A aprendizagem da demonstração matemática no 8º ano no contexto de utilização do Geometer's Sketchpad

Sílvia Machado

Introdução

O ensino e aprendizagem da demonstração matemática têm-se realizado de formas diversas, dependendo de factores temporais e locais: umas mais teóricas, outras mais práticas; umas partindo de teoremas apresentados pelo professor, outras partindo de conjecturas formuladas pelos alunos. Actualmente, a educação matemática dispõe de novas ferramentas, nomeadamente do computador e de *software* específico para a aprendizagem da matemática, que penso poderem trazer benefícios ao ensino e à aprendizagem da demonstração envolvendo a formulação e teste de conjecturas. Foi neste âmbito e a propósito da realização da minha tese de Mestrado (Machado, 2005) que procurei compreender de que forma os alunos do 8° ano de escolaridade desenvolvem a capacidade de demonstração matemática num contexto de utilização do *software Geometer's Sketchpad* (GSP). Neste estudo, eu era também a professora da turma participante e é nessa qualidade que vou apresentar algum do trabalho desenvolvido pelos alunos com uma das tarefas. Porém apresentarei uma breve descrição do contexto em que este trabalho se inseriu e tecerei algumas considerações teóricas que considero importantes para compreender os resultados apresentados.

Demonstrar na aula de Matemática: porquê, para quê e como

Nas orientações curriculares portuguesas é possível identificar a importância atribuída à demonstração. Com efeito, o Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001) apresenta como uma das suas duas principais finalidades, "proporcionar aos alunos um contacto com as ideias e métodos fundamentais da matemática que lhes permita apreciar o seu valor e a sua natureza" (p. 58). Mais à frente este documento descreve algumas particularidades que distinguem as ideias e métodos da matemática dos utilizados pelas outras ciências:

a matemática distingue-se de todas as outras ciências, em especial no modo como encara a generalização e a *demonstração e como combina o trabalho experimental com os raciocínios indutivo e dedutivo*, oferecendo um contributo único como meio de pensar, de aceder ao conhecimento e de comunicar. (p. 59, itálico acrescentado)

Assim, parece indispensável que os alunos demonstrem para que, como refere o Currículo Nacional, contactem com um dos "métodos fundamentais da matemática" e possam apreciar a "natureza" desta ciência, ideia também sublinhada por Veloso (1998). Este autor apresenta duas razões para a demonstração matemática estar presente na sala de aula: (a) aprender a raciocinar e (b) compreender a natureza da matemática, considerando esta a mais importante. De facto, Veloso (1998) reconhece que trabalhar a demonstração na aula de Matemática, quer no contexto de realização de investigações, quer analisando certas demonstrações nos últimos anos do ensino secundário, contribui para que os alunos aprendam a raciocinar, mas não é indispensável. Os alunos não precisam de fazer demonstrações na aula de Matemática para criar estruturas básicas de raciocínio e desenvolvê-las. No entanto, não conseguirão interiorizar, compreender e apreciar a natureza da matemática se a demonstração não estiver aí presente. Assim, Veloso (1998) considera que "os alunos devem chegar ao secundário com uma experiência já considerável de actividades de investigação em matemática, durante a qual tiveram numerosas ocasiões para argumentar e demonstrar, e reflectir com a ajuda do professor sobre essa experiência matemática" (p. 362).

Uma vez presente na aula de Matemática, que funções pode a demonstração desempenhar? Uma demonstração pode cumprir várias funções simultaneamente. Todas elas podem estar presentes na sala de aula, mas parece-me que as mais pertinentes são as funções de verificação/convencimento e explicação. No entanto, para alguns alunos, a demonstração também pode constituir um desafio intelectual e serve certamente para comunicar em matemática. Donde, serão analisadas estas quatro funções da demonstração — verificação/convencimento, explicação, desafio intelectual e comunicação — com mais pormenor, no contexto da sala de aula.

Tendo em conta o que Veloso (1998) refere como a principal razão para a demonstração estar presente na aula de Matemática — compreender a natureza da matemática —, os alunos têm que compreender a função da demonstração como processo de verificação[1], pois, esta é inerente ao próprio conceito de demonstração. No que diz respeito ao convencimento, ele pode ser entendido de duas formas distintas, conforme o sujeito que se tome: convencer-se a si próprio ou convencer os outros. Várias vezes, a demonstração é procurada quando já se está convencido. Nestes casos, a procura da demonstração não tem como fim o convencimento do próprio, mas sim o convencimento dos outros, com o objectivo de validar um resultado junto de uma comunidade.

