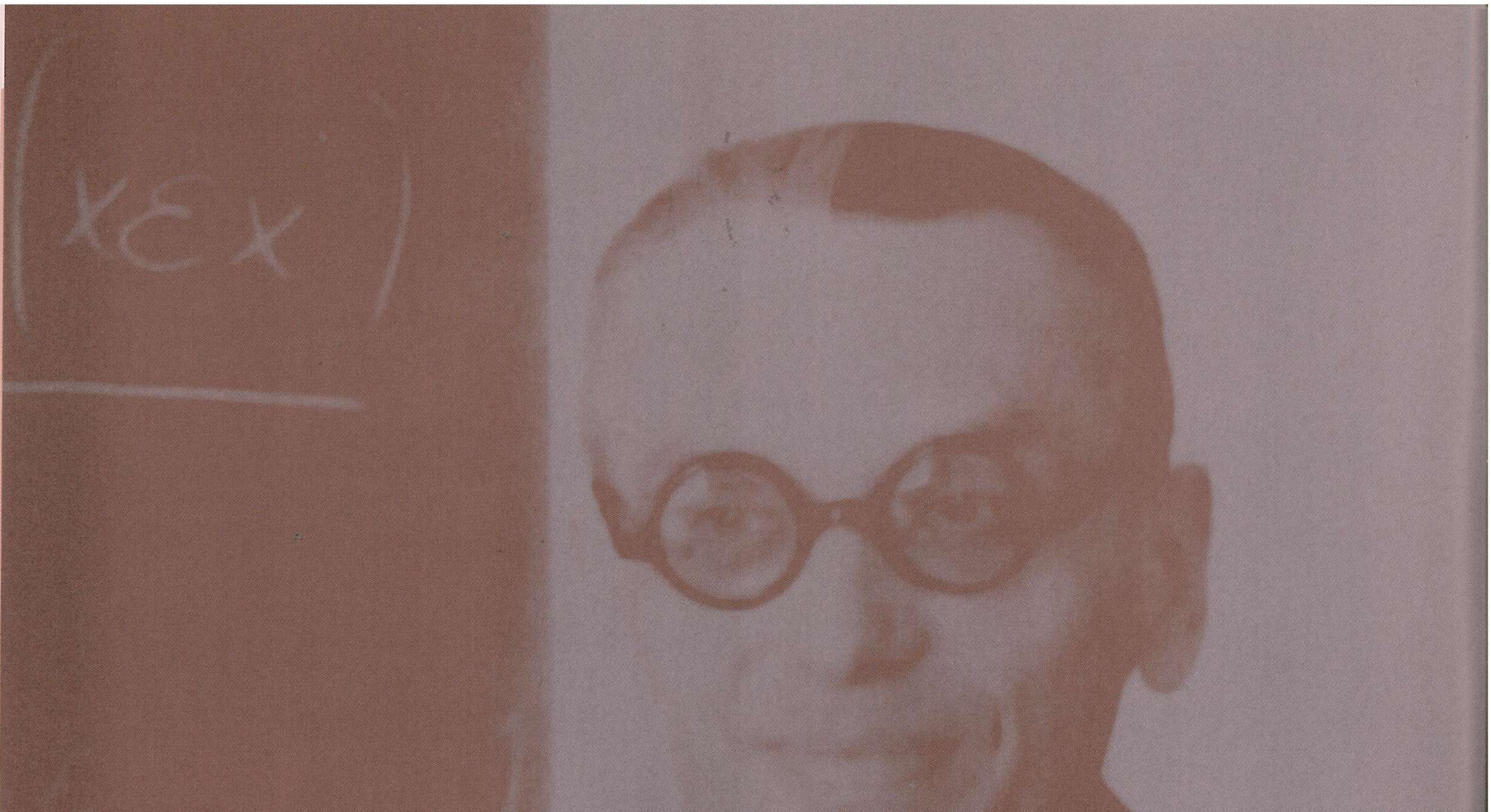


Kurt Gödel [1906—1978]

