O que há de natural acerca dos números naturais?

António M. Fernandes

A noção de *número*, mesmo no caso aparentemente simples da de *número natural*, permaneceu insatisfatoriamente caracterizada até finais do século XIX. Foi apenas em 1889 que Giusepe Peano publicou *Arithmetices Principia nova metodo exposita*, um panfleto escrito em latim, contendo aquela que ficou conhecida através da designação de *axiomática de Dedekind-Peano dos números naturais*. O facto de entretanto terem decorrido mais de dois milénios de história da Matemática sem que tivesse surgido uma conceptualização satisfatória daquela noção revela que, ao contrário do que seria de supor os números, em particular os números naturais, não constituem um conceito que se imponha claramente ao espírito humano, isto tendo em mente um conceito *matematicamente útil*. Antes pelo contrário, o conceito de número foi sendo alvo de intenso debate matemático-filosófico, situando-se no cerne de algumas das mais importantes modificações metodológicas e ontológicas operadas no seio da Matemática.

A concepção clássica

Introduzindo o método axiomático, os Gregos marcaram o curso da Matemática. Eles desenvolveram especialmente a geometria em detrimento da aritmética e do conceito de número. Isto deveu-se, por um lado, ao facto de a geometria euclidiana ser uma teoria logicamente bem estruturada, da qual se extraíram inicialmente muitas (e importantes) consequências. Por outro, a uma concepção grega de *número* particularmente limitadora, não permitindo um tratamento abstracto desta noção impedindo, consequentemente, que a *aritmética* se pudesse desenvolver até um nível satisfatório. De acordo com Euclides (livro VII dos *Elementos*), um número é uma *multiplicidade de unidades*. Procedendo desta forma os gregos revelaram-se incapazes de dissociar a noção de número dos processos de contagem. As dificuldades filosóficas contudo, não se ficariam por aqui. A *unidade* vista como *causa* ou *origem* dos números não era considerada como um número, entrando em cena uma distinção metafísica entre a *causa* ou *origem* e a *coisa*.

Ainda assim, enquadrado por este cenário limitativo, os pitagórios atribuíram aos números um papel central na sua cosmologia, consubstanciada no *dictum* "tudo é número". Isto, até ao momento em que eles próprios se depararam com o fenómeno da *incomensurabilidade* (ver caixa 1) — não é possível encontrar um segmento do qual, ambos, a diagonal e o lado de um quadrado sejam múltiplos. Esta situação obviamente arruinou um póstulado central da doutrina pitagórica e, marginalmente revelou dificuldades então incontornáveis, envolvendo o conceito de número, que determinaram o curso da matemática grega que passou, como já se referiu, a desenvolver-se em torno da geometria euclidiana.

Muito provavelmente a única tentativa séria para enfrentar a questão da incomensurabilidade terá sido a que desenvolveu Eudoxo na sua *Teoria da Proporção* (descrita no Livro V dos *Elementos* de Euclides). Dados dois segmentos $[AB]$ e $[CD]$ existe entre eles uma determinada *proporção*. Modernamente, sendo $\alpha = \overline{AB}$ e $\beta = \overline{CD}$, essa proporção é descrita pelo número real α/β e, em certo sentido, esse número real é uma abstracção do par $([AB], [CD])$. A teoria da proporção de Eudoxo incide precisamente sobre estes pares e sobre as *proporções* que eles determinam. Recorrendo a uma construção muito imaginativa e engenhosa, Eudoxo conseguiu caracterizar em que circunstâncias essa proporção é maior ou menor num par que noutro, ou quando são iguais (ver caixa 2). No entanto, uma concepção de número assente em pressupostos e distinções marcadamente metafísicas, impunha uma forte distinção entre *objectos geométricos* e *números* que, uma vez caracterizados pela sua natureza intrínseca, tinham que se considerar distintos. Pela força desta distinção nunca esteve no horizonte de Eudoxo encarar estes pares como números. Se o tivesse feito estaria muito próximo de antecipar em mais de dois milénios a construção dos números reais, só obtida em moldes rigorosos por Richard Dedekind mesmo no final do século XIX.

