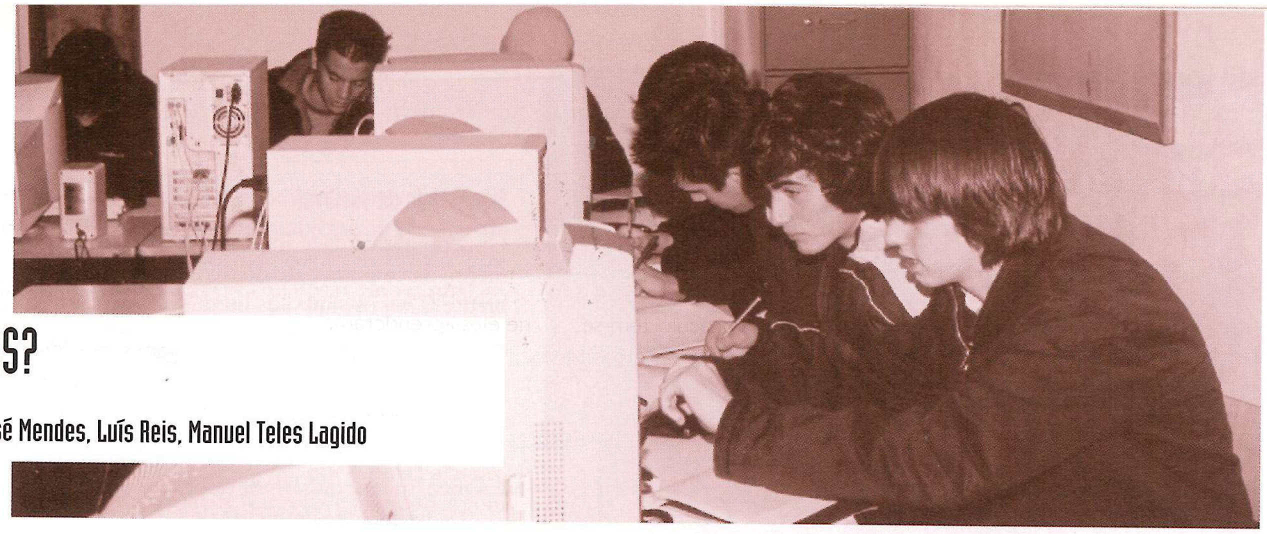

EDU.CAS?

António José Mendes, Luís Reis, Manuel Teles Lagido

"As ferramentas tecnológicas devem ser integradas de forma consistente nas actividades lectivas, proporcionando aos alunos verdadeiras e significativas aprendizagens matemáticas".

Posição da APM sobre Tecnologias na Educação Matemática, Janeiro de 2001

CAS

Sistemas de Cálculo Formal ou de Cálculo Algébrico Simbólico (CAS) são programas informáticos que executam cálculos algébricos e manipulação de fórmulas. Por exemplo, simplificam expressões algébricas, resolvem equações de forma exacta e derivam funções analiticamente. Tais programas vêm com opções de cálculo numérico e gráfico e estão disponíveis tanto em computadores (por exemplo, Derive, Maple, Mathcad, Mathematica, Scientific Notebook e TI-Interactive) como em calculadoras: é o caso das Casio (Cassiopeia e ClassPad 300), Hewlett-Packard (40G e 200 LX) e Texas Instruments (TI–89, TI–92 e Voyage 200).

Apesar da larga utilização do CAS no ensino secundário em diversos países, nomeadamente europeus, as experiências em Portugal ainda são escassas e pouco difundidas (figura 1).

Na sala de aula

Em Novembro de 2004 foi realizada uma experiência em duas turmas do 12° ano de utilização do programa Derive, para explorar a fórmula do Binómio de Newton e o Triângulo de Pascal.

Uma das turmas pertencia ao Agrupamento 1, na ES/3 José Régio, em Vila do Conde e tinha 28 alunos. A actividade foi realizada com computadores e os alunos entraram em contacto com o programa Derive no momento de realização da ficha de trabalho. A duração da aplicação foi de 2x 45 minutos, nas aulas de turno. Havia no máximo 2 alunos por computador.

