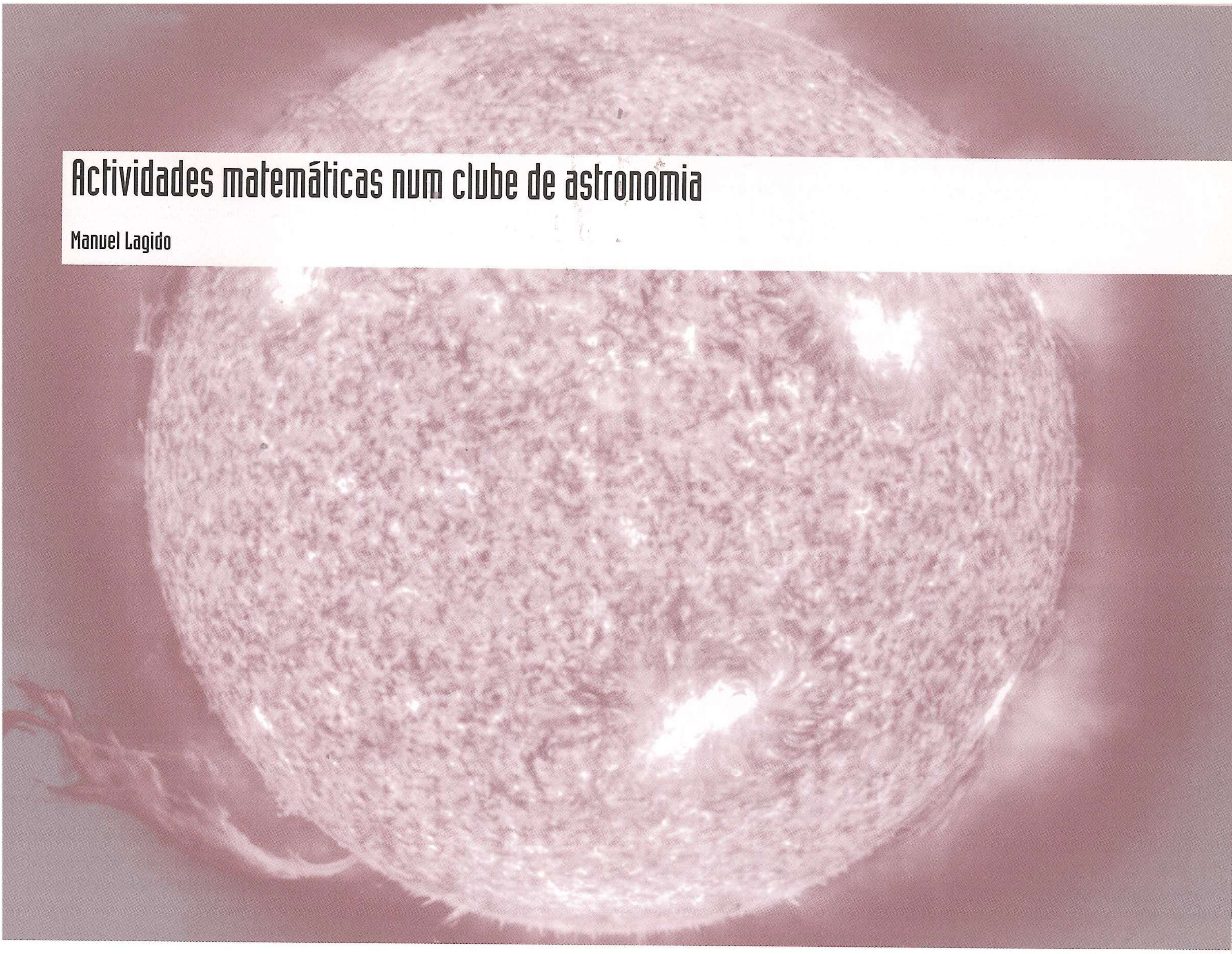


Actividades matemáticas num clube de astronomia

Manuel Lagido

As experiências levadas a cabo num clube de astronomia podem envolver várias áreas disciplinares e a matemática, naturalmente, é uma delas.

As três actividades, descritas a seguir, exemplificam como certos conhecimentos da disciplina são requeridos para o seu desenvolvimento e, também, como propiciam ambientes de aprendizagem para a sua consolidação no âmbito de uma actividade extracurricular.