Caixa 1

A incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado traduz-se em notação e linguagem moderna no facto de $\sqrt{2}$ não ser um número racional. A demonstração deste facto, aparentemente obtida por Pitágoras ou por algum membro da sua escola usa o método de redução ao absurdo. Suponhamos que existem números naturais m, n tais que $\sqrt{2} = m/n$. Uma vez que qualquer fracção pode ser escrita na sua forma irredutível (em que o máximo divisor comum entre o numerador e o denominador é 1), podemos supor sem perda de generalidade que $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$.

Ter-se-ia então que

$$2 = \frac{m^2}{n^2} (*)$$

donde se concluiria que $2n^2 = m^2$, ou seja, m^2 e portanto m são números pares. Então $m = 2r$ para certo r. Substituindo em (*) tem-se

$$2 = \frac{(2r)^2}{n^2} (**)$$

donde se conclui que $n^2 = 2r^2$, ou seja, n^2 e, consequentemente, n são pares.

Mas, então, $\mathrm{mdc}(m, n) \geq 2$ o que contradiz o facto de inicialmente termos suposto que $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$ e estabelece a contradição. Assim, $\sqrt{2}$ não pode ser um número racional.

Dedekind e a aritmetização da análise

A emergência da *análise*, impulsionada sobretudo pelos trabalhos de Newton e Leibniz, acabaria por expor as deficiências da geometria euclidiana enquanto sistema fundacional. Newton levou ao extremo os métodos geométricos mas, de facto, tanto estes como os próprios fundamentos do cálculo diferencial acabariam por ser alvo de importantes (e justas) críticas. A principal das quais incidia sobre a noção de *movimento*. Tal facto constituía, para muitos, a violação de um princípio de *prioridade lógica*, já que estabelecer uma teoria do movimento requer um prévio desenvolvimento da geometria (a teoria do espaço). Como consequência, o emprego de argumentos da teoria do movimento para demonstrar resultados geométricos era logicamente insustentável.

Esta ideia ganhou crescente importância e a aritmética, aparentemente livre deste tipo de *defeito*, foi ganhando preponderância como substracto fundamental. Dedekind, consciente da falta de rigor da análise e das virtudes da aritmética, iniciou um programa fundacional tendo em vista a fundamentação do cálculo em termos da noção básica de número natural. Na sequência desse programa, Dedekind acabaria por descrever os denominados *números reais* (o conceito basilar da análise moderna) a partir dos números naturais.

Evidentemente, Dedekind não podia proceder à *aritmetização da análise* utilizando a noção clássica de número. Ele romperia com a tradição clássica procedendo a uma caracterização estruturalista da noção de número. Para ele, o que caracteriza essencialmente essa noção, não é a sua *materialidade* mas a forma como a noção se adequa, enquanto abstracção, a uma enumeração arbitrária. Por outro lado, existe uma certa circularidade na definição clássica de número que é necessário evitar através de uma nova formulação. Essa circularidade pode ser observada através da análise dum caso particular: o número dois, por exemplo, obtém-se progredindo a partir de 0 ao longo de *duas* etapas (ou seja, o número é usado, de certo modo, na sua própria definição).

É a altura para trazer à cena um novo actor — a noção de *conjunto*. As considerações de Dedekind envolvem de modo mais ou menos directo este conceito que podemos considerar informalmente, adoptando a concepção de Georg Cantor, o fundador da *teoria de conjuntos*. Segundo ele,

> Por *conjunto* deve entender-se uma colecção, vista como um todo, de objectos bem definidos e distintos que são concebíveis através da nossa imaginação ou pensamento. Estes objectos são designados de *elementos* do conjunto, que por eles fica determinado.

Se um elemento x integra um conjunto X, escrevemos $x \in X$ e dizemos que x *pertence* a X. Se X e Y são conjuntos de tal modo que todo o elemento de Y é igualmente um elemento de X dizemos que Y é um *subconjunto* ou uma *parte* de X e escrevemos $Y \subseteq X$.