Diversos autores referem, no contexto da educação matemática, que uma boa demonstração é aquela que além de convencer, clarifica porque é que uma relação funciona ou não, ou seja, estabelece a verdade do resultado e contribui para a sua compreensão (Boavida, 2001; De Villiers, 2002).

A existência de uma demonstração matemática pressupõe a sua comunicação a uma comunidade. No contexto da sala de aula é igualmente pertinente que os alunos comuniquem uns aos outros e ao professor as conjecturas que formulam, e que partilhem o seu processo de refutação ou demonstração. Yackel e Cobb (citados por Garnica, 1996) sugerem que as provas desenvolvidas na sala de aula devem "levar os alunos a compartilhar métodos de solução, respostas, pensamentos e caminhos por eles encontrados em exposições orais perante a sala" (p. 45).

O desafio intelectual pode ser um dos motivos pelo qual existem, em diversos casos, várias demonstrações para um mesmo teorema. Esse desafio pode estar relacionado com as outras funções da demonstração, por exemplo o desafio para compreender ou para verificar (no caso de ainda não existir uma demonstração), ou simplesmente o desafio de encontrar uma demonstração mais bela. De Villiers (2002) compara o desafio que a demonstração constitui para os matemáticos com o desafio que os puzzles ou outro tipo de esforços constituem para outras pessoas. Para os alunos, dependendo da forma como possa surgir junto destes e das características pessoais de cada um, a demonstração também pode constituir um desafio.

Penso que a demonstração deve aparecer aos alunos como algo que, independentemente do maior ou menor formalismo que apresente, se expressa através de um *raciocínio lógico* que mostra a verdade ou falsidade de uma determinada conjectura e é aceite por todos os membros da comunidade sala de aula. A forma como Boavida (2001) descreve uma demonstração realizada por um grupo de alunos ilustra o significado que atribuo a raciocínio lógico:

apresentaram argumentos, matematicamente válidos, para cada uma das afirmações que enunciaram, usaram factos conhecidos e anteriormente aceites como verdadeiros para bases das suas justificações (...), encadearam os argumentos uns nos outros de tal modo que uma ideia fluía da anterior sem deixarem "pontas soltas" ou contradições e deduziram, logicamente, uma conclusão. (p. 13)

Não há dúvida que toda a demonstração matemática envolve raciocínio matemático, no entanto, levantam-se algumas questões: poder-se-á afirmar que a presença da demonstração matemática na sala de aula permite aos alunos "contactar, a um nível apropriado, com as ideias e os métodos fundamentais da matemática e apreciar o seu valor e a sua natureza"? (DEB, 2001, p. 57); a sua presença na sala de aula desenvolve a predisposição dos alunos para raciocinar matematicamente e a sua concepção de que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação lógica, e não com alguma autoridade exterior? Contribui, por exemplo, para a compreensão da noção de conjectura? Aspectos estes que fazem parte das competências a desenvolver pelos alunos ao longo do ensino básico (DEB, 2001). Não me parece que se os alunos se limitarem a seguir ou a repetir as demonstrações realizadas pelo professor depois da apresentação de um teorema desenvolvam a predisposição para raciocinar matematicamente. Além disso, dá uma visão redutora do que é a matemática, não sendo possibilitado ao aluno vislumbrar e muito menos apreciar algumas das ideias e métodos fundamentais da matemática. Efectivamente, de acordo com Sebastião e Silva (1977) "na investigação matemática, a *intuição* precede normalmente a *lógica*, isto é, começa-se por ter o *pressentimento* dos factos e só depois este pressentimento (ou intuição) é confirmado ou confirmado por *demonstração*" (p. 132). Uma das formas da demonstração surgir na aula de Matemática pode ser a partir de experiências de aprendizagem com o *GSP*. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) destacam as potencialidades deste tipo de *software* para a realização de investigações, em particular investigações geométricas, sobre relações que permanecem invariantes:

> O desenho, a manipulação e a construção no computador de objectos geométricos permitem a exploração de conjecturas e a investigação de relações que precedem o uso do raciocínio formal. Actualmente, ferramentas computacionais, designadas por ambientes geométricos dinâmicos (*Cabri Géomètre*, *Geometer's Sketchpad*,...) são geradoras de uma nova abordagem no ensino e aprendizagem da geometria. (p. 60)

