rfloor$ através de $h_n = H + nh$ e $k_n = K + nk$, com $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$, construindo, deste modo, duas sucessões infinitas de circunferências à direita e à esquerda de $\lfloor h, k \rfloor$ (Figura 2).

Observando as diferenças entre as abcissas dos centros das circunferências $\lfloor h, k \rfloor$ e $\lfloor h_n, k_n \rfloor$,

$$\frac{h_n}{k_n} - \frac{h}{k} = \frac{kh_n - hk_n}{k_nk} =$$
$$= \frac{k(H + nh) - h(K + nk)}{k(K + nk)} = \frac{kH - hK}{k(K + nk)} = \frac{\pm1}{k(K + nk)},$$

verificamos que estas diferenças convergem para zero quando $|n| \to \infty$. Ou seja, as sucessivas circunferências tangentes $\lfloor h_n, k_n \rfloor$, cada uma tangente à seguinte, tornam-se cada vez mais pequenas e os seus centros aproximam-se indefinidamente da abcissa $x = h/k$.

Esta situação repete-se para todas as Circunferências de Ford e, portanto, cada circunferência está totalmente rodeada inferiormente pelas sucessões das circunferências que lhe são tangentes.

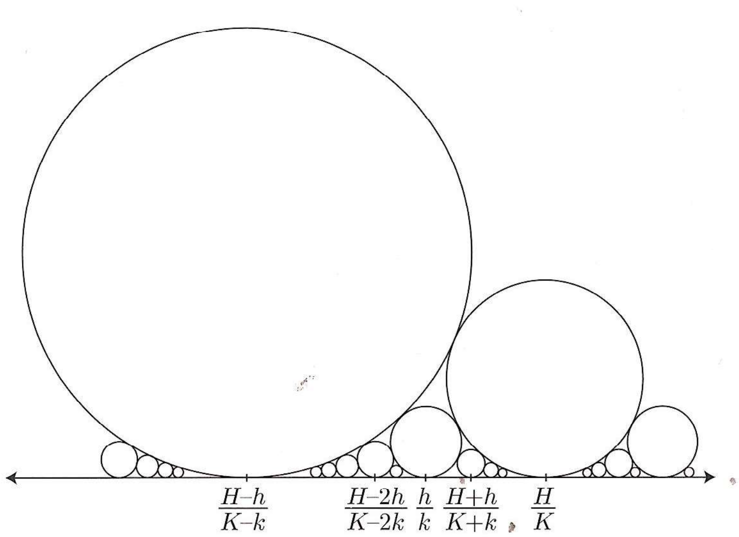


Figura 2.