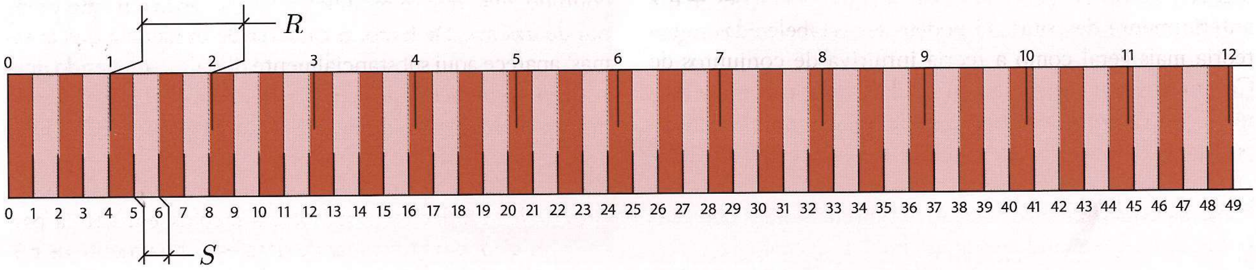
Cantor, que era contemporâneo de Dedekind, tomou a noção de conjunto (ao contrário da de número natural) como a noção mais fundamental da matemática. Não deixa de ser curioso, no entanto, que adoptou a postura clássica

Caixa 2

A teoria da proporção, atribuída a Eudoxo, surge descrita no Livro V dos *Elementos* de Euclides. Devido ao fenómeno da incomensurabilidade, a proporção entre certos segmentos de recta não pode ser descrita em termos dos números racionais. Eudoxo contornou o problema evitando responder à questão: qual é a proporção?, substituindo-a pela possibilidade de comparar proporções entre segmentos. De facto, ele concebeu um dispositivo que permitia aproximar essas proporções por um número racional, isto com precisão arbitrariamente grande. Se marcarmos duas semi-rectas paralelas (ver figura abaixo) e as dividirmos segundo os comprimentos de dois segmentos de comprimentos R e S, respectivamente, a respectiva proporção entre esses dois segmentos pode ser aproximada por um número racional com precisão arbitrariamente grande. Por exemplo, consultando a figura facilmente se constata que $12S \leq 3R \leq 13S$ pelo que a proporção entre os segmentos R/S verifica $12/3 \leq r/S \leq 13/3$. Se avançarmos na figura, podemos também constatar que se tem $48S \leq 12R \leq 49S$, pelo que se obtém uma nova aproximação $48/12 \leq R/S \leq 49/12$ esta última mais precisa uma vez que

$$\frac{49}{12} - \frac{48}{12} = \frac{1}{12} < \frac{13}{3} - \frac{12}{3} = \frac{1}{3}.$$

Usando estas aproximações racionais é agora possível, dados dois pares de segmentos $([AB], [CD])$ e $([EF], [GH])$, comparar as respectivas proporções, já que, sendo diferente essa proporção isso pode verificar-se, desde que se considerem aproximações racionais suficientemente finas.



relativa aos números, definindo a *materialidade* da noção de conjunto. Isso revelar-se-ia inconsistente via o *paradoxo de Russell* e seria remediado através de uma conceptualização estruturalista do conceito de conjunto. Mas, para já, podemos adoptar a noção informal de conjunto à Cantor.

Regressando a Dedekind e ao modo como evitou a circularidade da definição clássica de número, assim como todos os outros problemas conceptuais a ela inerentes, deve dizer-se que ele se centrou no processo de contar em si mesmo e não nas entidades que o podem descrever. Ele começa por introduzir a noção de *operação sucessor*. Dado um conjunto X, uma operação sucessor em X é simplesmente uma função $\sigma : X \to X$, satisfazendo as seguintes condições: (1) existe um elemento e em X, que se designa *elemento inicial* tal que para nenhum x em X se tem $\sigma(x) = e$ (o elemento e não é sucessor de nenhum elemento de X); (b) s é injectiva ou seja dados dois elementos $x \neq y$ de X, tem-se igualmente que $\sigma(x) \neq \sigma(y)$.

Um triplo (X, σ, e) em que $\sigma : X \to X$ é uma operação de sucessor diz-se um conjunto σ-indutivo. Um subconjunto $Y \subseteq X$ é σ-indutivo se $e \in Y$ e se para qualquer $y \in Y$ se tem $\sigma(y) \in Y$ (se Y tem um determinado elemento, tem igualmente o seu sucessor como elemento). Como Dedekind notou, o conjunto formado por todos os elementos de X que estão presentes em qualquer subconjunto de X que é σ-indutivo, é ainda σ-indutivo e, consequentemente, é o menor subconjunto σ-indutivo de X, que denotamos por $\mathbb{N}(X, \sigma, e)$. Os elementos de $\mathbb{N}(X, \sigma, e)$ são designados de números naturais.