As actividades experimentais foram realizadas por alunos do clube de astronomia da escola secundária/3 José Régio de Vila do Conde[1] e são algumas das que constam habitualmente do plano de actividades do clube. Foram escolhidas pela pouca sofisticação de meios que necessitam (pelo menos as duas primeiras), e que também tornam por isso mais interessantes certos resultados obtidos.

I — Determinação da latitude

Esta experiência visa obter uma estimativa da latitude do lugar e é realizada desde 1999, ano em que a iniciativa do programa Ciência Viva para celebrar o equinócio da primavera disponibilizou às escolas materiais de fácil construção e diversa informação de apoio.[2]

A determinação da latitude pode ser obtida a partir da relação da declinação de um astro com a sua altura no momento da sua culminação superior.

Se, no momento da culminação superior de um astro[3], determinarmos a sua altura (Alt) e conhecermos a sua declinação δ, então a latitude do lugar (Lat) é dada, em graus, por:

$$\mathrm{Lat} = (90 - \mathrm{Alt}) + \delta \ (*)$$

Ou, visto que a distância zenital Z é complementar da altura:

$$\mathrm{Lat} = Z + \delta$$

No caso do Sol, o momento da culminação superior, meio dia solar, pode ser determinado experimentalmente — é aquele que corresponde ao comprimento mínimo da sombra de uma haste vertical projectada sobre um plano horizontal.

A declinação do Sol, que varia aproximadamente entre 23,5° e −23,5°, é nula no momento exacto do equinócio da Primavera e do Outono (ver figura 1) e, então, tem-se:

$$\mathrm{Lat} = 90° - \mathrm{Alt}$$

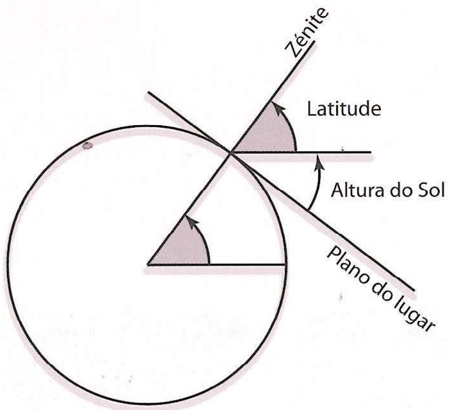


Figura 1.

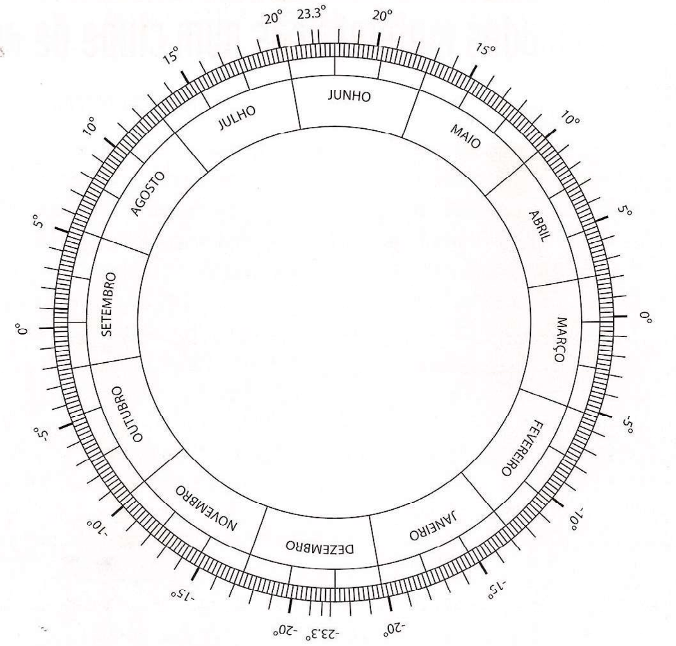


Figura 2.

Por esse motivo, a determinação experimental da latitude tem-se realizado em datas próximas do equinócio da primavera (no equinócio de Outono nem sempre as aulas começaram ...)