A segunda turma era formada por 31 alunos dos Agrupamentos 1 e 3, na ES/3 de Valbom, em Gondomar. Foram usadas calculadoras TI 92 Plus e os alunos tinham tido um contacto com a calculadora antes da realização da ficha de trabalho. A duração da aplicação foi de 90 + 45 minutos. Os alunos trabalharam em grupos e havia uma calculadora por cada par de alunos.

Os objectivos principais do CAS nesta actividade consistiram na descoberta e conjectura de regularidades nos coeficientes e nas potências do desenvolvimento de $(a+b)^n$ e na verificação de propriedades do Triângulo de Pascal usando combinações (ver caixa).

Em termos didácticos, a abordagem seguiu o *princípio das caixas preta/branca:* o CAS foi usado para gerar exemplos numa situação nova (fase de caixa negra), conduzir à descoberta de regularidades e propriedades que estariam na base do novo conceito, que por sua vez o CAS ajudaria a confirmar e consolidar (fase da caixa branca).

Nesta situação de introdução de uma nova ferramenta tecnológica houve três preocupações: utilizá-la num assunto acessível em termos dos conhecimentos matemáticos prévios dos alunos, introduzir as funcionalidades CAS estritamente necessárias e não pôr de lado o trabalho de papel e lápis. Pretendia-se que os alunos mantivessem a compreensão e o controlo da actividade, sem se dispersarem em pormenores (nomeadamente técnicos).

O que acharam os alunos?

Num questionário escrito colocado aos alunos no final da realização da actividade, as vantagens mais apontadas para o CAS foram, por ordem decrescente: *interacção* (professor↔aluno e aluno↔aluno), *autonomia*, favorecimento da *aprendizagem* (mais e mais rápido) e *envolvimento* do aluno. Nas desvantagens a mais apontada foi, curiosamente, a de não favorecer a aprendizagem (demora-se mais tempo e aprende-se menos), seguida de perto pela perturbação do funcionamento da aula e pela acentuação de diferenças no ritmo de aprendizagem. Algumas respostas referiam ainda que era mais cansativo e que se perdia tempo com tecnologia não permitida no exame. Curiosamente, 6 alunos responderam que não encontravam nenhuma desvantagem (idêntico número de alunos não respondeu a esta questão).

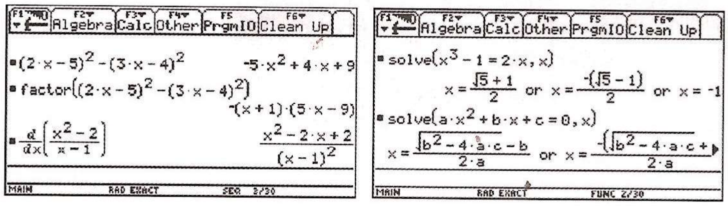

Figura 1. Cálculo algébrico na TI Voyage 200

Uma questão que dividiu os alunos foi a *visualização dos cálculos*: para uns, ver a resposta (sob a forma simbólica) constituiu uma vantagem; para outros, ver uma resposta final, sem os passos intermédios, constituiu uma desvantagem. Um dos grandes receios manifestados pelos alunos foi o da dependência da calculadora.

Potencialidades

Na experiência descrita acima, o potencial do CAS foi o da *exploração* algébrica. Serviu de ambiente de experimentação, gerando exemplos que podiam ser alterados facilmente. Desta forma, os alunos foram estimulados a fazerem generalizações e a descobrirem o geral no particular.

A exploração é uma característica comum a outros ambientes tecnológicos, só que o CAS tem uma distinção óbvia: *acrescenta a álgebra*. As funcionalidades algébricas do CAS permitem uma abordagem flexível dos problemas de uma forma que não é possível em outros ambientes. As consequências são profundas. Por exemplo, as notações e os resultados do CAS são matematicamente correctos, o que dá confiança aos alunos; obtêm-se soluções exactas; o reportório completo de procedimentos algébricos permite mais do que uma estratégia para a resolução de um problema, possibilitando diferentes abordagens; as representações e manipulações algébricas podem ser integradas com as representações e manipulações numéricas e gráficas, promovendo uma visão mais integrada dos conceitos matemáticos; pode-se trabalhar problemas algébricos mais complexos, nomeadamente com dados reais.