Claro que se considerarmos um ponto de partida diferente, ou seja, um conjunto (X', σ', e') que é σ'-indutivo então, será de esperar que se tenha $\mathbb{N}(X, \sigma, e) \neq \mathbb{N}(X', \sigma', e')$ mas, como o próprio Dedekind constatou, as estruturas são essencialmente cópias uma da outra, pelo que a estrutura obtida por este procedimento é essencialmente única. Omitimos aqui os detalhes e o formalismo associados a esta observação, notando apenas que existe uma correspondência natural que permite identificar (estruturalmente) $e \in X$ e $e' \in X'$ com o número 0 (no sentido clássico do primeiro elemento de uma progressão), os elementos $\sigma(e)$ e $\sigma(e')$ com o número (clássico) 1, e assim sucessivamente ... .

Perante esta unicidade estrutural qualquer uma das estruturas $\mathbb{N}(X, \sigma, e)$ descritas acima é essencialmente uma sequência infinita do tipo

$$0, \quad \sigma(0) = 1, \quad \sigma(\sigma(0))) = \sigma(1) = 2, \quad \ldots.$$

que abreviadamente denotamos por $(\mathbb{N}, \sigma, 0)$.

Esta operação de sucessor é suficientemente poderosa para permitir definir as operações de adição e multiplicação dos números naturais. Ambas as operações podem ser definidas através das relações de recorrência seguintes:

$$+ : \begin{cases} m + 0 := m \\ m + \sigma(n) := \sigma(m + n) \end{cases}$$

$$\times : \begin{cases} m \times 0 := 0 \\ m \times \sigma(n) := (m \times n) + m \end{cases}$$

(Note-se que das relações acima se obtém imediatamente que $\sigma(n) = n + 1$.) A relação de ordem em $\mathbb{N}$ também se pode agora definir:

$$m \leq n \text{ se e só se existe um } k \text{ tal que } m + k = n.$$

Apesar de elegante, a solução de Dedekind apresenta um problema óbvio, de resto reconhecido pelo próprio Dedekind, a demonstração da existência da estrutura dos números naturais, bem como a existência das operações $+$ e $\times$ anteriormente descritas, só podem ser estabelecidas numa teoria mais geral como a teoria intuitiva de conjuntos de Cantor, arredando assim a possibilidade de considerar a aritmética como uma teoria basilar, pelo menos nos moldes propostos por Dedekind.

A proposta de Peano

Como já se mencionou, na parte inicial, em 1889, Giuseppe Peano publicou uma caracterização axiomática dos números naturais. Essa axiomática, agora conhecida como *axiomática de Dedekind Peano*, introduz os números naturais como sistema básico, usando o processo utilizado pelos gregos quando descreveram a geometria euclidiana.

Os axiomas são fortemente inspirados nas propriedades básicas dos números naturais de Dedekind, mas como a existência é postulada axiomaticamente, esta abordagem não enferma das deficiências da abordagem de Dedekind, por não requerer uma outra teoria subjacente. Tentativamente, os axiomas de Peano descrevem uma estrutura $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \times, 0, 1)$ onde $\mathbb{N}$ é um *universo* cujos elementos se designam números naturais, $+$ e $\times$ denotam duas operações binárias, ou seja, duas funções que fazem corresponder a cada par (m, n) de elementos de $\mathbb{N}$, elementos de $\mathbb{N}$ que se denotam por $m + n$ e $m \times n$ que são respectivamente a soma de m e n e o produto de m e n; finalmente 0, 1 são dois elementos fixos de $\mathbb{N}$. O sistema é governado pelos axiomas que são os seguintes:

A1 para qualquer $x \in \mathbb{N}$ temos $x + 1 \neq 0$;
A2 se $x + 1 = y + 1$ então necessariamente $x = y$;
A3 se $X \subseteq \mathbb{N}$, contém 0 e se, sempre que $x \in \mathbb{N}$ se tem igualmente que $x + 1 \in \mathbb{N}$ então $X = \mathbb{N}$;
A4 $x \leq y$ se e só se $y = x + k$ para certo $k \in \mathbb{N}$;
A5 $m + 0 = m$
$m + (n + 1) = (m + n) + 1$
$m \times 0 = 0$
$m \times (n + 1) = (m \times n) + m$

Note-se que os axiomas 1 e 2 descrevem a função que faz corresponder a cada x o número $x + 1$ como uma função sucessor. Deste ponto de vista, o axioma 5 introduz as operações básicas como no caso da formulação de Dedekind, usando as relações de recorrência. O axioma 4 descreve a relação de ordem e o axioma 3 descreve o denominado axioma de indução. Este último não é mais que uma descrição alternativa da condição de minimalidade de Dedekind. De facto, as hipóteses sobre X no axioma revelam que X é σ-indutivo, onde se considera $\sigma(x) = x + 1$. A conclusão revela que X não pode ser mais pequeno que o próprio $\mathbb{N}$, o que mostra que $\mathbb{N}$ é o menor conjunto σ-indutivo.

Em certo sentido a axiomática proposta por Peano tem em vista sobretudo o sistematizar das propriedades fundamentais da estrutura descrita por Dedekind em detrimento da procura de um conjunto de propriedades intuitivamente evidentes. No entanto, ao introduzir os números axiomaticamente, seguindo a tradição grega relativa à geometria há, contudo, algo que se modifica relativamente à noção original de *axioma*. De facto, o carácter de evidência dos axiomas, aparece aqui substancialmente diluído, antevendo uma concepção moderna do termo, segundo a qual o carácter de evidência é desprezado em detrimento da consistência lógica da axiomática.

Assim descritos, os números naturais têm de facto um certo valor fundacional, na exacta medida em que, a partir deles Dedekind foi capaz de descrever finalmente os números reais, a base da análise moderna (ver caixa 3). A razão pela qual não podem, os números naturais descritos pela axiomática de Dedekin-Peano, constituir um verdadeiro sistema fundacional reside no facto de construções mais sofisticadas, transcendendo a análise elementar, requererem um sistema mais poderoso que a aritmética. Foi por esta razão que se adoptou a noção de conjunto como noção basilar e fundamental da matemática, em detrimento da noção de número.

Números como conjuntos — a concepção actual

Em geral, teorias e resultados são em matemática resultado dos esforços de várias pessoas, não raras vezes trabalhando ao longo de séculos. Desta perspectiva o caso da *teoria de conjuntos* é singular, trata-se da obra de uma só pessoa — Georg Cantor. Esta teoria introduz a noção de *conjunto* como a mais básica e fundamental de todas as noções matemáticas. No entanto, apresentando uma definição material da noção de conjunto, Cantor acabou por descrever um sistema inconsistente, já que nele se pode descrever o denominado *paradoxo de Russell* (ver caixa 4).

Não obstante este tremendo e decisivo obstáculo, a Matemática parecia não poder prescindir desta noção, ao ponto de David Hilbert ter afirmado que "ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós."

A solução para o problema passou uma vez mais pela apresentação da noção de conjunto em termos estruturais através de uma axiomática — a axiomática de Zeremelo-Fraenkel.

Caixa 3

Considerando uma estrutura $(\mathbb{N}, +, \times, \leq, 0, 1)$ onde são verdadeiros os axiomas de Dedekind-Peano, o conjunto dos números racionais pode ser descrito como o conjunto constituído por todos os triplos ordenados (m, n, k) de elementos de $\mathbb{N}$, em que k é diferente de 0. (Este triplo tenta representar o *objecto* $(m-n)/k$.) Dois triplos (m, n, k) e (r, s, t) são considerados como representantes da mesma entidade (número racional) se

$$(mt + sk) = (rk + nt).$$

Neste conjunto, denotado por $\mathbb{Q}$, definimos uma soma e uma multiplicação através de