Apesar do valor da declinação do Sol — δ ser pequeno o suficiente para ser desprezado (no contexto dos objectivos desta actividade) os alunos têm — no considerado nos cálculos. É designado por *ângulo de correcção* em várias tabelas[4], como a da figura 2.

Tem interesse formativo mostrar aos alunos que no passado estas eram elaboradas pelos astrónomos a partir da informação sobre o movimento aparente do Sol na esfera celeste, para fornecer tabelas náuticas para os navegadores. Estes determinavam a altura do Sol com recurso a quadrantes e astrolábios para a operação designada *pesar o Sol* — obtenção da altura do Sol ao meio dia solar, um processo semelhante ao realizado pelos alunos e descrito mais adiante.

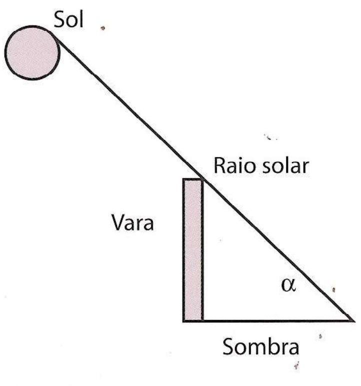


Figura 3.

Envolver os alunos na recriação deste procedimento favorece também, portanto, uma tomada de consciência dos alunos do importante papel dos portugueses que na época dos Descobrimentos foram pioneiros nesta área do conhecimento e que por isso se destacaram no mundo de então.

Para determinar a altura do sol, os alunos usaram dois métodos:

i) Método da sombra

Os alunos registaram sucessivos valores do comprimento da sombra — s de uma vara vertical de comprimento — h, projectada num plano horizontal. (Deve ser comprovada a verticalidade da vara usando dois esquadros.)

Depois a relação conhecida da trigonometria

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{s}$$

fornece o valor da amplitude do ângulo α — altura do Sol pretendida (ver figura 3).

No quadro abaixo mostram-se os registos efectuados no dia 21 de Março de 2000. O comprimento da vara media 12,8 cm.

Hora	Sombra (comprimento em cm)	Altura do Sol (em graus)
11h15	13,5	43,5
11h28	12,9	44,8
12h01	11,9	47,1
12h30	11,6	47,8
12h40	11,4	48,3
12h55	11,5	48,1