Nas palavras de Parks (2003) também é perceptível o potencial do *GSP* para a formulação de conjecturas, surgindo a sua justificação como algo natural:

> O uso de *software* de geometria dinâmica encoraja-os [os alunos] a estruturar o pensamento matemático e a descobrir padrões através de exemplos. Isto leva-os a fazer conjecturas sobre os resultados e podem, em seguida, prosseguir na descoberta das justificações matemáticas que estão por trás desses resultados. (p. 119)

A realização das tarefas: episódios de sala de aula

No âmbito do estudo que realizei, trabalhei com os meus alunos quatro tarefas, pela ordem apresentada a seguir: *Uma ilha nos mares do sul*[2], *Propriedades dos paralelogramos*, *Quadriláteros, pontos médios e vértices* e *O quadrilátero de Varignon*. Escolhi a tarefa *Uma ilha nos mares do sul* porque a solução do problema aí apresentado é, à primeira vista, surpreendente. Este facto poderia despertar a curiosidade dos alunos para o porquê da solução encontrada com o *GSP*, motivando-os desta forma para a procura de uma demonstração com o objectivo de perceber o porquê das suas observações. Com a tarefa *Propriedades dos paralelogramos*, que tem uma formulação aberta, eu previa que os alunos formulassem várias conjecturas que posteriormente poderiam ser organizadas de forma a que vissem uma pequena organização local da matemática, e assim percebessem que ao demonstrarem um resultado podiam, imediatamente, usá-lo para demonstrar outro. A escolha da última tarefa deveu-se a permitir a formulação de um elevado número de conjecturas, seu teste e demonstração. Além disso, poderia permitir-me, de alguma forma, revisitar as conjecturas formuladas aquando da tarefa *Propriedades do paralelogramo*, pois o quadrilátero de *Varignon* é um paralelogramo.

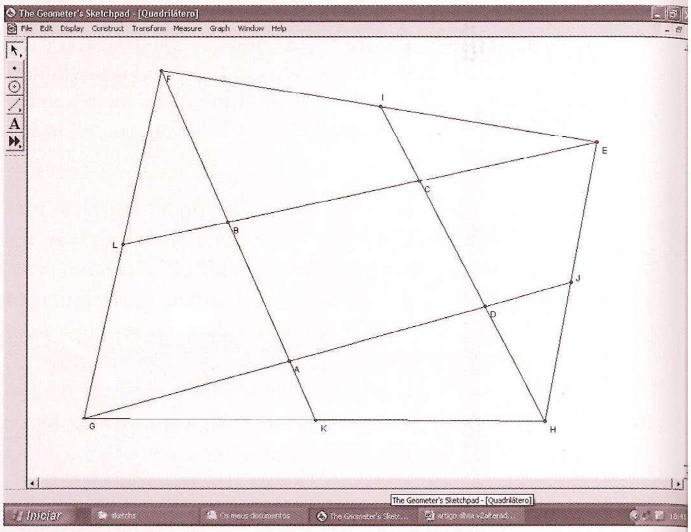


Figura 1.

A tarefa *Quadriláteros, pontos médios e vértices*[3] é uma tarefa com uma formulação mais fechada, quando comparada com as outras, uma vez que era explicitada claramente qual a relação a investigar. A razão que presidiu à escolha desta tarefa foi mostrar aos alunos que não se pode considerar como certa uma relação só porque é observada com o *GSP*. Além disso, pretendia clarificar alguns conceitos, nomeadamente o de conjectura e o de contra-exemplo. Pretendia que eles formulassem uma única conjectura[4] que se viria a revelar falsa. Considero também que esta tarefa só faz sentido quando inserida numa proposta pedagógica que inclua outras tarefas que envolvam a demonstração da veracidade de conjecturas formuladas pelos alunos. A tarefa realizou-se em duas aulas de 45 minutos cada.

Na primeira aula os alunos trabalharam aos pares com o *GSP*. Em qualquer um dos turnos[5], iniciei a aula com a entrega do enunciado da tarefa e informei os alunos que teriam de realizar um relatório individual. O *sketch* onde os alunos iriam trabalhar consistia num quadrilátero nas condições do enunciado da tarefa como ilustra a figura 1.

