De novo o problema do pentágono . . .

E se fosse um hexágono?

Raimundo Leong

Meses atrás, houve uma aula livre de Geometria na Faculdade de Arquitectura da Universidade do Porto dada por Prof. Eduardo Veloso, cujo tema era o problema de determinação de um pentágono dados os cinco pontos médios dos seus lados. Esta questão do pentágono já tinha sido tratada num artigo publicado no nº 79 desta revista (*Cinco pontos, um problema e cinco soluções* de António Bernardes, Cristina Loureiro, Eduardo Veloso, Florinda Costa, José Paulo Viana, Maria Dedò e Rita Bastos). O Prof. Eduardo Veloso deixou como desafio a questão: "E se fosse um hexágono? E um heptágono?". Decidi então começar por abordar primeiro o problema do hexágono.

Entrámos em contacto várias vezes para falar sobre este problema. Numa primeira tentativa, usando uma resolução análoga da do pentágono *dividido* (usada por António Bernardes e Cristina Loureiro), cheguei à conclusão de que, diferente do pentágono, os pontos considerados pontos médios de um hexágono não podem ser escolhidos aleatoriamente. Sobre as condições de escolha desses seis pontos, inicialmente vi-as desta maneira:

1. Consideramos o hexágono da solução [PQRSTU] e o hexágono formado pelos pontos médios dos seus lados [ABCDEF] (figura 1). Vamos separar o hexágono [PQRSTU] em dois quadriláteros: [PQTU] e [QRST]. Os quadriláteros formados pelos seus pontos médios são, portanto, paralelogramos. Neste caso: [AMEF] e [BCDM], tendo em comum o ponto M. Portanto, escolhendo ao acaso 6 pontos, para que sejam pontos médios de um hexágono, têm de formar dois paralelogramos com um ponto comum (ponto M).

Suponhamos então que são dados seis pontos que verificam essa condição dos dois paralelogramos terem em comum o ponto M. Para qualquer segmento [QT] cujo ponto médio é M podemos construir os dois quadriláteros [PQTU] e [QRST]. Como [QT] pode ocupar uma infinidade de posições, podemos concluir que existem infinitas soluções.

Analisei também as condições vectorialmente.

2. Considerando os mesmos hexágonos de 1. e os triângulos [PQR], [RST] e [TUP] (figura 2). A, B, C, D, E, F são pontos médios de dois dos lados de cada um desses triângulos, como indica na figura. Então o comprimento do segmento PR é o dobro de AB e esses dois segmentos são paralelos entre si. Verifica-se o mesmo entre [RT] e [CD], como entre [TP] e [EF]. Como a soma dos vectores PR, RT e TP é nula, então a soma dos vectores AB, CD e EF também é nula. E isto também se verifica nos segmentos [BC], [DE] e [FA]. Como não tem nenhuma condição para a posição do triângulo [PRT] ou [QSU], podem ocupar infinitas posições, portanto, há infinitas soluções.

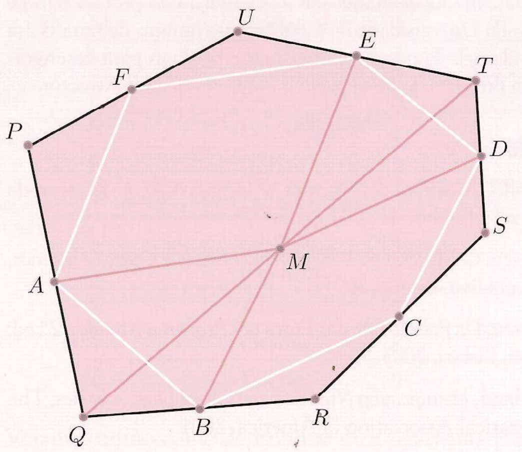

Figura 1.

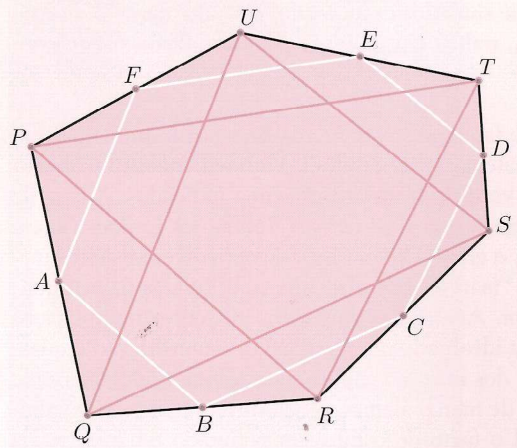

Figura 2.

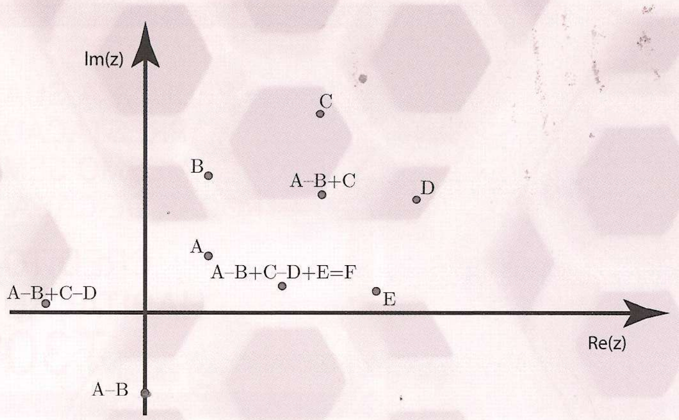

Figura 3.