António M. Fernandes

Introdução

O número 27 do volume 154, de Dezembro de 1999, da revista *Time* dedicou uma secção especial à escolha das *personalidades do século XX*. Sem espanto, nomes como o de Albert Einstein ou Alan Turing surgem nessa lista. O primeiro por razões óbvias, o segundo porque o seu trabalho no domínio da teoria da computabilidade teve repercussões fundamentais na informática. Surpreendentemente, a lista contém também o nome de Kurt Gödel que, com Turing, forma o par de matemáticos que surge na lista. Ao contrário de Einstein, Gödel não era popular, e ao contrário dos resultados de Einstein e de Turing, os de Gödel, em especial os seus teoremas da incompletude e a sua abordagem do problema do contínuo, afectando o núcleo profundo da matemática eram, deste modo, mais inacessíveis ao grande público. Apesar disso, nenhum outro resultado em matemática teve um impacto intelectual comparável.

A matemática antiga fundou-se (e, em certo sentido, confundiu-se) com a geometria euclidiana e a sua metodologia restritiva, associada ao uso da régua não graduada e do compasso.

Apesar de constituir uma ferramenta intelectual de valor inestimável, o método geométrico revelou-se insuficiente. Os problemas clássicos da trissecção do ângulo, da duplicação do cubo e da quadratura do círculo resistiram-lhe (e sabemos hoje que não são solúveis através de tal método). A situação agravou-se e quando, em 1687, Newton publica pela primeira vez os seus *Philosopia Naturalis Principia Mathematica* o método estava exausto. A exposição de Newton já não se baseia num *método geométrico puro*, mas sim numa mistura deste com intuição física e uma parafernália de argumentos baseados na teoria do movimento. A sucessiva libertação relativamente à metodologia clássica continuaria através da incorporação de princípios infinitários que seriam tão profícuos quanto contestados. Efectivamente, desde que Berkeley e Bolzano reclamaram fundações rigorosas para a matemática, as vozes consonantes não cessaram até ao início do século XX.

Kurt Gödel, nasceu em 28 de Abril de 1906 na cidade Morava de Brünn, então parte integrante do Império Austro-Húngaro, e actualmente da República Checa, com a denominação de Brno, denominação esta que adquiriu logo após a segunda guerra mundial. Comemora-se, portanto, o centenário do seu nascimento.

De acordo com o próprio Gödel, a filosofia era o seu principal interesse. Ainda assim, quando deixou Brno para ir estudar na Universidade de Viena a sua opção inicial foi a física teórica. Ele sempre se interessou mais pelo rigor fundacional que pelos aspectos técnicos e, essa busca incessante de rigor levou-o, primeiro a mudar de física para matemática e, mais tarde, de matemática para lógica matemática.

Gödel estudou filosofia da matemática com Moritz Shlick (o fundador do famoso *Círculo de Viena)*, que é considerado o pai do *positivismo lógico*. De acordo com esta corrente, a lógica matemática seria a chave para entender os fundamentos da matemática, a ferramenta primordial da análise filosófica e, não menos importante, permitiria contornar o maior obstáculo do *empiricismo* — a sua inadequação à matemática e ao seu método. As esperanças do *círculo* centravam-se na possibilidade de a lógica matemática poder vir a demonstrar o carácter tautológico das verdades matemáticas.

Apesar de frequentar o *círculo* assiduamente e de ter subscrito o seu manifesto de 1929, Gödel discordava do valor absoluto que os seus membros atribuíam ao positivismo. Muito mais tarde, em 1975 diria,

> [é] verdade que o meu interesse pelos fundamentos da matemática foi desperto pelo Círculo de Viena mas, quer as consequências filosóficas dos meus resultados, quer os princípios heurísticos que a eles conduziram, não são nem positivistas nem empiricistas na sua essência.

Gödel iniciou os seus estudos em lógica matemática em 1928, assistindo ao curso de Rudolf Carnap acerca dos *fundamentos filosóficos da aritmética* onde, rapidamente, se inteirou dos importantes trabalhos de Hilbert, Frege, Brouwer e Cantor.

Quando, em 1929, iniciou o seu período mais profícuo de investigação em lógica matemática, que duraria até 1942, ele conhecia perfeitamente os resultados entretanto obtidos neste domínio, bem como os problemas mais interessantes acerca dos fundamentos da matemática.

