

Álgebra — Um portal! Uma barreira! Um mistério!

Mathematics Education Dialogs é um fórum on-line organizado pelo NCTM que tem como objectivo a troca de ideais sobre temas actuais e complexos em educação matemática. Os textos apresentados, procuram representar uma certa diversidade de pontos de vista sobre o tema em debate e não têm de estar de acordo com os pontos de vista do NCTM.

Em Abril de 2000 foi publicado um fórum sobre Álgebra com o título *Álgebra — A Gate! A Barrier! A Mystery!* (<http://www.nctm.org/dialogues/2000-04.pdf>). Para esta revista temática sobre Números e Álgebra, seleccionámos alguns dos pontos de vista que foram incluídos neste fórum. Procurámos incluir alguma diversidade tanto ao nível das ideias defendidas como ao dos níveis de ensino a que dizem respeito.

Boa leitura. Quem sabe? Talvez ela o inspire para nos enviar as suas reflexões sobre o tema desta revista. Cá ficamos à espera.

Álgebra para todos? Porquê?

Nel Noddings

Muitas escolas secundárias exigem que todos os alunos façam disciplinas e mesmo, por vezes, testes estandardizados de Álgebra. Um dos argumentos a favor desta exigência está relacionado com a igualdade de oportunidades; um outro argumento que a defende está relacionado com o facto de a Álgebra ser amplamente necessária no mundo do trabalho. Ambos os argumentos são questionáveis e as minhas objecções prendem-se com o requisito das disciplinas de Álgebra tradicionais, e não com o ensino de tópicos específicos da Álgebra, habilmente seleccionados.

Em termos gerais, com o argumento que se baseia na igualdade, defende-se que todas as crianças devem ter acesso a oportunidades educacionais, outrora reservadas a muito poucos. É difícil opormo-nos a um gesto tão generoso, mas devem ser levantados alguns contrapontos. Em primeiro lugar, esta exigência suscita questões educacionais fundamentais: Por que é que a Matemática académica se constitui como um requisito para a entrada na universidade? Por que não podem os estudantes americanos escolher um percurso de humanidades, como fazem os estudantes de outras partes do mundo? Em segundo lugar, podemos afirmar que estamos a oferecer uma oportunidade através de coerção? Muitos estudantes não irão passar a Álgebra devido à falta de preparação conveniente ou devido à falta de interesse; muitos estudantes que poderiam obter um diploma do ensino secundário não o poderão obter se se elevarem os padrões de avaliação.

A atitude de zelo com que procuramos dar a todos uma oportunidade para entrar na universidade faz com que estejamos a tolerar, ou até mesmo a encorajar, disciplinas que têm pouco a ver com a verdadeira Álgebra. Os mais novos conseguem obter a nota nos seus relatórios de avaliação, mas vêm a descobrir que não estão de todo preparados para trabalhar a nível universitário. Esta prática aproxima-se da fraude e é muito pouco representativa de *igualdade de oportunidades*.

Na maior parte dos Estados Unidos, estudantes que não vão para a universidade são tratados de forma vergonhosa. Em vez de lhes oferecermos disciplinas interessantes, bem estruturadas e divulgadas convincentemente, estamos a empurrar toda a gente para disciplinas que só se encaixam em algumas opções de carreira futuras. Em vez de democraticamente demonstrarmos respeito por todo o trabalho legítimo e por todos os alunos que irão realizar esse trabalho, tratamos toda a gente como futuros estudantes universitários. Os alunos que vão para empregos sem frequentar a universidade fazem-no por falta de alternativa, porque são considerados *não suficientemente bons* para a universidade.

Mas talvez hoje em dia toda a gente precise de um pouco mais de Matemática. Talvez esta exigência sirva um fundamento genuinamente educacional. Duvido. Embora algumas actividades relativamente novas utilizem, de facto, muita Matemática, muitas outras, mais antigas, utilizam-na menos do que há cinquenta anos atrás. A Matemática pode ser a base de muito do que se faz nessas actividades, mas os trabalhadores em si utilizam-na muito pouco. Os argumentos a favor do uso não ligado à actividade profissional, como a cidadania, a contabilidade pessoal e por aí em diante contêm também falhas. Estes argumentos podem oferecer como fundamento a propulsão das habilitações matemáticas, mas não fundamentam a exigência das tradicionais disciplinas de Álgebra.

