3ª Resolução

O Vanderlei resolveu o problema de trás para a frente: seja x o número de testes corrigidos no último dia ($x < 24$).

Se na 5ª feira corrigiu um quinto dos que tinha ainda para ver, então tinha nesse dia $(5/4)x$, pois $4/5 \times (5/4)x = x$.

Se na 4ª feira corrigiu um quarto dos que tinha ainda para ver, então tinha nesse dia $(5/3)x$, pois $3/4 \times (5/3)x = (5/4)x$.

Se na 3ª feira corrigiu um terço dos que tinha ainda para ver, então tinha nesse dia $(5/2)x$, pois $2/3 \times (5/2)x = (5/3)x$.

Se na 2ª feira corrigiu metade dos testes, então tinha nesse dia $5x$, pois $1/2 \times 5x = (5/2)x$.

Como x, é divisível por $2, 3$ e 4, então $x = 2 \times 3 \times 2$, não admitindo mais nenhum factor pois $x < 24$.

Logo o Pedrosa tinha $5x$ testes, ou seja 60 testes.

Comentários

"Um professor que junta tantos testes para corrigir e fá-lo com tão pouca vontade, não avaliará bem os seus discentes" (Pedrosa Santos).

"O Pedrosa utilizou o método de correcção teste a teste em detrimento da opção pergunta a pergunta" (Francisco Estorninho).

"Não eram assim tantos testes, Pedrosa!" (Helena Cunha).

"Conclusão: Se o Pedrosa tem horário completo, ou já tem redução lectiva ao abrigo do artigo 79° do ECD e portanto tem só 3 turmas no máximo ou então ainda vai ter mais testes para ver quando os der às outras turmas" (Ana Luísa Correia).

O problema do ProfMat 2005

José Paulo Viana

O concurso apresentado aos participantes no ProfMat 2005 de Évora consistiu na resolução do problema *Um terreno para cinco irmãos* (figura 1):

Cinco irmãos receberam por herança um terreno de forma triangular ladeado por duas estradas. Os lados encostados às estradas medem 200 e 400 metros e o terceiro lado mede 510.

Querem dividi-lo em cinco parcelas com a mesma área e com iguais comprimentos nos lados junto às estradas.

Infelizmente, o único instrumento de que dispõem só lhes permite medir distâncias.

Como hão-de fazer a partilha?

Apareceram resoluções muito diversas. Em várias delas, engenhosas mas de difícil execução prática, a parte de cada irmão era constituída por várias parcelas separadas que somadas davam um quinto do terreno inicial. Noutras, feitas por processos semelhantes, a cada irmão correspondia um

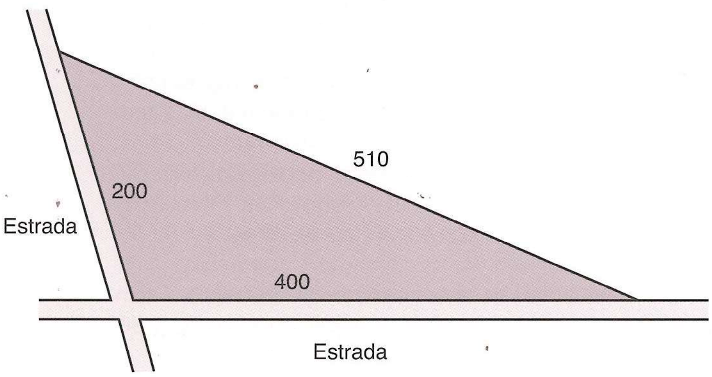

Figura 1

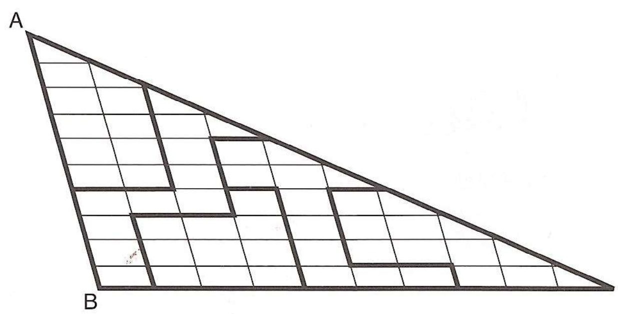

Figura 2

terreno com uma só parcela mas de forma irregular. Eis, por exemplo, a proposta do Luís Bernardino (figura 2).