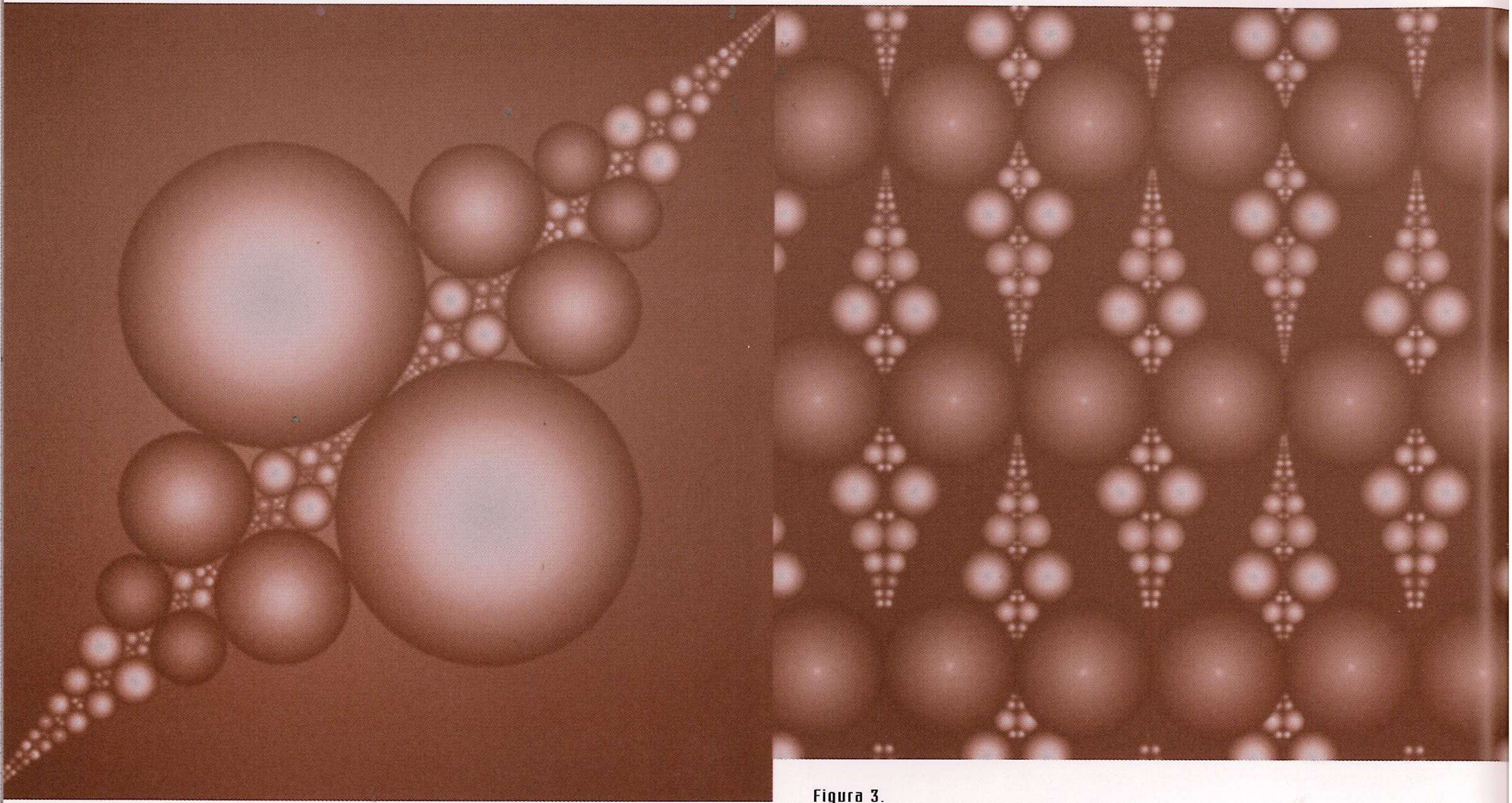


Figura 3.

Aplicações

Ao longo do século (XX) foi possível aplicar as Circunferências de Ford em diversas áreas da Matemática, desde a geometria hiperbólica às sucessões de Farey. Vejamos dois exemplos simples: fractais e aproximação a irracionais.

Facilmente conseguimos imaginar que, a partir das regras que definem as Circunferências de Ford, se podem construir diferentes tipos de fractais (Figura 3).

No estudo da aproximação a números irracionais por números racionais, as circunferências de Ford deram um contributo significativo. Um dos problemas consiste em tentar determinar fracções racionais cuja diferença relativamente a um dado número irracional não ultrapassasse determinado valor e procurou-se exprimir este valor em função do denominador da fracção pretendida. Este esforço traduziu-se no estudo da existência ou não de infinitas soluções inteiras p e q de inequações do tipo

$$\left|\omega - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^k},$$

para qualquer número irracional ω.

Liouville (1809-1882) foi um dos matemáticos que mais contribuiu para a resolução deste problema e, com base nos seus estudos sobre aproximações, provou a existência de números não algébricos, apresentando os primeiros exemplos de números transcendentes.

Se ω for um número racional então ω é da forma p/q, com p e q inteiros e sabemos que existe uma Circunferência de Ford correspondente a esta fracção, a circunferência $\lfloor p, q \rfloor$. A recta $x = \omega$ passa pelo centro desta circunferência e intersecta o eixo xx no ponto de tangência $(p/q, 0)$. Independentemente do número de circunferências que esta recta possa ou não trespassar, após intersectar a circunferência $\lfloor p, q \rfloor$, mantém-se no seu interior até atingir o eixo xx. (Figura 4).