$$(m, n, k)+(r, s, t) = (mt+rk, nt+sk, kt)$$

$$(m, n, k)\times(r, s, t) = (mr+ns, ms+nr, kt)$$

Podemos considerar que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ se identificarmos $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ com o triplo $(n, 0, 1)$. Finalmente, uma relação de ordem pode ser introduzida em $\mathbb{Q}$ se considerarmos:

$$(m, n, k) \leq (r, s, t) \text{ se e só se } (mt + sk) \leq (rk + nt).$$

Os elementos de $\mathbb{Q}$ correspondem aos números fraccionários, que apesar de úteis em muitas circunstâncias são insuficientes para caracterizar os pontos de uma recta. Sendo possível identificar cada fracção com um ponto da recta, marcando um segmento de comprimento unitário e usando procedimentos geométricos básicos para dividir um segmento em n partes iguais, a verdade é que alguns pontos da recta não correspondem, por este processo, a nenhum número racional. (Isto é apenas mais uma manifestação do fenómeno da incomensurabilidade.)

Isto revela que os números racionais são inadequados para uma completa caracterização do contínuo. Da sua análise das

Giuseppe Peano

A noção de *número natural* é actualmente descrita (como qualquer outra noção matemática) em termos da noção de conjunto. Os axiomas garantem a existência de um conjunto (designado por conjunto vazio, e que se representa por $\emptyset$), e que é caracterizado por não ter elementos. Certas operações básicas são igualmente garantidas pela axiomática, neste caso encontram-se, em particular a união de conjuntos e a formação de conjuntos singulares. A união de dois conjuntos X e Y, que se denota por $X \cup Y$ caracteriza-se do seguinte modo: $x \in X \cup Y$ se $x \in X$ ou $x \in Y$. Enquanto que o conjunto singular $\{x\}$ se caracteriza por: $y \in \{x\}$ se e só se $y = x$. Apesar de básicas estas operações são suficientes para possibilitar a descrição de uma operação sucessor tal como anteriormente caracterizada. Essa operação associa a cada conjunto X o respectivo sucessor $\sigma(X) = X \cup \{X\}$.

De modo a podermos definir os números naturais ao estilo de Dedekind temos que garantir a existência de um conjunto σ-indutivo. Isso é garantido igualmente por um dos axiomas — o axioma do *infinito*. Esse axioma garante a existência de um conjunto A que contém $\emptyset$ como elemento e é fechado para a operação σ. Usando uma vez mais as potencialidades da teoria podemos considerar o menor subconjunto de A que é σ-indutivo, conjunto este que denotamos por ω. Note-se que o conjunto ω contém os elementos da sequência:

$$\emptyset, \quad \sigma(\emptyset) = \{\emptyset\}, \quad \sigma(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \ldots$$

que naturalmente se identifica com os elementos da sequência seguinte:

$$0, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \quad \ldots$$

que são então considerados como *os números naturais*, com a particularidade de cada número natural n ser identificado como o conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. A relação de ordem em ω é definida de modo muito simples, através do seguinte,

$$m \leq n \text{ se e só se } m = n \text{ ou } m \in n.$$

noções envolvidas, Dedekind chegou à conclusão que o que caracteriza o contínuo é o facto de que, quando dividimos uma recta em duas semi-rectas, essa divisão é determinada por um ponto da recta, algo que não sucede na recta racional. De facto se $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\}$ então A e B correspondem a duas semi-rectas da recta racional que unidas formam toda a recta racional. (A e B constituem, deste modo, aquilo que se denmina de *corte*.) O corte (A, B) não é, contudo, determinado por nenhum *ponto racional*.

A ideia de Dedeking é engenhosa. Ele decidiu *promover* estes cortes à condição de números. Deste modo, o conjunto dos números reais não é mais que o conjunto $\mathbb{R}$ constituído por todos os cortes (A, B) na recta racional. Tem-se que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ se identificarmos a fracção m/n com o corte

$$(\{x \in \mathbb{Q} : x < m/n\}, \{x \in \mathbb{Q} : x \geq m/n\}).$$

Mas $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$, depois desta identificação pois, por exemplo,

$$\sqrt{2} = (\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}, \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\})$$

é um corte que não corresponde a nenhum racional.