O nível de solicitação por parte dos alunos foi reduzido, contudo, eu circulava junto dos grupos numa tentativa de os orientar para o que era pedido na ficha, uma vez que pretendia discutir a tarefa toda nessa aula. Faria um ponto da situação na aula seguinte e tentaria demonstrar, com os alunos, algumas das conjecturas que haviam ficado por demonstrar na tarefa *Propriedades do paralelogramo*. A conjectura que se esperava que os alunos formulassem resistiria aos vários testes que eles realizariam, quando o *GSP* apresentava os seus cálculos arredondados às décimas, mas falharia assim que as definições do programa fossem alteradas de modo a permitir a visualização de mais casas decimais. Durante o trabalho com o *GSP*, de uma maneira geral os alunos não se restringiram ao que foi pedido na tarefa, tendo realizado outras explorações, pelo que não cheguei a discutir a tarefa nesta aula. No final da aula imprimi para cada aluno o trabalho realizado. Na segunda aula, nenhum aluno foi ao quadro e eu assumi um protagonismo maior do que o habitual. Discutiu-se no grupo turma o trabalho realizado com o *GSP*. Apresento a seguir alguns episódios de sala de aula ocorridos durante a realização da tarefa e sua discussão, assim como algumas transcrições dos relatórios dos alunos, com particular destaque para a aula no *GSP*.

Episódios de formulação e teste de conjecturas

Observei a tendência por parte de alguns alunos para, à primeira observação, formular uma conjectura. A seguinte transcrição da aula ilustra esta situação, sendo perceptível que as alunas mudaram a definição do programa e obtiveram o mesmo resultado. Perante esta observação afirmam que dá o mesmo sem manipularem o quadrilátero:

Rute: Dá stôra.

Professora: Dá o mesmo?

Rute: Dá. Dá o mesmo porque aqui ...

Professora: Dá para esse que aí têm. E se experimentarem para mais quadriláteros, têm que ver. Quer dizer vocês fazem para um e ficam satisfeitas?

Rute: Não, não dá.

Na aula de discussão recordo esta situação para destacar como se formula uma conjectura:

Professora: (...) E quando nós formulamos uma conjectura, Rute, por exemplo, fazia algum sentido fazer o quociente entre a área do mais pequeno e a área do maior, dá 0,2. E tu de repente formulares a conjectura que vai dar sempre 0,2. Porquê? Até só fez um exemplo.

Rute: Tenho de verificar se dá para mais.

Professora: Pois no mínimo tenho de fazer mais alguns exemplos para formular a minha conjectura. Não é? Com um exemplo, quer dizer, aquilo é apenas um resultado. Dá 0,2. A partir do momento que eu vou experimentar para outros quadriláteros e mantém a relação é que eu começo a desconfiar que isto é válido e formulo a minha conjectura. Não é? Desconfio que é válido para todos naquelas condições. Perceberam? Não é só fazer apenas um quociente, isso é apenas um resultado. Estão a perceber como é que se formulam as conjecturas? Sim?

Porém a maioria dos alunos formulava as suas conjecturas após a realização de várias observações como é visível na resposta de um aluno à minha questão, que é elucidativa de que ele já percebeu que deve fazer mais do que uma experiência para formular uma conjectura:

Professora: Isso é uma conjectura?

Alberto: É uma conjectura, que a gente já experimentou com vários.

Também, o modo como a Tânia descreve no seu relatório o processo de formulação de conjecturas revela a forma como a maioria dos alunos o fazia:

À medida que fomos fazendo as experiências formulámos algumas conjecturas. Primeiro achámos as áreas do quadrilátero menor e maior, e fomos fazer a divisão da área do quadrilátero menor pela área do maior, tal como a professora nos pediu. Observámos que o resultado, arredondado às dezenas [sic] e mesmo mexendo qualquer ponto, era sempre igual. Com isto formulámos a primeira conjectura.

Surgiu uma conjectura que eu não havia formulado aquando da preparação desta aula, nada sabendo acerca da sua veracidade. O episódio seguinte mostra a situação em que a Sofia e a Beatriz formularam esta conjectura:

Beatriz: Stôra, nós somámos estas coisas todas e foi dar o quadrilátero.

Professora: E o que é que achas? É estranho? Ah, não o que é que aconteceu? Somaste o quê?

Beatriz: Os triângulos todos e deu-me a área do quadrilátero mais pequeno.

Professora: Ah, então regista. E se mexeres dá à mesma?

Beatriz: Dá.