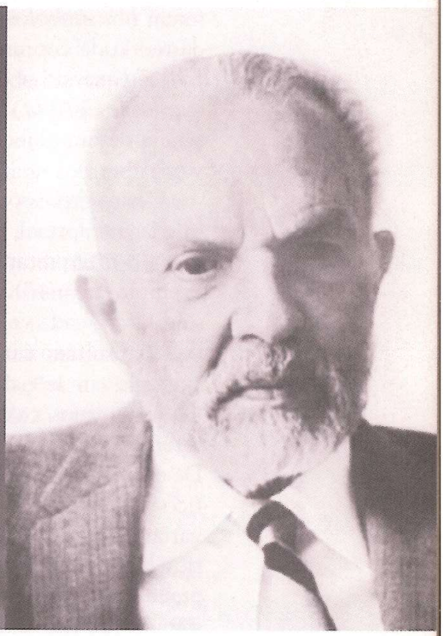
Neste pequeno tributo a um génio cujo trabalho figurará para sempre na galeria dos feitos ímpares, abordar-se-ão informalmente o seu *segundo teorema da incompletude* e os seus estudos acerca do *problema do contínuo* e do *axioma da escolha*.

O segundo teorema da incompletude

Em 1930 Gödel publicou um resultado conhecido como *segundo teorema da incompletude de Gödel*. O efeito desta publicação foi tremendo, obrigando a comunidade matemática a refazer as suas expectativas e a reorientar os seus esforços fundacionistas.

A matemática desenvolve-se em torno e acerca de teorias formais. Isto significa que as propriedades sob investigação, bem como os resultados envolvendo essa propriedades, podem ser descritos num tipo de linguagem dito *formal*. Esta actuação não corresponde a um elitismo artificioso trata-se, isso sim, de uma opção absolutamente necessária para evitar certo tipo de *paradoxos semânticos* inerentes à riqueza expressiva das *linguagens naturais*. Para se ter uma ideia do fenómeno em questão, considere-se o seguinte facto: *existe um número natural que não se pode definir com menos de 100 palavras*. (O número de frases, semanticamente significativas, envolvendo menos de 100 palavras é um número finito, pelo que estas só podem descrever um número finito de números naturais.) A frase "x é o menor número natural que não se pode definir com menos de 100 palavras", define inequivocamente o menor natural que não se pode definir com menos de 100 palavras. Mas, a frase que acabámos de descrever, tem menos de 100 palavras! O que introduz uma situação paradoxal. Este tipo de problema surge numa linguagem natural uma vez que conceitos como o de *definível*, situando-se no nível *metalinguístico*, fazem ao mesmo tempo parte das linguagens naturais pois elas contém a sua metalinguagem. De modo a evitar este comportamento, as teorias matemáticas são então descritas em linguagem mais pobres, designadas de *linguagens formais*.


Moritz Schlick


Rudolf Carnap

De modo a fornecer uma ideia dos constituintes de uma linguagem formal, consideremos o caso particular da aritmética dos números naturais. Uma proposição como por exemplo "todo o número natural ou é par ou ímpar" pode ser descrita na linguagem formal associada àquela estrutura através da expressão $(\forall x)[(\exists y)x = y + y \vee (\exists y)x = y + y + 1]$. Letras como x, y na expressão anterior, denotam objectos do universo de discussão e designam-se de *variáveis*. Outras não designam elementos arbitrários mas indivíduos particulares (como o "1", na mesma expressão), estas designam-se por *constantes*. Outros símbolos designam operações e relações (como o "+" e o "="). Os primeiros designam-se *símbolos funcionais* e os segundos *símbolos relacionais*. Finalmente, aqueles que designamos de *símbolos lógicos* (como "$\forall$", "$\exists$" e "$\vee$" na expressão anterior), por contraposição com os descritos anteriormente e que são designados de *não-lógicos*. Os símbolos lógicos $\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ significam *para qualquer*, *existe*, *e*, *ou*, *não*, *implica* e *equivalente*. Para além de terem sempre os mesmos símbolos lógicos e de, em geral, todas possuirem o símbolo de igualdade, as linguagens formais diferem nos símbolos não-lógicos. Por exemplo, a linguagem da teoria de conjuntos possui um único símbolo não-lógico "$\in$" (quando se escreve $x \in y$ lê-se *x é elemento de y*) e a expressão $(\exists y)(\forall x)\neg(x \in y)$, dessa linguagem, traduz a existência de um objecto que não tem elementos (o conjunto vazio).