Uma disciplina verdadeiramente útil para muitos dos alunos de Matemática do ensino secundário incluiria, além das inquestionavelmente úteis aptidões matemáticas, algo sobre as políticas da educação matemática: sobre o que significa viver num mundo matematizado; sobre como a Matemática tem sido utilizada como *guardiã*; sobre saber que diferença há entre compreender uma disciplina e ter um certificado; sobre como os testes avaliam de forma justa ou injusta; sobre a forma como os testes são elaborados; sobre a forma como os alunos, através de uma irreflectida resistência a disciplinas da Matemática, estão a contribuir para o decréscimo do seu próprio estatuto económico; e sobre como se identificaria um tipo de resistência inteligente.

Os alunos deveriam poder optar por currículos universitários ou não universitários com orgulho e confiança de que as suas escolhas de ensino seriam genuinamente valorizadas.

Não retardar: construir e falar sobre experiências ricas desde o início

Sydney Schwartz e David Whiting

À medida que ponderamos sobre o conhecimento e as implicações da *Álgebra com o simbolismo retardado* na escola elementar, deparamo-nos com a questão do que fazer em alternativa. O conceito de retardar a utilização de símbolos parte do princípio de que a criança desenvolve o nível de abstracção necessário sem precisar de ser ensinada. Saberemos o suficiente acerca da forma como se desenvolve o pensamento simbólico em Álgebra para podermos reconhecer e apoiar este processo? Se assim for, como devemos preparar os professores do ensino primário para o fazer?

No tema principal da *Teaching Children Mathematics* do Fevereiro de 1997, os colaboradores debateram quer sobre os processos observados, quer sobre processos induzidos com que as crianças desenvolvem o pensamento algébrico. Dando sobretudo ênfase ao raciocínio algébrico, os artigos ilustraram estratégias que pretendiam levar as crianças a explicar as suas ideias através de formas gráficas, sobretudo símbolos pictóricos. É fundamental compreendermos o processo através do qual uma criança estrutura os conhecimentos destes conteúdos para podermos escolher estratégias de ensino que promovam a evolução para a generalização a partir de uma única representação de uma relação.

Quando pedimos a vinte e cinco professores com mestrado para definir Álgebra, a maioria das respostas incidia sobre calcular um valor de x ou de uma incógnita. É necessário obter um conhecimento mais abrangente da Álgebra para podermos ajudar as crianças a traduzir o seu pensamento de modo a poderem criar representações simbólicas de relações

numéricas, de padrões e de generalizações. Se pretendemos modificar a nossa abordagem de ensino para sermos guiados pelas crianças, em vez de sermos nós a guiá-las, esta visão limitada da Álgebra não é suficiente. Através da actual ênfase conferida à construção do conhecimento da criança, ilustrada no tema principal [da revista], sublinha-se a importância da base de conhecimentos do professor para conseguir estimular as crianças a utilizar o seu emergente raciocínio algébrico e a conseguir ilustrá-lo gráfica ou simbolicamente.

Por exemplo, quando uma criança de infantário foi observada a fazer uma construção de comboios de cubos utilizando pares de cores que se alternavam uma única vez, pôde concluir-se, através de uma observação mais atenta que ela estava a desenvolver uma compreensão da relação *abab*. A criança comentou que os seus dois comboios eram iguais porque "continuavam a mexer-se de trás para a frente e de frente para trás". Múltiplas experiências que constroem padrões *ab* de forma visual, táctil, sonora e motora criam um contexto propício para o conceito se consolidar como uma generalização.