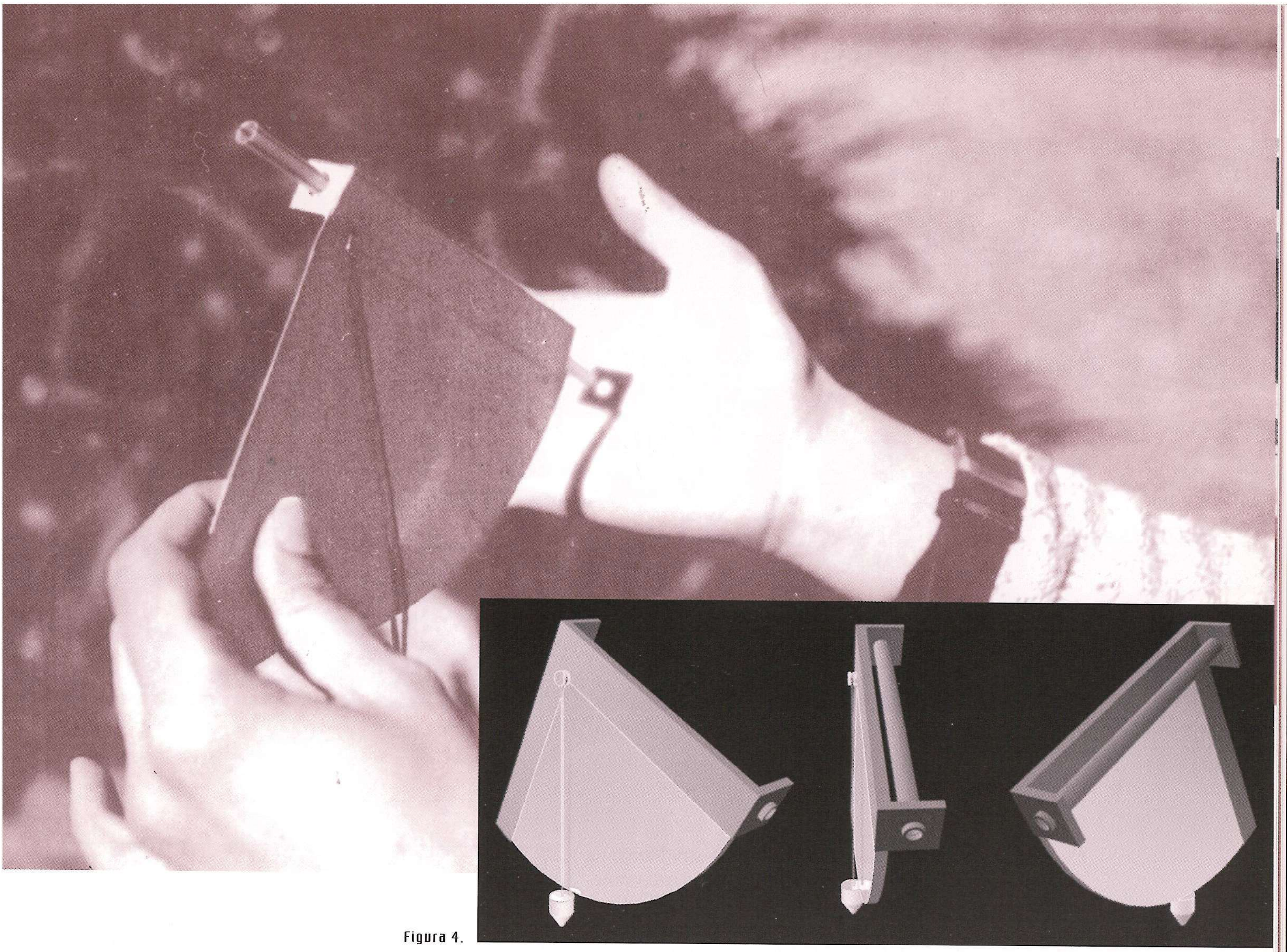


Figura 4.

Os momentos da determinação do comprimento da sombra foram os possíveis face às condições da experiência. É que não é muito fácil distinguir variações no comprimento da sombra em intervalos de tempo curtos.

Aceitando pois, com alguma margem de erro que o meio-dia solar ocorreu às 12h40, e sabendo que o valor do *ângulo de correcção* é, para aquele dia de 0,25, vem, utilizando a fórmula anterior (*):

$$\text{Lat} = 90 - 48{,}3 + 0.25 = 41{,}95$$

Ora, sendo a latitude de Vila do Conde 41°21′49″N, valor aproximadamente igual a 41°,36 temos a determinação da latitude com um erro inferior a pouco mais de meio grau!

ii) Medição da altura do Sol com recurso a um quadrante

Este instrumento, de fácil construção, fornece a leitura directa da altura do Sol , logo que alinhado com a direcção dos raios solares. Isto é conseguido logo que se observa um círculo na sombra do eixo projectada na palma da mão, por exemplo (figura 4).

Na experiência, os registos foram efectuados em grupos de 7 alunos, cada um dos quais com o seu quadrante, no momento do meio dia solar, determinado pelo método da sombra mínima referido antes, ou utilizando um relógio de sol construído em cartão[5], e alinhado devidamente com a direcção Norte-Sul.

Grupo	Altura do Sol ao meio dia solar (em graus)
1	47
2	47,3
3	49,5
4	50
5	49
6	49,3
7	49,8

Média: 48,84. *Desvio padrão:* 1,2.