Certas expressões, construídas usando elementos de uma linguagem formal, não têm conteúdo semântico mesmo quando interpretamos as variáveis que nela ocorrem (por exemplo "$x = +$"). Esse tipo de expressão não nos interessa! Outras, cada vez que interpretamos as respectivas variáveis, o resultado é um objecto com conteúdo semântico, por exemplo $x = x + x$ é verdadeiro (na aritmética, é claro!) se interpretarmos x como sendo 0 e falso para qualquer outra interpretação de x. Tais expressões designam-se de fórmulas. De entre as fórmulas há algumas que têm conteúdo semântico mesmo não havendo lugar a qualquer interpretação de variáveis, por exemplo, $(\forall x)(\exists y)x = y + y$ (que, na aritmética, afirma que todo o número é par) é falsa, mesmo não procedendo a interpretações de variáveis. Tais fórmulas designam-se de *sentenças*. Enquanto que uma fórmula, em geral, pode conter variáveis que não são afectadas por nenhum quantificador (ou seja os símbolos "$\exists$" e "$\forall$") e que se designam, neste caso, de *variáveis livres*, já as variáveis que surgem nas sentenças têm que estar todas afectadas por quantificadores ou, como também se diz, têm que ser *variáveis mudas*.

Neste contexto, o que é então uma demonstração? Usualmente, em matemática, fixamos certos princípios (axiomas) básicos e deduzimos deles as suas consequências. Esses axiomas correspondem, neste contexto mais formal, a um certo conjunto de sentenças da linguagem. Uma demonstração (a partir destes axiomas) da sentença φ consiste então numa sequência de outras sentenças $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$, em que φ_n é φ e onde cada φ_i (para $i \leq n$) ou é um axioma ou é o resultado da aplicação de uma regra dedutiva a sentenças que entretanto já surgiram na lista. Não elaborarei muito acerca do que é uma regra lógica, basta imaginar que existem determinadas operações que a certas sentenças fazem corresponder outras preservando a verdade lógica. A título meramente ilustrativo indica-se a regra de *modus ponens* que a sentenças ϕ e $\phi \Rightarrow \psi$ faz corresponder ψ.

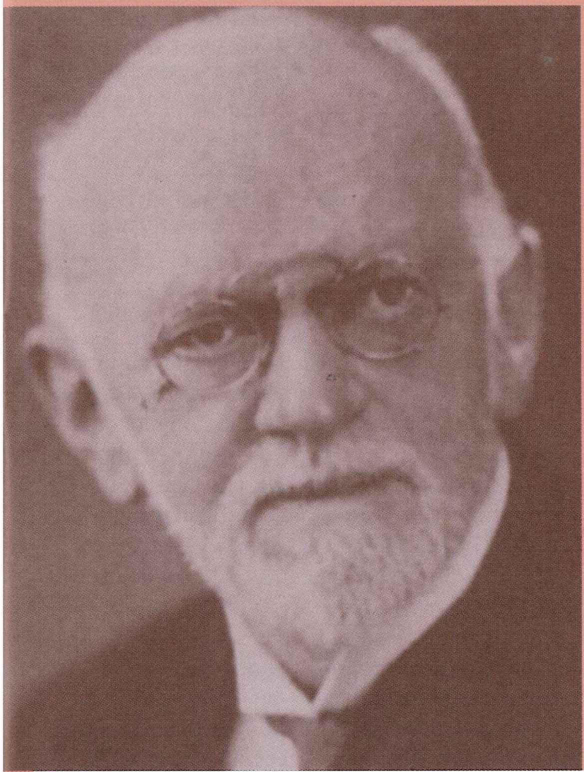
Se existe uma demonstração de φ a partir de um conjunto de axiomas T, escrevemos $T \vdash \varphi$.