Se ω for irracional, sabemos que a recta $x = \omega$ não passa no centro de nenhuma Circunferência de Ford, pois estes centros têm sempre abcissas racionais, e também não intersecta o eixo xx em nenhum ponto de tangência destas circunferências, o que implica que após entrar no interior de um qualquer círculo tem que tornar a sair. E como qualquer uma destas circunferências está completamente rodeada (inferiormente) por uma infinidade de circunferências tangentes, a recta tem que obrigatoriamente intersectar outra circunferência. Como esta situação se mantém para qualquer nova circunferência que a recta intersecta, podemos afirmar que a recta intersecta uma infinidade de circunferências. (Figura 5)

Analiticamente, o facto da recta $x = \omega$ intersectar uma circunferência $\lfloor h, k \rfloor$, traduz-se por

$$\left|\omega - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{2k^2},$$

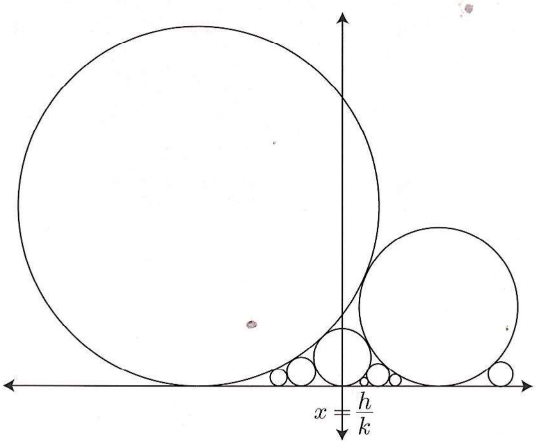


Figura 4.

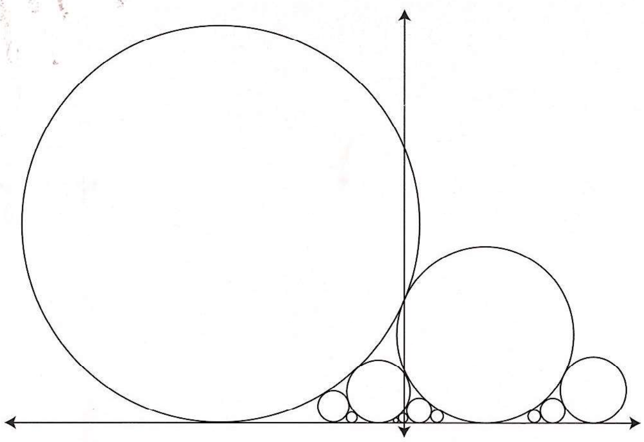


Figura 5.

ou seja, comparando a abcissa do centro do círculo com a abcissa dos pontos da recta sabemos que esta diferença é inferior ao raio do círculo. Logo, como a recta intersecta uma infinidade de Circunferências de Ford, podemos concluir que existem infinitas soluções desta equação.

Bibliografia

[1] *Encyclopaedia of Mathematics*, vol. 2 e 5. Kluwer Academic Publishers, 1988, Dordrecht, Netherlands.

[2] Apostol, T. M. — *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*. Springer-Verlag, 1997, New York.

[3] Conway, J. H. & Guy, R. K. — *The Book of Numbers*. Springer-Verlag, 1996, New York.

[4] Niven, Ivan — *Numbers: Rational and Irrational*. The L. W. Singer Company — New Mathematical Library, 1961, Yale University.

[5] Rademacher, H. — *Higher Mathematics from an elementary point of view*. Birkhauser Editor, 1982, Boston.

[6] `http://mathworld.wolfram.com/FordCircle.html`

[7] `http://ford-circle.wikiverse.org/`

[8] `http://www.josleys.com/creatures41.htm`

[9] `http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9890(193811)45:9%3C586:F%3E2.0.CO%3B2-1`

Rita Cadima
Escola Superior de Educação de Leiria