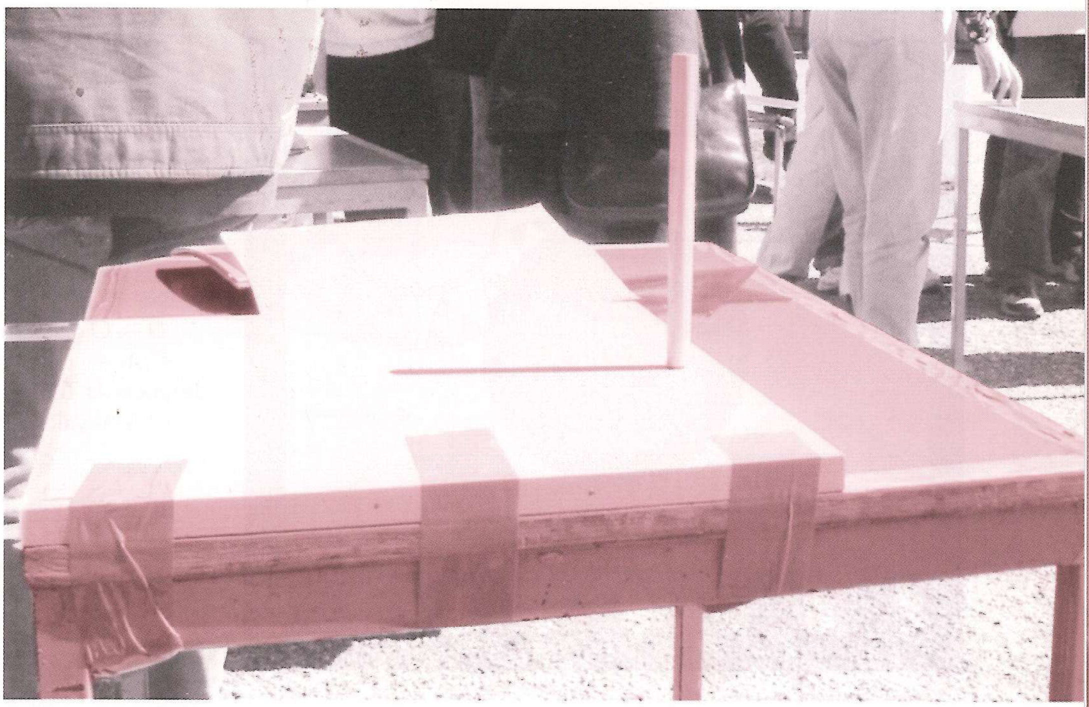
Os dados desta experiência foram recolhidos em Março de 1999 e, aplicando mais uma vez a fórmula para a determinação da latitude, com o valor adequado do *ângulo de correcção*, obteve-se para valor da latitude 41,16°, o que comparado com o valor real de aproximadamente 41,36° é outra vez notável. A primeira vez que fizemos esta experiência os resultados surpreenderam pelo apreciável grau de aproximação conseguido, tendo em conta a singeleza dos meios envolvidos. A repetição em ocasiões posteriores dissipou eventuais dúvidas conseguindo-se sempre aproximações inferiores a 1 grau.

II — Variação da altura do Sol ao longo do ano

Um grupo de alunos do clube, curioso acerca da variação da sombra mínima ao longo dos dias do ano, tentou registar esses valores de forma regular. A mais persistente foi a Cátia que fez 16 leituras, entre 22 de Março e 1999 e 19 de Fevereiro de 2000 da altura do Sol num momento próximo do meio dia solar.

Data	Dia (contado do início do ano)	Altura do Sol (em graus)
22-03-1999	81	50
16-06-1999	167	72
21-06-1999	172	72
23-06-1999	174	71
30-06-1999	181	73
09-07-1999	190	69
13-07-1999	194	72
18-07-1999	199	69,5
29-07-1999	210	69
11-08-1999	223	62
10-09-1999	253	54
11-09-1999	254	54
02-11-1999	306	31
16-12-1999	350	23
29-01-2000	394	29
19-02-2000	415	36

Estes são os dados tal como foram recolhidos na experiência, pela aluna, sem retirar valores com alguma discrepância. É o caso do valor de 30/6/1999 — que deveria ser ligeiramente inferior ao de 21/6/1999.Contudo, para não retirar autenticidade às condições reais em que decorreu a experiência, e porque não afectam sobremaneira o resultado final optou-se por mantê-los.



O gráfico da função que traduz a variação da altura do sol ao longo dos dias do ano, *vê-se logo* que parece ser o de uma função trigonométrica (figura 5).

A procura da função que melhor se ajusta aos dados, sem usar as funções específicas da calculadora gráfica, é um interessante desafio de modelação que se pode dar aos alunos do final do secundário.

Assuma-se então que é uma função do tipo:

$$f(t) = A + B \text{ sen}(\omega t - \theta)$$

E procurem-se os valores dos parâmetros A, B, ω e θ.