As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$ estendem as correspondentes operações em $\mathbb{Q}$ e são definidas por

$$(A, B) + (X, Y) = (K, \mathbb{Q} \setminus K);$$

$$\text{onde } K = \{\alpha + \beta : \alpha \in A \text{ e } \beta \in X\};$$

$$(A, B) \times (X, Y) = (K, \mathbb{Q} \setminus K);$$

$$\text{onde } K = \{\alpha \times \beta : \alpha \in A \text{ e } \beta \in X\};$$

onde consideramos $\mathbb{Q} \setminus K = \{x \in \mathbb{Q} : x \notin K\}$, e a relação de ordem,

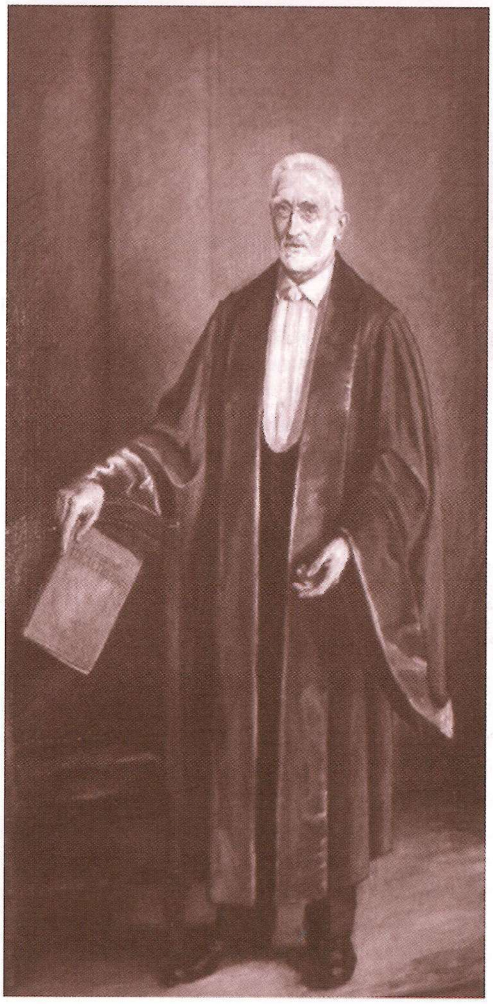
$$(A, B) \leq (X, Y) \text{ se e só se } A \subseteq X.$$

A descrição dos números naturais enquanto estrutura acabada, invoca o conceito de infinito actual, algo que foi enfaticamente rejeitado por Aristóteles e permanecia por esclarecer na época em que Hilbert a ele se referia como o conceito que em matemática mais necessitava de clarificação. Essa clarificação foi finalmente obtida com o advento da teoria de conjuntos, que ainda hoje constitui o sistema fundacional no qual qualquer noção matemática pode ser em última análise descrita. Em particular, o conceito de número, encontra finalmente uma descrição rigorosa neste contexto.

Ao longo desta jornada em que noções básicas como a número natural foram resgatadas à intuição pelo rigor lógico, foram operadas no seio da matemática muitas e profundas modificações metodológicas e ontológicas. O método axiomático foi preservado muito embora a noção de axioma tenha sofrido uma alteração conceptual extensa. De noção intrinsecamente verdadeira aos axiomas passou a exigir-se consistência e riqueza de consequência. Em certo sentido é como se a Matemática deixasse de dizer respeito a uma realidade objectiva e passasse a considerar todas as possíveis realidades. Por exemplo os axiomas da teoria de conjuntos, longe de serem intuitivos, foram escolhidos de modo a que toda a realidade matemática se pudesse descrever em termos da noção fundamental de *conjunto*.

Os axiomas da geometria euclidiana, tendem a descrever a realidade material dos conceitos básicos que constituem aquela teoria. Os modernos axiomas descrevem estruturas, ou seja, muito embora continuemos a dar nomes aos objectos matemáticos, não conhecemos (e de facto nem fazemos nenhum esforço para conhecer) a sua essência material. Os axiomas descrevem relações entre esses indivíduos e não os indivíduos em si mesmos. Estamos perante aquilo que se designa uma visão estruturalista da Matemática.