Uma potencialidade apontada ao CAS tem a ver com a possibilidade dos alunos se concentrarem na estratégia de *resolução dos problemas* e na *construção de conceitos*, uma vez que se podem libertar dos cálculos, ou seja, há aumento da eficiência e redução do tempo gasto em cálculos algébricos, situação que no ambiente de papel e lápis poderia requerer toda a atenção e conduzir a erros perturbadores. No ensino secundário, porém, em que o CAS é usado por alunos inexperientes, esta é uma questão controversa: aos alunos falta tanto o conhecimento matemático como a experiência de utilização do CAS de modo a serem capazes de o usar eficientemente.

Significado de variável

Uma potencialidade importante diz respeito ao aprofundamento da compreensão do significado de variável. Num ambiente CAS os símbolos literais vão além da concepção de pseudo-número (letra que substitui números). Por exemplo, é possível substituir a variável por outra expressão literal (ver figura 2).

O papel de incógnita aparece também reforçado. Por exemplo, numa equação literal é necessário reconhecer qual é a incógnita se quisermos resolver a equação (ver figura 2).

De facto, num ambiente de CAS todos os símbolos literais são *iguais*. Isto permite trocar os papéis atribuídos pelo utilizador de modo que, por exemplo, um parâmetro funcione mais tarde como incógnita na resolução de um problema. Estas características do CAS facilitam a compreensão dos papéis mais avançados de variável e a flexibilidade para lidar com eles.

Reificação

Outra oportunidade concedida pelo CAS diz respeito à *reificação* das expressões e fórmulas algébricas, isto é, ao seu carácter de objectos ("coisas") em vez de processos ("acções"). Este aspecto é da maior importância, pois é aí que reside um dos grandes obstáculos na aprendizagem da álgebra.

Um conceito matemático tem frequentemente duas faces: o processo operacional e a estrutura de objecto. Os alunos dificilmente se apercebem desta dualidade processo-objecto, sendo o carácter de processo que domina o conceito.

Apesar da álgebra ser, por vezes, considerada como aritmética generalizada, existe uma diferença substancial: a visão como processo, que domina a aritmética, é ampliada com a visão de objecto na álgebra. Contrariamente à situação na aritmética, nas expressões algébricas muitas vezes não há nenhum processo para executar. Todavia, é frequente os alunos sentirem-se desconfortáveis enquanto uma expressão não tiver valor numérico ou contiver operadores. Para eles, o processo não parece estar concluído.

De modo a permitir a flexibilidade entre processo e objecto, a notação algébrica é por vezes ambígua, o que não é o caso da aritmética. Por exemplo, em aritmética o sinal $+$ é procedimental. Em álgebra, já pode ter outros significados. Calcular $x + 3$ ou $a + b$ não é possível, a menos que

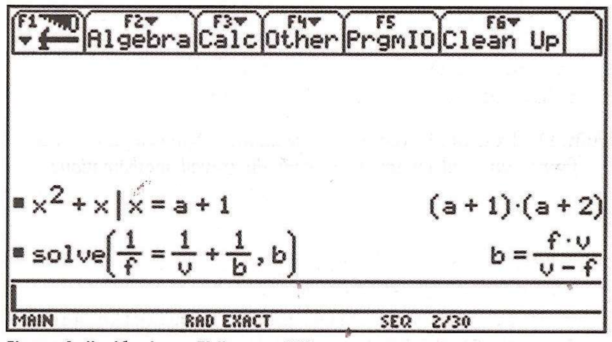

Figura 2. Variáveis na TI Voyage 200

sejam conhecidos os valores das variáveis. Como resultado, $a + b$ só terá sentido se significar um objecto algébrico para o aluno. Nesse caso, adicionar $(a + b)$ e $(a + 2b)$ já é possível. Podemos fazer considerações análogas para o sinal $=$. Pode significar um processo, por exemplo, desembaraçar de parênteses em $(x + 5) \cdot (x + 3) =$ ou resolver a equação $(x + 5) \cdot (x + 3) = 0$. No entanto, em $a + b = b + a$ o sinal $=$ indica uma equivalência.

A transição da aritmética para a álgebra envolve, pois, a reificação de processos em objectos ou, por outras palavras, a extensão da visão processual de fórmulas e expressões com a percepção destas entidades algébricas como objectos. O CAS, ao forçar o utilizador a tratar as fórmulas e expressões como objectos, favorece o desenvolvimento de uma visão mais estrutural das expressões algébricas, em vez da visão operacional mais limitada.