A oscilação da altura do Sol tem de amplitude o valor que corresponde à semi diferença entre o valor máximo e mínimo observado:

$$B = \frac{73 - 23}{2} = 25$$

O fenómeno tem periodicidade anual, pelo que podemos admitir $\omega = 2\pi/365$.

Já temos: $f(t) = A + 25 \text{ sen}(2\pi/365t - \theta)$.

Quando $\text{sen}(2\pi/365t - \theta) = 1$ temos o valor máximo de 73. Logo:

$$73 = A + 25 \Leftrightarrow A = 48$$

$$f(t) = 48 + 25 \text{ sen}(2\pi/365t - \theta)$$

Agora, escolhendo um par ordenado de valores da tabela podia-se obter, analiticamente, o valor de θ.

Ou, de modo alternativo, a partir de $\theta = 0$, podemos, por tentativas tentar descobrir a chamada *fase inicial* (figura 6).

Tendo em atenção que decorreram 81dias até ao equinócio da primavera (primeiro valor registado) é natural aceitar–se, finalmente, a função (figura 7):

$$f(t) = 48 + 25 \text{ sen}\left(\frac{2\pi}{365}(t - 81)\right)$$

Parece ser um bom modelo para traduzir a altura do Sol ao longo dos dias daquele ano!

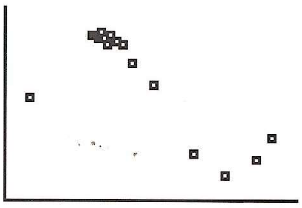


Figura 5.

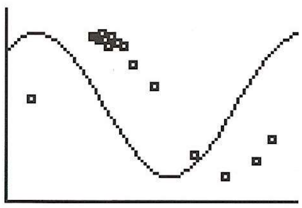


Figura 6.

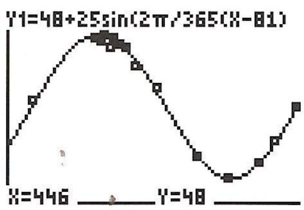


Figura 7.

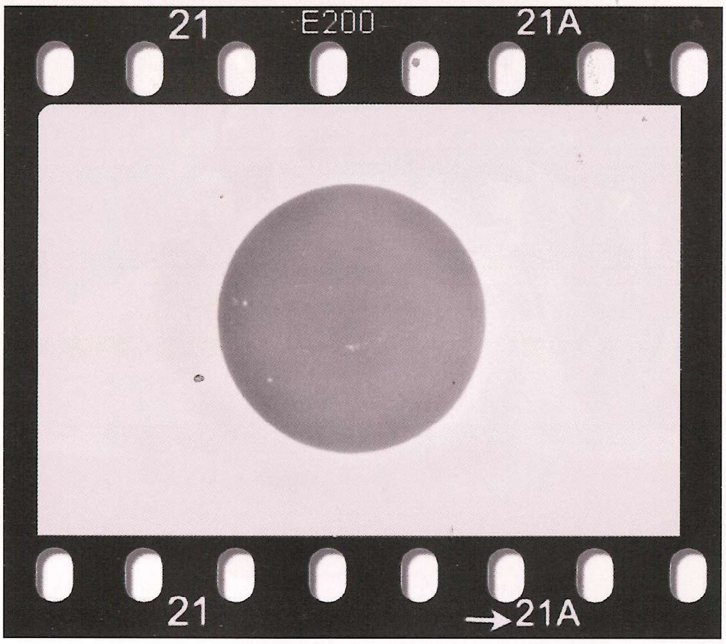


Figura 8.

Que previsão dará para uma data futura? Experimentemos com uma já conhecida da actividade anterior: o equinócio da primavera seguinte (21 de Março de 2000).

Como o ano 2000 foi bissexto, tem-se $t = 446$. O correspondente valor da função da função é $f(446) = 48$.

Ora 48,3 foi o valor obtido pelos alunos nessa data, como já foi mostrado antes (em I).

Temos, pois, uma experiência de modelação de uma situação do real, que não se socorre de dados fictícios, mas obtidos por alunos de uma escola em Portugal, e que descreve com um grau de apreciável rigor um fenómeno que todos comprovamos no dia a dia. É, por isso, uma experiência de modelação que aprecio particularmente.