Codificação da sintaxe

Os resultados de Gödel dependem de um procedimento denominado *godelização*. Esse processo que corresponde a uma codificação dos elementos sintáticos, permite que certas teorias, designadamente a aritmética, possam olhar para as sentenças como objectos numéricos e para a noção de demonstrabilidade como uma relação numérica. Basicamente, é possível associar a cada fórmula φ um número (designado *número de Gödel* de φ) que denotamos por $\ulcorner\varphi\urcorner$. Darei apenas uma ideia de como isso é possível, ilustrando o que passa no caso das palavras de um alfabeto (em geral).

Consideremos então um alfabeto, ou seja um conjunto de símbolos $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$. As palavras deste alfabe-

Gödel no Instituto de Estudos Avançados em Princeton.



David Hilbert

to são as sequências finitas de símbolos. (As fórmulas, por exemplo, são palavras no alfabeto constituído pelos símbolos lógicos e não-lógicos de uma linguagem formal.) De acordo com o teorema fundamental da aritmética, qualquer número natural diferente de 0 e 1 pode ser escrito de modo único na forma,

$$p_0^{k_0} \cdot p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n},$$

onde $p_0 < p_1 < \cdots < p_n$ são números primos (ordenados por ordem crescente) e $k_0, k_1, \ldots, k_n$ são números naturais não nulos. Este teorema fornece um método de codificação, de acordo com o seguinte: associamos a cada símbolo A_i do alfabeto um número natural $\ulcorner A_i \urcorner$. O valor de $\ulcorner A_i \urcorner$ é basicamente indiferente desde que tenhamos o cuidado de fazer corresponder valores diferentes a símbolos diferentes e maiores que zero. Para fixar ideias suponhamos que $\ulcorner A_i \urcorner = i + 1$. A cada palavra P podemos agora fazer corresponder um código $\ulcorner P \urcorner$ de acordo com o seguinte princípio se $P = \alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_r$ (onde cada α_i é um símbolo do alfabeto) o respectivo código é o número natural $p_0^{\ulcorner \alpha_0 \urcorner} p_1^{\ulcorner \alpha_1 \urcorner} \cdots p_r^{\ulcorner \alpha_r \urcorner}$ (designando por $\ulcorner \alpha_i \urcorner$ o código de α_i e considerando sempre a sequência dos primos ordenada por ordem crescente). Por exemplo, se o alfabeto tem dois símbolos A e B com códigos 1 e 2, respectivamente, então a palavra $AABA$ tem o código (ou *número de Gödel*) $2^1 3^1 5^2 7^1$.

Este processo de codificação pode ser descrito não apenas na aritmética mas em qualquer teoria T que seja minimamente interessante para o desenvolvimento da matemática. O próprio processo de codificação pode ser levado ainda mais além, de modo a ser possível descrever uma sentença da linguagem, que denotamos por Con_T que descreve a propriedade "T é consistente" (uma teoria é consistente se dos seus axiomas não é possível deduzir uma contradição).

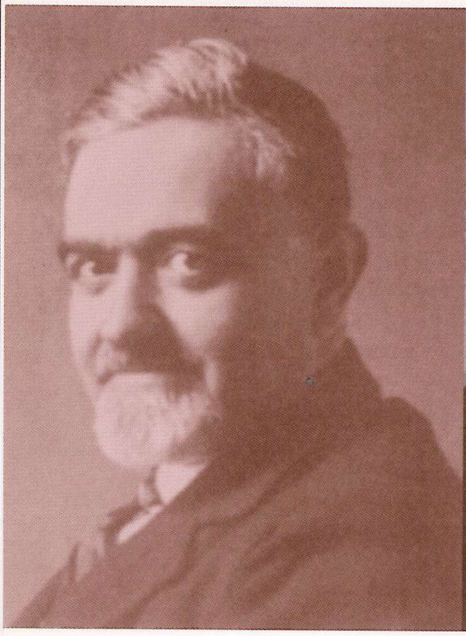
O segundo teorema da incompletude estabelece precisamente que se uma teoria T é consistente então, não se pode ter $T \vdash Con_T$, ou seja, uma teoria não pode demonstrar a sentença que descreve a sua própria consistência.

Os efeitos deste resultado foram estrondosos — o programa da consistência de Hilbert, uma das mais sérias propostas no sentido de restabelecer fundações matemáticas rigorosas foi, naquele momento, destruído. Veremos, na sequência, em que consistia esse programa e as razões que o determinaram.