Se pretendemos considerar uma abordagem evolucionar do ensino da Álgebra com introdução atempada de símbolos, devemos preparar os professores, não só para conseguirem reconhecer o pensamento algébrico à medida que este surge, mas também para estruturarem situações autênticas que estimulem as crianças a utilizar símbolos para representar padrões e relações. A hipótese de retardar a utilização de simbolismo no ensino da Álgebra implica saber como promover o simbolismo emergente das crianças. Precisamos de ir além das explorações que as crianças espontaneamente fazem em áreas como as relações funcionais em geometria, razões usuais entre unidades de medida, transformações de problemas computacionais em números apropriados e igualdades e desigualdades numéricas. Precisamos de criar situações quotidianas que motivem as crianças para o raciocínio algébrico e para representações. Para nós, a palavra de ordem não é *esperar*, mas antes, *alicerçar*; isto é, estimular a construção de pontes do concreto para o abstracto.

Álgebra no 3º ciclo? Sim, aqui está como começar!

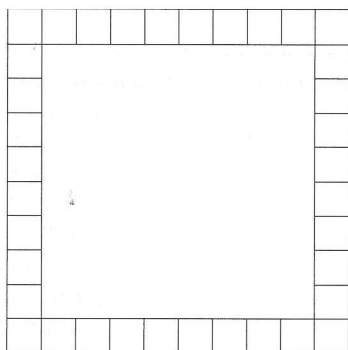
Angela F. Allen

Sou defensora da Álgebra no terceiro ciclo do ensino básico. Se for convenientemente ensinada, a Álgebra ajuda os alunos a raciocinar, a identificar padrões e relações e a fazer previsões e generalizações. Ou seja, motiva os alunos para a aprendizagem activa que se encontra no seio constitutivo da Matemática. A chave é ensinar Álgebra convenientemente!

Se a Álgebra for apresentada aos alunos como uma colecção de algoritmos e métodos a decorar sem quaisquer rela-

ções que tenham significado, então não será apropriada para alunos do terceiro ciclo do ensino básico. No entanto, se for ensinada de modo a envolver os alunos na busca de padrões e relações e a estabelecer generalizações sustentadas por um raciocínio plausível, a Álgebra pode ser uma oportunidade intelectualmente estimulante e produtiva.

Todos os alunos da minha escola tiveram Álgebra no oitavo ano, durante todo o ano lectivo. Ao reflectir sobre a experiência de ensinar estes alunos, verifico que selecionei tarefas com três características diferentes: legitimidade para os alunos, alinhamento com o raciocínio matemático dos alunos e inclusão de importantes conceitos ou métodos matemáticos. Por exemplo, no início, utilizei o problema dos quadrados na fronteira de *A Collection of Maths Lessons from Grades 6 through 8*, de Marilyn Burns e Cathy McLaughlin (New York: The Maths Solutions Publications, 1990). Este problema pede aos alunos que encontrem o número de quadrados 1×1 dos lados de uma grelha 10×10 .



Em ambiente de aula onde se sentiam à vontade para exprimir as suas opiniões e métodos, os alunos tomaram a tarefa em mãos à medida que criavam e partilhavam as suas ideias e métodos para desvendar o desconhecido, ou seja, o número de quadrados dos lados. Os alunos recorreram a vários métodos para contar os quadrados. Por exemplo, alguns alunos acharam o número de quadrados de um dos lados da grelha (10 quadrados); multiplicaram por 4; e subtraíram então 4, tendo percebido que os cantos contavam duas vezes, para chegarem aos 36 quadrados. Testaram as generalizações dos métodos em grelhas de outras dimensões. Depois de terem chegado a uma generalização correcta, pedi-lhes para preverem e para testarem as suas generalizações numa grelha de 100×100 . Alguns alunos queixaram-se do tempo de que iriam precisar para contar tantos quadrados.

Pedi-lhes, então, que traduzissem os seus métodos para linguagem algébrica para descrever os seus procedimentos. Sugeri que comessem por trocar as palavras das suas descrições por letras ou variáveis, explicando que os valores desconhecidos se alterariam em quadrados diferentes.

Após alguma confusão e consternação, os alunos traduziram os seus métodos para linguagem algébrica. Por exemplo, os alunos que tinham utilizado o método anteriormente descrito, substituiriam as letras G e L pelo número de quadrados da grelha e do lado, respectivamente, e escreveram

$L \times 4 - 4 = G$. Claramente, esta tarefa não exige requisitos cognitivos de grande nível ou o domínio de conceitos básicos, mas ajudou os alunos, ainda assim, a ver como a Álgebra é uma extensão natural da aritmética.