Questões

É habitual manifestar optimismo quando se pretende integrar uma nova tecnologia na educação matemática. Porém, apesar de tantos anos decorridos de larga experiência em diversos países, ainda há muitas questões a colocar. O documento de discussão para o 12° Estudo ICMI, intitulado *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (2000) levantava, entre outras, as seguintes questões:

— *Para que alunos e quando é apropriado introduzir CAS? Quando é que as vantagens de usar tais sistemas ultrapassam o esforço em aprender a usá-los? Existem actividades utilizando esses sistemas que possam ser usadas com proveito por alunos mais novos?*

— *Que "insights" algébricos e sentido simbólico necessita um utilizador de CAS e que" insights" traz o seu uso?*

— *Um ponto forte do CAS é o apoio a múltiplas representações dos conceitos matemáticos. Como é que isso pode ser bem usado? Pode haver sobre-utilização?*

— *Como deverá ser um currículo de álgebra num país onde o CAS está disponível gratuitamente? Que competências "à mão" devem ser mantidas?*

Referências

Böhm, J. et al. *The Case for CAS*. Münster. T³ Europe. 2004.

Drijvers, P. *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht. Freudenthal Institute. 2003. In `http://www.library.uu.nl/digiarchief/dip/diss/2003-0925-101838/inhoud.htm`

Guin, D., Trouche, L. (coord.). *Calculatrices Symboliques — transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique*. Grenoble. La Pensée Sauvage, Éditions. 2002.

The 12th ICMI Study: *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. ICMI. Boletim n.° 48. 2000. In `http://www.mathunion.org/ICMI/bulletin/48/Twelfth_Study.html`

CAIXA

Ficha de trabalho: algumas das questões propostas aos alunos para uso da calculadora

1.1. Desenvolve o binómio $(4x^2y - 3y)^6$ com recurso ao CAS.

1.1. Utiliza a tua calculadora para desenvolver as potências de $(a + b)^n$ e regista apenas os *coeficientes* de cada termo na tabela [...]

2.2. Se conseguires reconhecer um padrão de preenchimento, acrescenta os coeficientes dos desenvolvimentos do binómio para $n = 7$ e $n = 8$. Em seguida verifica, com recurso ao CAS, se o teu palpite estava correcto.

4.1. Recorrendo à calculadora, observa as diversas *potências* de a e de b do desenvolvimento do binómio $(a + b)^n$, para $n = 3, 4$ e 5.

4.2. Desenvolve $(a + b)^6$, sem recurso à calculadora. Confirma, em seguida, a tua resposta.

4.3. Observando os resultados anteriores, desenvolve cada um dos seguintes binómios (utiliza a calculadora apenas para confirmar a resposta):

$$(2x + 3y)^5 = \ldots \qquad (4z + \frac{w}{2})^6 = \ldots$$

4.4. Desenvolve o binómio $(2x - y)^5$. Verifica a correcção da resposta através da calculadora.

5. Relaciona os valores do triângulo de Pascal com os diferentes valores de ${}^nC_p (0 \leq p \leq n)$ [...]

5.1. *Em cada linha do triângulo de Pascal, são iguais os números equidistantes dos extremos*, i.e. , na n-ésima linha

$${}^nC_p = \ldots\ldots\ldots, \text{com } 0 \leq p \leq n$$

Confirma a igualdade na calculadora.

5.2. Traduz, através do cálculo combinatório, o processo de construção do triângulo de Pascal:

Adicionando dois números consecutivos de uma linha, obtém-se o número colocado abaixo, na linha seguinte,

$${}^nC_p +^n C_{p+1} = \ldots\ldots\ldots, 0 \leq p \leq n$$

Confirma a tua conclusão na calculadora.

6.2. Desenvolve, os seguintes binómios. Compara os resultados com os obtidos na calculadora CAS.

$$(3 - \sqrt{3})^5 \quad (\sqrt{2}x - \sqrt{3})^5$$

António José Mendes, ES/3 de Valbom
Luís Reis, Centro de Competência Nónio ESB-UCP
Manuel Teles Lagido, ES/3 José Régio, Vila do Conde
[todos] Grupo de Trabalho T³