Professora: Ah ... Está a dar.

Beatriz: Muda o quadrilátero pequeno e os triângulos.

Professora: Registem. É uma conjectura.

Certifiquei-me que as alunas já haviam manipulado a figura e observei-as a movimentarem o quadrilátero, confirmando a relação que já me tinham comunicado. As alunas observaram que as áreas dos triângulos e a do quadrilátero mudavam, mas a soma das áreas dos triângulos mantinha-se igual à área do quadrilátero pequeno. Ou seja, as alunas observaram algo invariante. No seu relatório a Sofia refere ter testado esta conjectura após ter alterado a definição do programa: "Pudemos também verificar com mais precisão a conjectura b), que mesmo com 5 décimas [sic] à direita da vírgula o resultado não se alterou; é claro que só experimentámos isto para várias situações".

Episódios de satisfação e persistência na formulação de conjecturas

Todos os alunos manifestavam satisfação pela formulação de conjecturas. No seguinte extracto da aula e do relatório, tal é evidente:

Lara: Dá cá, Cátia, Cátia!

Cátia: Estou a experimentar ...

Lara: Esta área é igual a esta.

Cátia: Agora faz esta mais esta.

Lara: É o que estou a fazer. Eh, Eh conseguimos.

Cátia: Experimenta agora a ver se dá para todos.

Lara: Conseguimos!!

"Ficámos contentes com esta descoberta. Deu-nos ânimo para continuarmos a procurar novas conjecturas" (Relatório da Lara).

A reacção de outro aluno, o Alberto, à observação dos valores das medições efectuadas com mais casas decimais também mostra que este não fica satisfeito por rejeitar conjecturas: "Afinal isto agora vai mudar tudo o que a gente tinha pensado. Stôra só está a complicar tudo". E ao meu pedido de reacções sobre o que estavam a observar o Alberto respondeu: "Stôra, é duro". Este aluno continua avidamente a tentar formular conjecturas e no final comunica-me uma conjectura.

Episódios relativos ao porquê e para quê demonstrar

Durante o trabalho no *GSP*, algumas alunas observaram a relação, que lhes era pedido que investigassem, para vários quadriláteros e manifestaram-se insatisfeitas por não perceberem por que é que esta se verificava, o que levava a que sentissem necessidade da demonstração:

Professora: Então e aquela que eu vos pedi em concreto, na ficha. Para dividir o menor pelo maior? E o que é que se passa em relação a essa relação?

Ilda: Dá sempre 0,2.

Professora: Dá sempre. Já experimentaram para vários?

(As alunas estão a mover o quadrilátero)

Professora: O que é que se passa?

Ilda: Fica sempre na mesma.

Professora: Dá sempre 0,2. E isso leva-vos a formular alguma conjectura?

Rute: Está bem. Agora porquê é que a gente não sabe.

Esta era uma das funções que os alunos atribuíam às demonstrações: explicar por que é que uma dada relação se verificava. Porém os alunos também consideravam que uma demonstração servia para validar as suas conjecturas, como é visível no seguinte extracto de um relatório de uma aluna a propósito da conjectura inesperada e que não se conseguiu refutar:

Esta conjectura nós não conseguimos abandonar. Estivemos a experimentar mas a conjectura era sempre verdadeira. No dia 20/04/2004 dissemo-la à professora e esta disse-nos que ia averiguar. Reparámos também que não tínhamos sido o único grupo a formulá-la por isso é possível que seja verdadeira temos é que o demonstrar. (Cátia)

Esta tarefa parece ter contribuído para reduzir o número de alunos que consideravam que as experiências realizadas no *GSP* eram demonstrações. Por exemplo, uma aluna de outro grupo, a Sofia, que em relatórios anteriores afirmara ter demonstrado conjecturas no *GSP*, a propósito da mesma conjectura afirmou ter tentado demonstrar, mas não ter conseguido:

Tentámos demonstrar a conjectura b), mas não conseguimos, apesar de termos estado a reflectir durante bastante tempo sobre ela e não encontrámos explicação possível para a justificarmos, pois chegámos a essa conjectura através de vários cálculos para ver se achávamos algumas relações entre elas e somente achámos aquela.

Por exemplo a Sofia no seu relatório identificou apenas como demonstração a rejeição da conjectura, ou seja a demonstração da sua falsidade, afirma que esta serviu para termos espírito crítico: "As demonstrações que foram feitas serviram para nós aprendermos a ter espírito crítico e não aceitarmos aquilo que ainda não foi comprovado e não nos rendermos logo àquilo que parece evidente, antes de tentarmos demonstrá-lo".