Assim como outras, esta tarefa que usei com os meus alunos mudou a maneira como eles viam a Matemática. Eles viram que a Álgebra do terceiro ciclo não era uma confusão, mas antes uma maneira de pensar sobre Matemática e fazer Matemática que implicava encontrar padrões e fazer generalizações. Ficaram sobretudo entusiasmados por perceber que a Matemática era mais do que a aritmética que tinham feito no sexto e sétimo anos. Recorrendo a boas tarefas e a um ambiente de aula motivador, os meus alunos adquiriram confiança matemática e viram como a Álgebra se relaciona com as suas experiências de aprendizagem anteriores, como proporciona uma nova maneira de abordar e resolver problemas e como constrói os alicerces da Matemática mais avançada.

Não! Álgebra não!

Shirley T. Bagwell

Não é preciso saber como se constrói um carro para o poder conduzir; nem tão pouco é preciso saber programar um computador para o poder utilizar. Está a ser produzido muito *software* que ajuda as pessoas a gerir as suas vidas e a resolver problemas. Qualquer pessoa que use uma calculadora, uma folha de cálculo, instrumentos de medição, ou outras tecnologias consegue resolver problemas do quotidiano sem saber Álgebra. Há alguma Álgebra que entra para as nossas vidas sob a forma de fórmulas. Se isto acontecer naturalmente, até o aluno mais reticente aceitará e utilizará fórmulas. No entanto, esperar que todos os alunos se interessem por, ou tenham aptidão para, Álgebra é estar a criar um ambiente de fracasso e de frustração para alguns.

Muitos alunos não conseguem compreender a natureza abstracta dos tópicos algébricos. Depressa ficam frustrados e desligam-se de todas as tentativas de ajuda. Alguns alunos tornam-se problemáticos disciplinarmente. Não estão preparados academicamente para passar do concreto para o abstracto. Alunos do ensino especial são encorajados a fazer disciplinas do currículo normal. A Sue, por exemplo, depois de ter progredido lentamente em Aritmética, começou a perceber o significado dos números no terceiro ciclo e aprendeu a resolver problemas concretos utilizando a calculadora. Quando foi para uma disciplina de Álgebra no secundário desistiu. Mesmo com a ajuda de um professor e de um explicador, não conseguiu perceber as equações. Se alunos como a Sue são colocados numa turma de Álgebra, depressa se sentem desintegrados e desistem de tentar. Se forem ensinados a utilizar tecnologia para resolver problemas

que encontram no dia-a-dia, desenvolvem o conhecimento da matemática.

A Álgebra não é para todos, tal como a universidade não é para todos. Não pedimos que todos os alunos façam Química, Física, ou uma língua estrangeira para acabar o secundário. Se for exigido a alunos que ainda não dominaram a pré-Álgebra que façam Álgebra, muitos irão reprovar. A reprovação não faz nada pelo aluno mais fraco, a não ser diminuir a sua auto-estima e reafirmar a convicção de incapacidade de aprendizagem. Pretender que todos os alunos dominem os objectivos da Álgebra não é razoável e fará com que mais alunos abandonem o secundário. Por exemplo, o Jack, um aluno médio na maioria das disciplinas, consegue fazer aritmética utilizando uma calculadora mas precisa de muito auxílio para resolver problemas com dois ou mais passos. Repetiu Álgebra no nono ano porque era uma disciplina com aprovação obrigatória para a conclusão do ciclo de ensino. Nunca conseguiu desenvolver a capacidade de *traduzir* de inglês para álgebra e nunca conseguiu compreender as equações. Começou a ficar desmotivado e conseguia esquivar-se durante as aulas dormindo. Não havia motivação que chegasse para o manter acordado.