O programa da consistência de Hilbert

É bem conhecido que a matemática do século XX foi largamente determinada pela visão particular de David Hilbert. Uma das suas preocupações residia na dificuldade em estabelecer fundações rigorosas daquela disciplina, facto que se tornou notório depois da adopção de métodos infinitários. Como outros que o precederam, Hilbert considerava que a teoria matemática adequada para estabelecer essas fundações era a aritmética. Isto, muito embora ele nutrisse uma certa simpatia pela teoria de conjuntos de Cantor, mesmo na forma que adquiriu após a sua axiomatização por Ernest Zermelo. Essa axiomatização, porém, possuia dois defeitos para quem, como Hilbert, pretendia resolver definitivamente a questão a contento de todos, incluindo Brouwer e Kronecker, proponentes de um *construtivismo radical*. Um desses defeitos consistia no facto dessa axiomática incluir princípios infinitários. O outro, no facto de a escolha desses axiomas ter sido determinada não pelo seu carácter óbvio (ao contrário, por exemplo, dos axiomas da geometria euclidiana) mas, numa perspectiva operacional que teve em vista isolar princípios suficientes para descrever a matemática em geral.

Uma vez que os métodos infinitários estavam na origem da controvérsia, Hilbert propôs-se isolar uma teoria básica (uma certa modificação da aritmética) onde fosse possível desenvolver uma teoria dos números elementar, axiomatizada usando exclusivamente princípios finitários, que designaremos por V, já que o próprio Hilbert a designava de *matemática verdadeira*. Os teoremas dessa *matemática verdadeira* seriam sentenças do tipo $(\forall x)f(x) = g(x)$ onde f e g são funções simples, em certo sentido computáveis. Ainda segundo Hilbert, se adicionássemos a V esses princípios infinitários que a análise acabou por incorporar, obter-se-ia uma teoria mais poderosa I (descrevendo *objectos ideais*), mas que ele acreditava possuir duas particularidades: (1) se φ é uma sentença da matemática verdadeira e se $I \vdash \varphi$ (ou seja se a sentença pode ser demonstrada por recurso aos princípios infinitários) então $V \vdash \varphi$. (Nesse caso a utilização da teoria I não é essencial do ponto de vista teórico, embora possa sê-lo do ponto de vista prático pois, com mais axiomas, as demonstrações podem ser mais fáceis de obter). (2) A con-



Giuseppe Vitali

Henri Lebesgue

sistência de I podia ser demonstrada em V. Uma vez que I era uma teoria aritmética básica, axiomatizada por princípios aceites mesmo por aqueles que adoptaram filosofias mais restritivas, o programa deveria resolver de uma vez por todas a questão dos fundamentos.

Acontece que qualquer candidato razoável a ocupar o lugar de V é suficientemente poderoso para ser alvo das consequências do segundo teorema da incompletude de Gödel, revelando que V não poderá (sendo consistente) demonstrar a sua própria consistência e, com maioria de razão, não poderá demonstrar a consistência de uma teoria ainda mais poderosa, ou seja a consistência de I.

A matemática depois dos teoremas da incompletude

A aspiração de David Hilbert de concluir com sucesso o seu programa foi, como já se viu, inviabilizada pelo segundo teorema da incompletude. A matemática encontrou a sua própria maneira de contornar esta dificuldade, elegendo como sistema fundacional a teoria de conjuntos de Cantor. Com esta opção acabou por aceitar a adopção de princípios infinitários como o axioma do infinito ou o axioma da escolha. Em certo sentido acabou por adoptar uma ontologia hilbertiana, atribuindo aos objectos matemáticos o carácter de existência na exacta medida em que o conjunto de princípios básicos que os descrevem é consistente. Claro que, depois de Gödel, sabemos não ser possível demonstrar matematicamente essa consistência. Mas, apesar desta impossibilidade concreta, a matemática é indubitavelmente a forma mais segura de conhecimento. O seu método formal é o melhor preparado para que, em caso de inconsistência, se possa proceder a uma análise que conduza a uma eliminação dos problemas — foi o que aconteceu no passado com sistemas como o de Frege.