Após os alunos terem respondido que, apesar de ficarem muito convencidos, não podiam afirmar que uma conjectura era verdadeira, mesmo que a tivessem verificado para muitos casos no *GSP*, alguns alunos afirmaram que só o podiam fazer para os casos que observavam. Eu chamo-lhes à atenção para que, mesmo nos casos que eles observam no *GSP*, não têm a garantia de que seja verdade. A última fala da aluna revela que esta tem consciência de que o facto de não conseguir encontrar um contra-exemplo não ser garantia de que este não exista:

Professora: Ah esperem. Há aqui duas coisas em causa. Não é? Uma delas é: nós acreditarmos que mesmo que para aqueles que nós estivemos a observar era verdade. Por exemplo esta conjectura era verdade para aqueles que nós estávamos a observar?

Alunos: Não.

Professora: Nem para aqueles que estávamos a observar. Quanto mais para todos. Não é. Estão a ver o que eu quero dizer? Quem é que me garante. Vocês estão-me a dizer que para aqueles todos que estavam a observar que era verdade. Quem é que me garante que se eu conseguisse pôr ainda mais uma casa decimal do que aquelas que o computador mostra que não mudaria nessa outra casa decimal a seguir?

Irina: Ou que noutro que a gente não experimentou fosse diferente?

O que a outra aluna, a Joana, refere no seu relatório, reafirma a ideia de que por mais que a evidência experimental confirme uma conjectura, a única forma desta poder ser considerada verdadeira é através da demonstração:

Com a realização deste trabalho consolidei que uma conjectura não se torna verdadeira sem uma demonstração, por mais que esta nos pareça verdadeira, ao verificarmos muitos casos possíveis *nas mesmas condições*. Podemos então dizer que nem tudo o que nos parece é mesmo verdadeiro, pois neste caso até mesmo os casos que verificámos, grande parte eram falsos. (Itálico acrescentado)

A Joana utiliza aqui pela primeira vez a expressão "nas mesmas condições" o que pode dever-se ao facto de, na aula de discussão desta tarefa, eu ter reforçado que um contra-exemplo tem de estar nas condições iniciais da conjectura.

Episódios de rejeição de conjecturas

Nesta tarefa não se demonstrou a veracidade de nenhuma conjectura, mas mostrou-se a falsidade de algumas, nomeadamente com recurso a contra-exemplos. Na seguinte transcrição apresento a forma como duas alunas rejeitaram a conjectura principal. Este foi o único grupo em que esta conjectura foi rejeitada sem ser necessário alterar as definições do *GSP*:

Iva: Este quociente mantém e este não.

Professora: Ah, e então?

Iva: Não sei o que aconteceu.

Professora: E pode acontecer um manter-se e o outro não se manter?

Iva: Não.

Bruna: Não pode. Se está a dividir este com este e este com este não. É a mesma divisão.

Professora: É a mesma divisão em sentido contrário.

Iva: Porque um está a dividir o menor pelo maior e o outro o maior pelo menor.

Professora: Pois se uma é constante a outra também devia ser, não era?

Iva: É.

Professora: Então o que é que isto vos leva a fazer?

Bruna: Então quer dizer que a conjectura é falsa.

Não expliquei a estas alunas como se mudava a definição do programa, pois elas foram fazer o quociente inverso e este alterava-se. Tal levou-as, em interacção comigo a constatarem que o outro quociente também tinha que se alterar e por isso rejeitaram a conjectura. A forma como foi rejeitada pelos restantes alunos esteve próximo do relatado pela Sofia, no seu relatório:

Rejeitámos a conjectura a) quando a professora foi ao nosso computador e foi ao Edit; Preferences e pôs Hundread Thusandth [sic] (portanto pôs o resultado com 5 décimas à direita da vírgula); com isso pudemos verificar que o resultado era mais preciso e não arredondava.

Porém, ainda não havia sido realçado em nenhuma aula as características a que deveria obedecer um contra-exemplo, até porque até aqui os contra-exemplos apresentados pelos alunos eram mesmo contra-exemplos. Contudo, nesta tarefa, dois alunos, o Telmo e o Lino, foram testar a sua conjectura medindo a área de um outro quadrilátero que tinham na figura. Aproveitei para reforçar a necessidade das condições em que as conjecturas são formuladas terem de ser as mesmas dos exemplos que as contrariam:

Telmo: Oh, stôra não. Quando a gente mexeu ficou 0,1.