Toda a gente precisa de Aritmética para resolver problemas e toda a gente devia desenvolver aptidões matemáticas para compreender, organizar, e resolver problemas que encontra no dia-a-dia. Muitos alunos são empurrados para uma disciplina de Álgebra quando não sabem usar aparelhos e unidades de medição, movimentar um livro de cheques, pedir um empréstimo ou contar o troco depois de fazer uma compra. Estes alunos precisam de saber utilizar tecnologia para resolver os problemas de uma maneira concreta que se aplique directamente às suas vidas.

Pretender que todos os alunos façam Álgebra obriga a que as aulas sejam dadas num nível mais básico. Enquanto os alunos mais fracos e desinteressados se debatem e ficam desmotivados, os alunos melhores e interessados aborrecem-se e ficam inquietos. Nem as estratégias de ensino mais inovadoras conseguem ultrapassar uma distância tão grande entre o rendimento do aluno e o seu interesse. Alguns alunos desinteressados da Matemática vivem toda a sua vida sem encontrarem qualquer utilidade para a Álgebra. Outros encontram muitas aplicações em muitas áreas. Os alunos de Matemática que decoraram e fizeram as disciplinas de Álgebra obrigatórias com uma nota mínima irão para sempre evitar a Matemática e recordar a Álgebra como um pesadelo. Se forem encorajados a utilizar tecnologia para explorar problemas que lhes despertem interesse, poderão mais tarde querer estudar Álgebra.

Pensar que todos os alunos estão preparados para estudar Álgebra no secundário é ingénuo, e contrasta certamente com a realidade da nossa sociedade, na qual os alunos têm interesses e capacidades diferentes. Temos de ter em consideração os interesses e pontos fortes do aluno quando estamos a desenvolver o percurso escolar desse aluno. Embora toda a gente precise de aptidões para resolver problemas, nem toda a gente precisa da Álgebra para os resolver.

Tornar a Álgebra do ensino secundário acessível a todos

Kelly Hodges

A directiva chegou: fazer Álgebra é agora requisito obrigatório para conclusão do ensino secundário. A exigência é bem intencionada. Condicionando o acesso à Álgebra de alguns estudantes, as escolas perpetuam uma característica de desigualdade que vai contra os seus objectivos. Mas os professores desesperam-se: "Então e aqueles que não vão para a universidade? Então e aqueles que têm dificuldades de aprendizagem?". Colocar simplesmente todos os alunos em disciplinas convencionais de Álgebra não vai colmatar a desigualdade. A tradicional disciplina de Álgebra nunca esteve preparada para responder às necessidades de *todos* os alunos.

Quando estávamos a tentar preparar uma disciplina de Álgebra dirigida a todos os alunos, eu e os meus colegas começámos por clarificar os conteúdos da mesma. Esta deveria expandir os horizontes matemáticos do aluno para ver o mundo. A Aritmética resulta bem no que diz respeito a descrever imagens estáticas do mundo, mas a Matemática pode fazer mais do que isso. A nossa disciplina deveria deixar os alunos preparados para continuar os seus estudos Matemáticos. No entanto, os conteúdos não podem ser elaborados apenas em função das disciplinas dos anos seguintes. Finalmente, a estrutura da disciplina deveria ajudar os alunos a aprender a colocar e a responder às suas próprias questões matemáticas.

Temos tido algum sucesso no cumprimento destes objectivos através de uma disciplina que estruturámos em torno do conceito de função. Nesta disciplina introdutória, a variável representa uma quantidade que se altera, em vez de um número desconhecido, e uma função é uma relação entre duas variáveis. Os alunos estudam várias representações de funções, sobretudo funções lineares, e preocupam-se com os seus pontos fortes e fracos a resolver diferentes tipos de problemas. Resolver equações é um ponto focado, mas é dado mais tarde na disciplina, e a manipulação de símbolos constitui apenas uma das muitas estratégias possíveis consideradas. A sensação de haver uma multiplicidade de dados e de métodos desconexos, comuns a outras disciplinas de Álgebra, é eliminada. A perspectiva de função na nossa disciplina possibilita uma mudança de "estático para dinâmico" que uma perspectiva "aritmética generalizada" não permite. A disciplina nova serve aos alunos nas suas disciplinas futuras, mas tem também sido acessível e motivadora para estudantes que nunca teriam passado a uma disciplina convencional de Álgebra.