Outra solução, fazendo com que irmão fique com iguais fronteiras em cada uma das estradas, foi apresentada pelo Avelino e pela equipa Daniel-Sandra (figura 3).

Note-se que, em qualquer dos casos anteriores, os irmãos iriam ter bastante trabalho para executar a partilha no campo.

Finalmente, nas resoluções mais elegantes, todos os irmãos vão ficar com um terreno de forma simples: quatro deles com um triângulo e outro com um quadrilátero.

Para isso, começa-se por dividir por 5 o comprimento total dos lados que dão para as estradas:

$$(200 + 400) \div 5 = 120.$$

Depois unem-se os pontos obtidos com um ponto P, situado no lado AC (figura 4).

Cada um vai ter no seu terreno 120 metros a dar para as estradas, com um deles a ter 40 metros numa estrada e 80 na outra. A questão é agora descobrir a posição do ponto P, de tal modo que os triângulos definidos tenham todos a mesma área. Como estes triângulos têm todos uma base de 120m, terão de ter a mesma altura (nota: unindo P com B, o quadrilátero decompõe-se em dois triângulos com a mesma altura e com as bases a somarem 120). Ou seja, a distância de P aos lados AB e BC têm de ser iguais. Conclusão: o ponto P pertence à bissectriz do ângulo ABC.

Teoricamente, a questão está resolvida. Mas como resolvê-la no terreno, dispondo apenas de um instrumento que só mede distâncias? (Celina Pereira)

Comecemos pelo método seguido pelo João Nogueira e pelo Francisco Martins. Demos a palavra a este último:

O primeiro irmão fica em B. O segundo e o terceiro colocam-se, cada um em seu lado junto à estrada, a igual distância do primeiro.

O quarto irmão, após medição da distância $I_2\ I_3$, fica a meio dessa distância, de tal forma que fiquem os três alinhados. Finalmente, o quinto deve ficar sobre o lado AC, alinhado com I_1 e I_3 (figura 5).

Várias outras resoluções foram à procura de uma solução mais simples no terreno: encontrar a posição em que terá de ficar P, de modo a que depois seja só marcar uma distância no lado AC.

O Sérgio Valente resolve o problema com ajuda da trigonometria e depois escreve:

O ponto P está a 340 metros de uma extremidade do lado maior e a 170 da outra. Mas 340 é o dobro de 170. Olá, isto não pode ser coincidência! Deve ter a ver com o facto de 400 ser o dobro de 200. (...) Depois de uma pequena investigação com o Cabri fiquei convencido da veracidade da minha conjectura e tentei demonstá-la.

Vários outros concorrentes apresentaram demonstrações da posição do ponto P sobre o segmento AC. Vamos mostrar as mais simples.

Daniel Castanho e Sandra Neves [adaptação]

Rodemos o segmento AB em torno de B até ficar colinear com CB (figura 6).

$$\angle AA'B = \angle A'AB \quad \text{(o triângulo } AA'B \text{ é isósceles).}$$

$$\angle AA'B + \angle A'AB = \angle ABP + \angle PBC = 2 \times \angle PBC.$$

Portanto $\angle AA'B = \angle PBC$.