Professora: Há um que não deu? Não, mas espera lá. Não, não, eu estou a dizer sempre o mais pequeno pelo maior. Que quadrilátero é este? Não é aquele. Não eu estou a dizer o mais pequeno pelo maior.

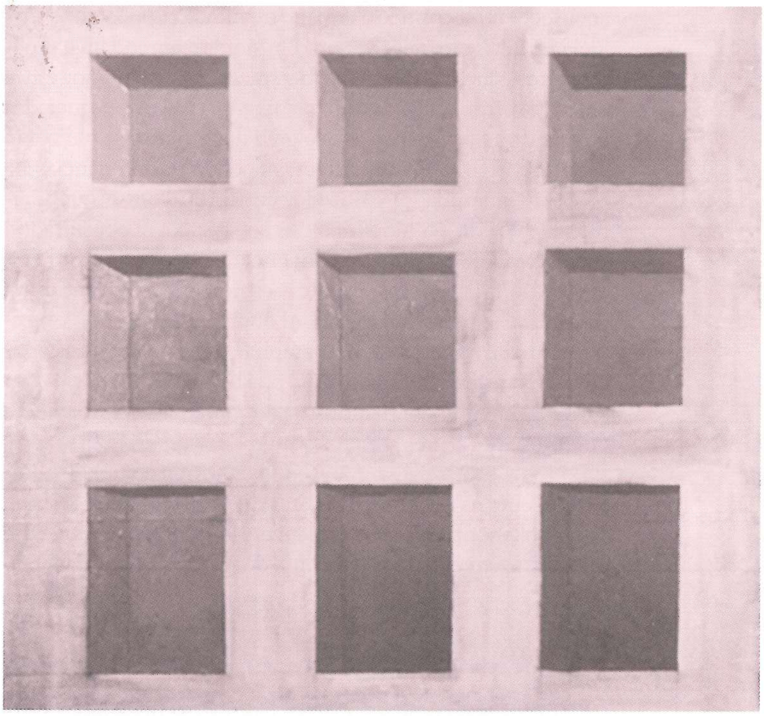
Telmo: Este aqui é o maior.

Professora: Não, isto é o mais pequeno pelo maior, dá 0,2. Isso aqui já são outros quadriláteros. Espera lá. Vamos lá conversar um bocadinho que é para vocês terem a percepção que quando arrastam um ponto vocês estão a ver ...

Alberto: Vários outros quadriláteros.

Professora: Outro quadrilátero, nas mesmas condições. À mesma com os pontos médios, porque eu construí assim. Mas é outro quadrilátero com outro lá no meio. Estão a perceber? Telmo, Lino. Não têm que ir medir mais nada. Está bem? Se forem medir outros quadriláteros, são outros, noutras condições. Percebem o que eu quero dizer? Estão a perceber o que eu quero dizer?

Aparentemente o Telmo percebeu a que tinham de obedecer os contra-exemplos, pois no seu relatório escreveu o seguinte:



Quando eu decidi medir [sic] a área $LCGA$ pelo quadrado maior $FGHE$, dava outro resultado, e aí eu pensei que tinha arranjado um contra exemplo. Falei com a prof. e ela disse-me que o que fiz não era válido, só era válido para os quadriláteros que estivessem na mesma perspectiva que os iniciais. Estive quase a rejeitar a conjectura mas vi que estava errado.

Depois, este aluno explica como foi realmente rejeitada a conjectura e conclui "Logo, esta é uma conjectura rejeitada por mim".

Considerações finais

A demonstração não pode ser vista como um fim, mas sim como um meio muito rico de aprendizagem. A sua presença na sala de aula deve contribuir para o desenvolvimento da capacidade de demonstração matemática, que entendo como algo mais abrangente do que a produção de demonstrações matemáticas. Falar da capacidade de demonstrar em matemática como a capacidade de, para um teorema, desenvolver um raciocínio lógico, partindo de premissas verdadeiras e usando resultados já provados para deduzir uma determinada conclusão é, no contexto do estudo que realizei, considerado limitado. Esta capacidade inclui também a compreensão do que é uma demonstração, dos conceitos de conjectura e teorema e não pode ser separada do processo de descoberta e de formulação de conjecturas. Foi desta forma que tentei introduzir a demonstração na sala de aula.