Não obstante esta evidência, os resultados de Gödel continuam a ser utilizados de forma mais ou menos incompetente e especulativa. São notórios os esforços para derivar deles a conclusão de que o conhecimento matemático é tão inseguro como qualquer outro. Nenhuma conclusão pode ser mais ilógica que esta, já que, importa não esquecer, os teoremas de Gödel são resultados matemáticos (usá-los com aquele fim seria entrar num círculo vicioso — se a matemática não é segura, os teoremas Gödel também o não são).

O Problema do contínuo e o axioma da escolha

O problema do contínuo de Cantor, ocupou em primeiro lugar o próprio Cantor que foi incapaz de o resolver. De resto, não é de excluir que essa obcessão, sem resultados práticos, esteja associada à degradação mental que o afectou, muito especialmente nos últimos anos da sua vida. O problema foi considerado como um dos mais fundamentais da matemática do início do século XX, de tal modo que David Hilbert o colocou em primeiro lugar na sua famosa lista de problemas apresentada em 1900. O problema está associado à cardinalidade dos conjuntos de números reais.

Existe uma forma de definir formalmente a noção *o conjunto X tem o mesmo número de elementos que o conjunto Y* ou, o que significa o mesmo, *os conjuntos X e Y têm a mesma cardinalidade*. Dizemos que isso acontece precisamente quando existe uma correspondência biunívoca entre os elementos de X e os elementos de Y e escrevemos $|X| = |Y|$ quando é esse o caso. O problema do contínuo adquiriu várias formas ao longo do tempo, mas uma das primeiras é a de saber se conjectura seguinte é, ou não, verdadeira.

Hipótese do contínuo (versão fraca)

Dado um conjunto de números reais X, ou X tem a mesma cardinalidade que o conjunto dos números naturais ou então tem a mesma cardinalidade que o conjunto dos números reais.

Já se sabia que a cardinalidade do conjunto dos números naturais é estritamente menor que a dos reais (um resultado de Cantor, que mostrou que não existe uma função sobrejectiva dos naturais para os reais).

A hipótese do contínuo é motivada pela realidade correspondente à generalidade dos conjuntos de números reais que ocorrem na prática matemática corrente. Cantor estava assim convencido da sua veracidade.

A questão do axioma da escolha era igualmente motivo de grande debate no início do século XX. O axioma garante que para cada família $\{A, B, C, \ldots\}$ de conjuntos não vazios existe uma função de escolha, ou seja, uma função f, tal que $f(A)$ é elemento de A, $f(B)$ é elemento de B, $f(C)$ é elemento de C e assim sucessivamente ...

Este princípio, aparentemente inocente, e claramente verdadeiro se considerarmos famílias finitas, tem consequências para as quais os matemáticos do início do século XX não estavam preparados. Lebesgue, em cuja tese de 1902, surge a *teoria da medida de Lebesgue* (uma noção que pretendia generalizar as noções de área e volume a conjuntos arbitrários) era um oponente radical do axioma. Em 1905 Vitali descreveu um conjunto de reais que não é *mensurável à Lebesgue*.

A construção de Vitali faz uma utilização essencial do axioma da escolha e, devido a esse facto, Lebesgue não hesitou em considerar que esta aberração se devia à natureza paradoxal do axioma da escolha e não a uma limitação da sua teoria da medida. É um facto que o axioma da escolha tem consequências que são contra-intuitivas, como por exemplo o paradoxo de Banach-Tarski: é possível partir de uma esfera, particioná-la num número finito de pedaços e, depois de as transformar, recorrendo exclusivamente a movimentos rígidos (rotações e translacções) obter duas cópias exactas da esfera inicial. No entanto, uma coisa é um facto ser contra-intuitivo, outra (bem diferente) é ser inconsistente.

Em 1935 e 1937, Gödel apresentou o seu *universo construtível* que lhe permitiria uma abordagem simultânea de ambos os problemas.