A resolução seguinte é análoga à do "poder geométrico dos números complexos" na resolução no caso do pentágono.

3. Nesse ponto de vista:

$A = (P+Q)/2$ $\quad$ $B = (Q+R)/2$
$C = (R+S)/2$ $\quad$ $D = (S+T)/2$
$E = (T+U)/2$ $\quad$ $F = (U+P)/2$

Resolvendo A–B+C–D+E–F, o resultado é 0. Esta é a condição necessária para que haja solução. Consequentemente, os seis pontos não podem ser escolhidos arbitrariamente: a posição de um dos pontos depende dos outros cinco. Por exemplo: F=A–B+C–D+E (figura 3). Depois de ter determinado os seis pontos, para qualquer ponto P, determina-se Q à custa de P, R à custa de Q, e assim sucessivamente. Deste modo constrói-se uma solução. Mas como não há condição para a posição de P, existem infinitas soluções.

Isto tudo seria justificado com "o poder das transformações geométricas", usado por Maria Dedò na resolução do pentágono.

4. Consideremos as seis meias-voltas cujo centro são os pontos médios dos lados. Verifica-se que estas transformam P em si mesmo (figura 4.1). Então, P é um ponto fixo destas seis meias-voltas ou, portanto, das três translações compostas por estas: t_1, t_2 e t_3 (figura 4.2). O produto de três translações é uma translação. Como uma translação cujo vector tem módulo diferente de zero não tem ponto fixo, para que haja solução, o produto das três translações tem de ser igual a zero.

Então, dados seis pontos A, B, C, D, E e F que satisfaçam a condição referida acima, para qualquer P, é possível construir os outros cinco vértices do hexágono. Conclui-se então que existe uma infinidade de soluções.

Depois de ter resolvido o problema do hexágono, fiz várias experiências com os outros polígonos usando resoluções análogas. Verifiquei que as propriedades da inexistência de condições para os pontos médios e a existência de uma única solução na situação do pentágono aplicam-se a todos os polígonos com um número ímpar de lados. Analogamente, as do hexágono aplicam-se, do mesmo modo, a todos os polígonos com um número par de lados.

Raimundo Leong
Estudante de Matemática da FCUP

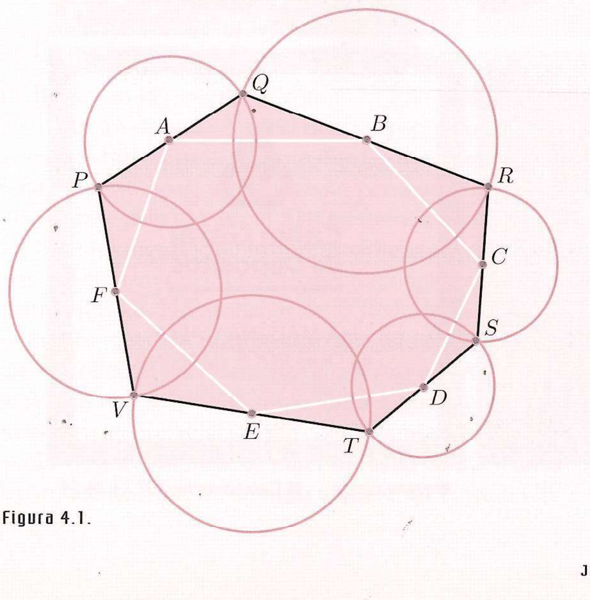

Figura 4.1.

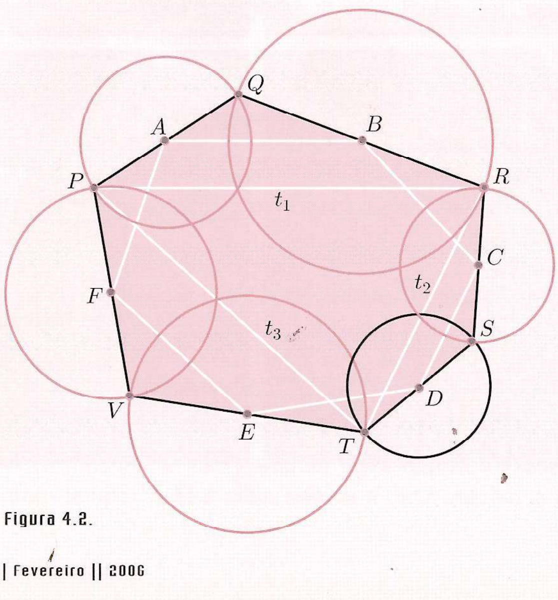

Figura 4.2.