A demonstração matemática, mesmo para os alunos, deve fazer uso de raciocínios gerais que se devem socorrer de afirmações previamente aceites como verdadeiras — axiomas, definições, teoremas. Além disso, deve convencer a comunidade da sala de aula onde se insere e da qual fazem parte os alunos e o professor. Obviamente, que isto só pode acontecer num contexto em que os alunos expressem as suas ideias sem receio de as verem diminuídas, aprendam a ouvir os outros, questionem o conhecimento apresentado, entre outros aspectos que devem ser negociados e renegociados na sala de aula. Quanto ao seu grau de formalismo, tal como acontece com os matemáticos, depende das exigências da própria comunidade. Contudo, concordo com o que Garnica (1996) diz ser a opinião dos autores por si consultados: "uma prova deve explicar, convencer, permitir o reconhecimento do fazer em matemática, enriquecer nossa intuição, conquistar e permitir que sejam conquistados novos objectos e, final e sinteticamente, ampliar os horizontes dos conceitos e práticas matemáticos" (p. 41).

Considero que a demonstração matemática, tal como a entendo, está bem viva e continua a ter uma presença pertinente na sala de aula, não sendo de forma alguma incompatível com as novas ferramentas que existem actualmente, antes pelo contrário estas podem enriquecer experiências de aprendizagem em que se queira a demonstração presente.

Notas

1 É aqui utilizado este termo porque foi o utilizado pelos autores que listaram estas funções, contudo considero mais adequado o termo validação.

2 Adaptada de Veloso, E. & Viana, J. P. (1992). *Desafios 2*. Porto: Edições afrontamento.

3 Tarefa apresentada na secção *Materiais para a sala de aula*.

4 Para um quadrilátero nas condições da figura, o quociente entre a área do quadrilátero $[ABCD]$ e o quadrilátero $[GHEF]$ é 0,2.

5 A turma estava dividida ao meio 45 minutos por semana.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação. (Retirado de http://www.deb.min_edu.pt/curriculo/Reorganizacao_Curricular/reorgcurricular_publicacoes.asp, em 10/5/2001)

Boavida, A. (2001). Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. *Educação e Matemática*, 63, 11–15.

DEB (2001a). *Currículo Nacional do Ensino Básico — Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação. (Retirado de http://www.deb.min_edu.pt/curriculo/Reorganizacao_Curricular/reorgcurricular_publicacoes.asp, em 10/05/2002)

De Villiers, M. (2002). Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração no ensino em geometria dinâmica. *Actas do ProfMat 2002* (pp. 65–72). Lisboa: APM.

Garnica, A. V. (1996). Da literatura sobre a prova rigorosa em educação matemática: Um levantamento. *Quadrante*, 5(1), 29–60.

Machado, S. (2005). *A demonstração matemática no 8° ano no contexto de utilização do Geometer's Sketchpad* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Parks, J. M. (2003). Identificar transformações pelas suas órbitas. In E. Veloso e N. Candeias (Orgs.), *Geometria dinâmica, selecção de textos do livro Geometry Turned On!* (pp. 115-119). Lisboa: APM.

Sebastião e Silva, J. (1977). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (2° e 3° volumes). Lisboa: Edição Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Investigação Científica.

Veloso, E. (1998). *Geometria: temas actuais*. Lisboa: IIE.

Sílvia Machado
ESE de Setúbal

Materiais para a aula de Matemática

Esta tarefa foi realizada por alunos de uma turma do 8° ano no âmbito da tese de mestrado a que se refere o artigo anterior "A aprendizagem da demonstração matemática no 8° ano no contexto de utilização do *Geometer's Sketchpad*". Porém pensa-se que esta pode igualmente ser realizada em qualquer nível de ensino superior ao 8° ano. O principal objectivo desta tarefa foi mostrar aos alunos que o facto de verificarem, para muitos exemplos, uma determinada relação com o *GSP*, não significa que esta seja verdadeira. Para tal, pretendia-se que os alunos formulassem uma única conjectura que se viria a revelar falsa. Considera-se, também, que a presente tarefa só faz sentido quando integrada numa proposta pedagógica que inclua outras tarefas relativas à demonstração da veracidade de conjecturas formuladas pelos alunos.

Sílvia Machado
ESE de Setúbal