Os axiomas da teoria de conjuntos garantem, por um lado, a existência de certos conjuntos, como por exemplo o conjunto vazio (o conjunto que se caracteriza por não possuir elementos) por outro, garantem a possibilidade de efectuar certas operações, que permitem obter novos conjuntos a partir de outros previamente dados, como por exemplo a possibilidade de formar a união de dois conjuntos, ou o conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto dado X, que se denota $\mathcal{P}(X)$ (um conjunto X é subconjunto de um outro conjunto Y se todos os elementos de X são elementos de Y). Em certo sentido, o universo dos conjuntos (uma estrutura que é descrita pelos axiomas da teoria de conjuntos) encontra-se hierarquizado em níveis, o mais baixo dos quais é o conjunto vazio. A hierarquia cresce, por assim dizer, usando a operação $\mathcal{P}(X)$.

Usando uma vez mais o seu processo de godelização (codificação da sintaxe) Gödel conseguiu descrever uma variação particular da operação $\mathcal{P}(X)$. Para esta variante, que denotamos por $\mathcal{P}^*$ tem-se que cada $\mathcal{P}^*(X)$ não é agora constituido por todos os subconjuntos de X, mas apenas por aqueles que são definíveis, ou seja, cujos elementos são exactamente os elementos de X que satisfazem um certa propriedade, fixa *a priori*. Partindo do conjunto vazio e munido desta nova operação $\mathcal{P}^*$, Gödel descreveu um universo de conjuntos, em sua homenagem denominado *universo construtível de Gödel*, que se denota por L e que tem a particularidade de nele serem verdadeiros todos os axiomas da teoria de conjuntos para além do axioma da escolha e a hipótese do contínuo.

O resultado de Gödel, não resolveu o problema do contínuo, apenas mostrou que a hipótese do contínuo é consistente com os restantes axiomas da teoria de conjuntos (um fenómeno semelhante ao que ocorreu com o axioma das paralelas no contexto da geometria). O problema resistiu até aos anos 60, altura em que Paul Cohen demonstrou que também a negação da hipótese do contínuo é consistente com os restantes axiomas da teoria de conjuntos, resultado que em conjunto com o de Gödel mostra que o problema do contínuo não se pode decidir na teoria de conjuntos. Em certo sentido, o resultado de Gödel também desmentiu Lebesgue, na medida em que não existe uma natureza paradoxal intrínseca no axioma da escolha, ou pelo menos esse carácter não se revela mais nele que nos axiomas da teoria de conjuntos. A matemática faria a sua escolha contra a vontade de Lebesgue. Hoje o axioma da escolha é geralmente admitido como um dos axiomas da teoria de conjuntos.


Gödel e Einstein em Princeton.

Depois de 1942

Depois de 42, Gödel trabalhou mais activamente em filosofia que em lógica matemática. Por essa ocasião ele estava interessado na relação entre o trabalho de Kant e a teoria da relatividade de Einstein por quem, de resto nutria uma profunda amizade e mantinha um profundo relacionamento intelectual. (Naquela altura eram ambos membros do Instituto de Estudos Avançados em Princeton.) Gödel estava particularmente interessado em mostrar como Kant estava errado relativamente à natureza da noção de *tempo* e, para ilustrar o seu ponto de vista ele encontrou soluções das equações de campo de Einstein, de acordo com as quais (e assumindo que o universo se encontra em rotação) é teoricamente possível viajar no tempo. Paralelamente Gödel trabalhava no seu programa de filosofia da matemática, não apenas como uma sub-disciplina da filosofia geral, mas como uma abordagem preparatória para uma verdadeira metafísica. Na sequência ele estudou intensivamente Leibniz e a sua *Monadologia*.

Gödel opunha-se fortemente à ideia da matemática como uma *sintaxe da linguagem*, defendendo de uma posição platonista, a existência dos objectos matemáticos numa *ontologia da consistência*.

Já muito próximo do final da sua vida, Gödel, sempre fiel ao seu elevado padrão de exigência e rigor intelectual, diria dos seus esforços que foram inconclusivos. Essa sua busca terminaria com a sua morte em 1978. Morreu em condições físicas deploráveis, ao que se sabe de fome. A sua mente poderosa coabitava com um espírito atormentado que o levava a suspeitar que corria o perigo de envenenamento o que, por sua vez, o conduzia a privar-se de alimento.

Em todo o caso, o legado de Gödel permanecerá imortal na montra das grandes realizações intelectuais da Humanidade.

António M. Fernandes
Instituto Superior Técnico