III — O diâmetro do Sol

Nesta actividade tem-se a pretensão, algo ambiciosa à primeira vista, de estimar o diâmetro do Sol, a partir do negativo fotográfico deste astro. É o poder da matemática! — dizemos aos alunos quando se interrogam, admirados.

A actividade inicia-se com uma sessão do clube no exterior para obter uma foto do Sol, com uma máquina fotográfica acoplada devidamente à ocular de um telescópio.

Noutra sessão, já de posse do negativo (a figura 8 é a foto de um negativo, e foi tirada na escola) regressa-se ao gabinete do clube para fazer os cálculos. Cada aluno começa por estimar, usando uma régua graduada, a medida do comprimento do diâmetro do círculo no negativo. Depois os dados são analisados em conjunto para se decidir que valor vai ser escolhido. Neste momento pode-se pôr em discussão se é preferível usar a mediana, a média ou até a moda do conjunto de dados, relembrando em que condições é vantajosa cada uma das medidas de localização.

A partir da semelhança dos triângulos da figura 9 tem-se, então:

$$\frac{D}{d} = \frac{1U.A.}{f},$$

sendo:

f — a distância focal do telescópio.[6]

d — o diâmetro do círculo que representa o Sol no negativo.

D — O diâmetro do sol

$U.A.$ — uma unidade astronómica que corresponde à distancia da Terra ao Sol

Os seus valores são:

$$f = 2032 \text{ mm}$$
$$1U.A. \approx 1,5 \times 10^8 \text{ Km}$$
$$d = 19 \text{ mm}$$

e então tem-se:

$$\frac{D}{19 \text{ mm}} = \frac{1,5 \times 10^{14} \text{ mm}}{2032 \text{ mm}}$$

$D \approx 1,403 \times 10^6$ km i.e. cerca de 1 milhão e quatrocentos mil quilómetros.

O erro relativo face ao valor aceite actualmente é de apenas 0,8 %!

A partir daqui podem fazer-se outras explorações elementares como as seguintes:

i) Comparando o diâmetro do Sol com o da Terra:

$$\frac{D_{sol}}{D_{terra}} = \frac{1,4 \cdot 10^6 \text{ km}}{12756 \text{ km}} \approx 109,7$$

Isto é, o diâmetro do Sol é cerca de 110 vezes o da Terra.

ii) E qual é a razão dos volumes de um e outro astro?

Recorrendo à relação de semelhança entre dois sólidos semelhantes, sendo razoável admitir que ambos são esferas: $V_S/V_T = 109,7^3 = 1320139$, isto é, o Sol contém o volume de mais de 1 milhão e 300 mil planetas como a Terra!

iii) Comparando o diâmetro do Sol com a distância da Terra à Lua (D_{T-L}):

$$\frac{D_{Sol}}{D_{T-L}} = \frac{1,4 \cdot 10^6 \text{ km}}{384400 \text{ km}} \approx 3,6$$

Este resultado não deixa de causar espanto: o diâmetro do Sol é mais do triplo da distância da Terra à Lua!

As questões matemáticas exploradas nesta última actividade envolvem apenas o conhecimento das propriedades de semelhança de triângulos, a resolução de uma equação muito simples e a conversão de unidades que é facilitada com conhecimentos das regras operatórias das potências, sendo por isso adequada a alunos do 3° ciclo. Contudo, há alunos, mesmo de anos mais adiantados, que apresentam dificuldades em chegar ao resultado final. Parece haver necessidade de as aulas de matemática incluírem mais exemplos de situações realísticas em vez de tantos exemplos *muito arranjados* com valores e soluções inteiras ou escritas na forma *exacta*.