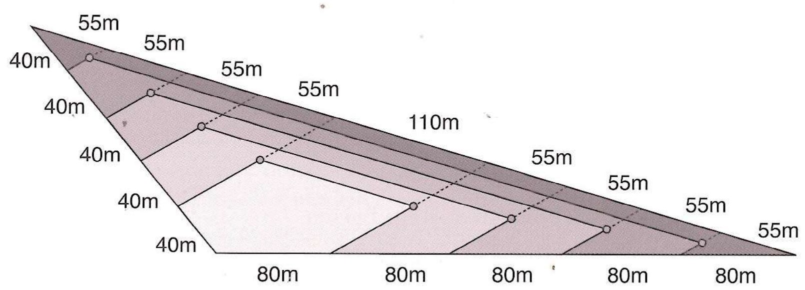

Figura 3

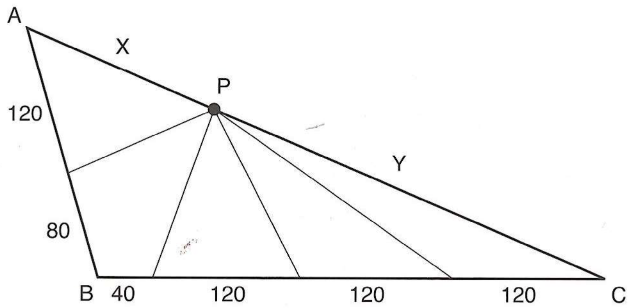

Figura 4

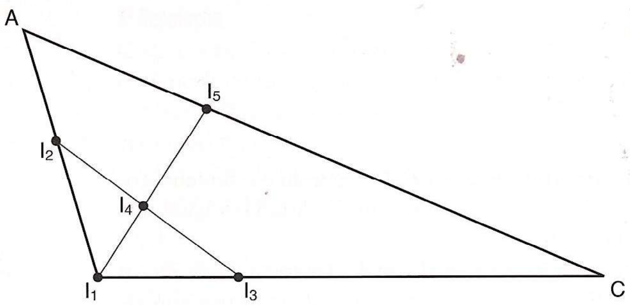

Figura 5

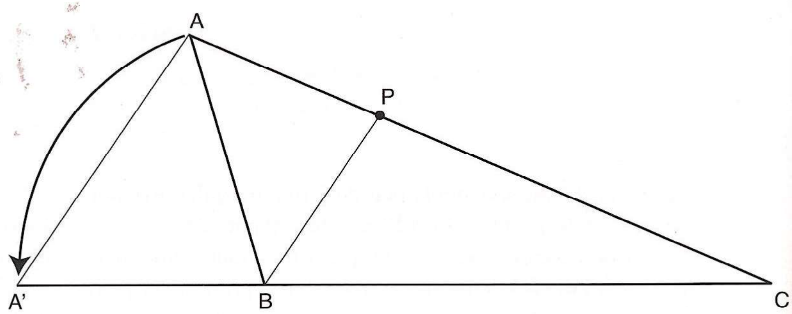

Figura 6

Então, os dois triângulos $[AA'C]$ e $[PBC]$ são semelhantes e os seus lados correspondentes são proporcionais.

Ora $\overline{BC} = 400m$ e $\overline{A'C} = 600m$, logo

$$\overline{BC} = \frac{2}{3}\overline{A'C}.$$

Portanto,

$$\overline{PC} = \frac{2}{3}\overline{AC} = 340m.$$

Rita Cadima (adaptação)

Sejam os triângulos ABP e CBP. Considerando as alturas a partir de P, ambos têm a mesma altura. A base do primeiro é 200 e a do segundo 400. Logo, o triângulo ABP tem metade da área do triângulo CBP.

Considerando agora as alturas a partir de B, novamente ambos têm a mesma altura. Portanto, a base do primeiro tem de ser metade da base do segundo. Ou seja, $\overline{PC} = 340m$ e $\overline{PA} = 170m$.

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira

Lista de participantes

Individuais: Ana Luisa Correia, António Bernardes, Augusto Taveira, Avelino Sousa, Carlos Próspero, Célia Gama Lobo, Celina Pereira, Eduardo Veloso, Fausto da Silva, Francisco Estorninho, Francisco Martins, João Manuel Nogueira, Luís Bernardino, Manuel Saraiva, Manuela Lazera, Manuela Ribeiro, Miguel Mata, Paula Félix, Rita Cadima, Sérgio Valente, Sofia Gonçalves.

Em equipa: Ana Mª Rodrigues e Lurdes Ferreira; Daniel Castanho e Sandra Neves; Iva e Nuno Angelino; Judite Barbedo e Isabel Moreira; Mª Esperança Nunes e Eduarda Pereira; Teresa Paula Marta.

Premiados e prémios

1º Daniel Castanho e Sandra Neves > *Calculadora Gráfica TI84 PSE + TI Smartview, oferta Texas Instruments*

2º Judite Barbedo e Isabel Moreira > *Dicionário de Matemática*, de Stella Baruk

3º Sérgio Valente > Jogo *Abalone*

4º Ana Luisa Correia > Livros *Antologia de Puzzles* de David Wells e $E=mc^2$ de David Bonadis

5º Paula Félix > Poliedros Areal + o livro *Uma Aventura Matemática na Internet* de Paulo Afonso

6º Rita Cadima > Livros *Matemática e mesas, cadeiras e canecas de cerveja* de Natália Bebiano

7º Francisco Estorninho > Livro *O mistério do Bilhete de Identidade e Outras Histórias* de Jorge Buescu

Atenção: Os prémios devem ser levantados até 30 de Julho de 2006. Por favor, contactar a sede da APM em Lisboa.