A formalização rigorosa dos números naturais teve que aguardar por todas estas enormes e complexas alterações que introduziram na Matemática um elevado grau de abs-



Richard Dedekind

Caixa 4

O famoso paradoxo de Russell foi originalmente concebido por Bertrand Russell, para demonstrar a inconsistência do sistema aritmético de Frege, associado a um programa fundacionista conhecido como logicismo. Em todo o caso a teoria intuitiva de conjuntos, concebida por Cantor, é vulnerável ao mesmo argumento.

Olhando para a definição de *conjunto* fornecida por Cantor, é possível considerar o conjunto $A = \{x : x \notin x\}$, que é constituído por todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos. Com este conjunto é agora possível obter uma contradição. De facto, se $A \in A$ então A não é um dos x tais que $x \notin x$ e, consequentemente A não é elemento de A, ou seja $A \notin A$. Por outro lado, se $A \notin A$, então A é um dos x tais que $x \notin x$, pelo que $A \in A$. Acabámos de estabelecer que

$$A \in A \text{ se e só se } A \notin A,$$

uma evidente contradição que, em última análise, revela a inconsistência da teoria intuitiva de conjuntos.

tracção e sofisticação Muitas dessas alterações foram mesmo determinadas pela tentativa dessa descrição precisa. Nesse sentido é pertinente a questão: *o que há de natural acerca dos números naturais?*

Bibliografia

Heath, Sir T. L.; *Euclid, the Thirteen Books of the Elements*; Second Edition Unabridged, Dover, NY, 1956.

Heath, Sir T. L.; *A History of Greek Mathematics*; 2 Vols., Dover, NY, 1981.

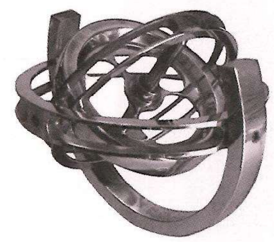
Cantor, G.; *Contribution to the Founding of Transfinite Numbers*; Dover, NY, 1995.

Mayberry, J. R.; *The Foundations of Mathematics in the Theory of Sets; Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.

Kanamori, A.; Zermelo and Set Theory; *Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 10, N. 4, ASL, December 2004.

António M. Fernandes
Instituto Superior Técnico

2005



Ano Internacional da Física

à luz de Einstein, 1905—2005

Durante o ano 2005 a revista *Educação e Matemática* associou-se à celebração do Ano Internacional da Física. Publicámos artigos, propostas para a sala de aula, relatos de experiências e de actividades de divulgação. Trouxemos a Física e a sua relação com a Matemática para as páginas da nossa revista.

Neste último número destacamos a exposição *à luz de Einstein, 1905–2005* na Fundação Calouste Gulbenkian até 15 de Janeiro. Num dos folhetos de divulgação refere-se "A Física está por toda a parte e ajuda a entender o que se passa à nossa volta. Explica muitos dos fenómenos naturais que observamos, como o arco-íris, as trovoadas ou as marés, e também permitiu a invenção de muitos equipamentos e objectos que usamos no dia-a-dia. E, no entanto, muitas vezes não nos damos conta disso ...

Albert Einstein, que foi um físico prodigioso, quis entender as leis que regem o mundo. Descobriu o fotão, inventou a teoria da relatividade e ajudou a mostrar que a matéria é feita de átomos.

Vem descobrir a Física para melhor compreender o mundo em que vives.

Vem olhar o universo com as novas luzes que a Física descobriu no século XX".

E, dizemos nós, quem sabe se nessa visita descobre também alguns sinais da tal relação de grande intimidade entre a Física e a Matemática de que nos falou o Físico Carlos Fiolhais no artigo *Relação da Física com a Matemática* que abriu a secção *2005 Ano Internaciona da Física* da EM!

Sim, e como ilustração tomemos a linguagem da geometria Euclidiana e da álgebra. Elas manipulam com um pequeno número de conceitos introduzidos de forma independente, respectivamente símbolos, tais como o número inteiro, a linha recta, o ponto, assim como com sinais que designam as operações fundamentais, isto é, as conexões entre esses conceitos fundamentais. Isto é a base para a construção, e respectivamente a definição de todas as outras afirmações e conceitos. A conexão entre conceitos e afirmações por um lado e os dados sensoriais por outro lado é estabelecida através de actos de contagem e medida cujos resultados estão suficientemente bem determinados.

Albert Einstein