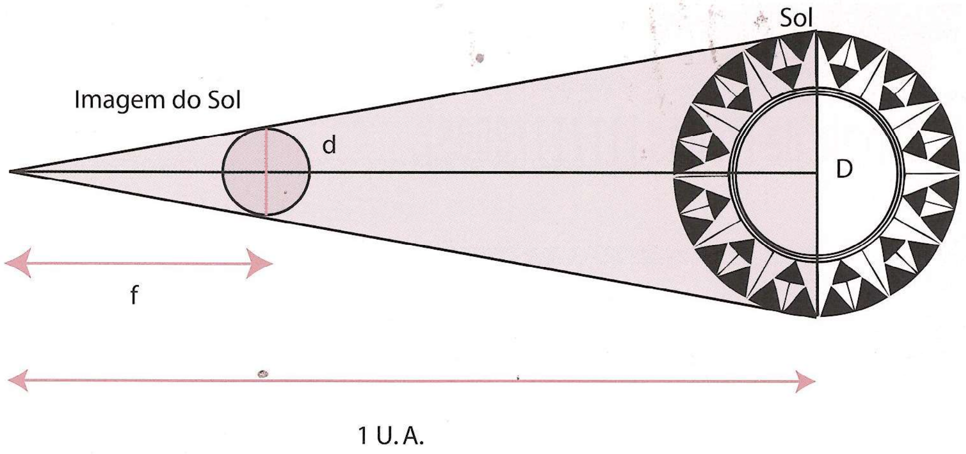


Figura 9.

Conclusão

São diversos os conhecimentos da disciplina de matemática requeridos nas experiências feitas em astronomia ao nível do ensino básico e secundário e várias as competências mobilizadas.

Outras experiências foram realizadas, mas só nestas já podemos identificar os seguintes conteúdos:

— Trigonometria:

- razões trigonométricas (9° ano) — Actividade I
- funções trigonométricas e modelação (11° ano/12° ano) — Actividade II

— Estatística: (7° ano / 10° ano) — Actividade I e III

— Semelhanças: (8° ano / 10° ano) — Actividade III

— Números e Cálculo (7°/8°/9°) — Actividade III

Os alunos têm também a oportunidade de viver experiências de aprendizagens significativas, que favorecem a aquisição de competências diversas e o domínio destes conhecimentos, ao lidar com situações da realidade. A par do desenvolvimento do seu sentido crítico, da autonomia e do trabalho em equipa, o qual como se viu nos exemplos apresentados está quase sempre presente.

Muitos outros aspectos relevantes da educação matemática (entre os quais a perspectiva histórica e cultural, e a interacção com outras áreas das ciências) poderiam ser referidos neste tipo de actividade extracurricular. Mas espera-se que este artigo já tenha evidenciado os suficientes para mostrar como por intermédio de meios singelos e ao alcance de todos (como os da actividade I e II, pelo menos) se podem proporcionam experiências educativas que vão de encontro a várias das finalidades do ensino da matemática e seguramente àquela expressa logo em primeiro no programa oficial da disciplina:

" Desenvolver a capacidade de usar a matemática como instrumento de interpretação e intervenção do real".

Notas

1 Todas as fotos deste artigo foram tiradas no clube. A fotografia astronómica é orientada no clube pelo colega Carlos Rodrigues.

2 Esses materiais ainda se encontram disponíveis no sitio `http://www.cienciaviva.mct.pt/equinocio/`

3 Supomos que o astro tem declinação inferior à latitude, como é o caso do Sol.

4 Em trigonometria esférica a declinação — δ está relacionada com a longitude do sol — λ (O lugar do Sol na eclíptica é a sua longitude celeste) pela fórmula:

$$\text{sen}\ \delta = \text{sen}\ \lambda \cdot \text{sen}\ \varepsilon$$

em que $\varepsilon = 23°33'$ é a inclinação da eclíptica sobre o equador terrestre.

5 Disponível no kit fornecido pelo programa Ciência Viva para a iniciativa *Determinação da Latitude e Longitude*, já referido em nota anterior.

6 Esta distância focal do telescópio é um parâmetro do instrumento. No caso, foi usado o telescópio catadióptrico Celestron C8.

Referências

Bakulin, Pavel (1983). *Curso de Astronomia*. Moscovo. Editora MIR.

Barbedo, J *et al*. (1999). *Infinito 12*. Areal Editores.

Ferreira, M., Almeida, G. (1993). *Introdução à Astronomia e às Observações Astronómicas*. Lisboa. Plátano Edições Técnicas.

Veloso, E. (1991). *Algumas Noções Elementares de Astronomia*. Lisboa. APM.

Manuel G. Teles Lagido

Escola Secundária/3 José Régio de Vila do Conde