A integração de tecnologia no ensino do dia-a-dia torna acessíveis conceitos mais complexos. Além do mais, ajuda a proporcionar acesso igualitário a alunos com deficiências de aprendizagem computacional, bem como a outros com deficiências visuais ou físicas que limitem a sua capacidade de escrever ou desenhar. Para os nossos alunos, as funções transformam-se em Matemática que eles encontram no mundo

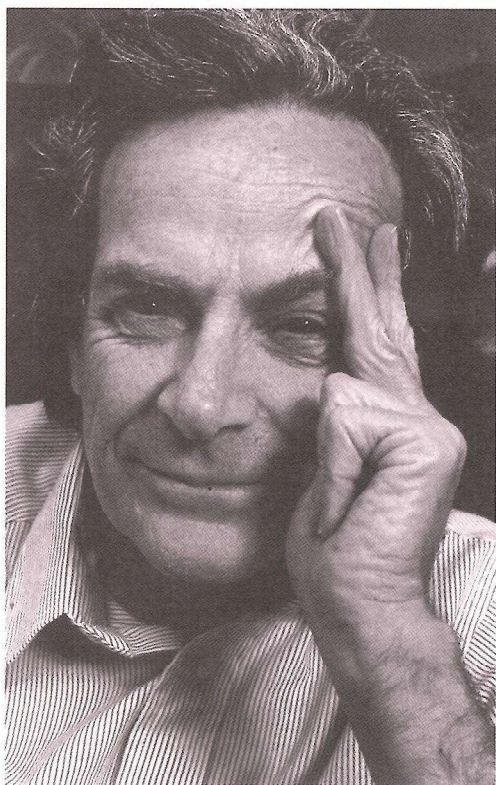
que os rodeia — as funções são maneiras poderosas de modelar situações que se alteram. Embora o tratamento que a disciplina dá à função tenha trazido uma perspectiva que nos permite abordar os objectivos da Álgebra para todos, a pedagogia que se tem desenvolvido a par do currículo tem-se revelado igualmente importante.

Temos considerado que os conceitos devem primeiro ser integrados em contextos do quotidiano para permitir que um conceito abstracto tenha uma metáfora na experiência do aluno. O ensino deve então desenvolver-se a partir das questões dos alunos para garantir que os conteúdos se relacionem uns com os outros na sua mente. Aprendemos a estruturar tarefas que, tanto incentivam a questões por parte dos alunos, como também sustentam a generalização, de maneira a que as técnicas obtidas a partir de um contexto possam ser adaptadas e reafirmadas para uma forma de aplicação mais abrangente.

Avaliamos os alunos pelas suas capacidades de aplicar novas técnicas e generalizações a contextos diferentes daqueles dos quais surgiram. Ao verificar que os alunos transportam os conceitos para novas situações desconhecidas, constatamos que eles aprenderam.

Enquanto sociedade, somos obrigados por ideais democráticos a oferecer a todos os estudantes uma disciplina de Álgebra que seja rigorosa, importante e acessível. No que diz respeito a este aspecto, as aulas de Álgebra convencionais não têm sido bem sucedidas. A nossa abordagem centrada nas funções conduziu ao desenvolvimento da disciplina descrita, que satisfaz estas condições.

Tradução: Leonor Silva



Aconteceu quando um primo meu, três anos mais velho e que já andava no liceu, precisou de explicador em álgebra. Deixavam-me ficar sentado a um canto, enquanto o explicador tentava ensinar álgebra ao meu primo. Ouvia-o falar de x e perguntava-lhe:

— Que estás a fazer?

— Estou a tentar descobrir o valor de x , como em $2x + 7 = 15$.

Ao que lhe respondia:

— Queres dizer 4, não é?

— Sim, mas chegaste lá pela aritmética, e tens de o fazer através da álgebra.

Felizmente aprendi álgebra, não a ir às aulas, mas por ter encontrado no sótão o velho compêndio da minha tia e compreendido que tudo se resumia a descobrir o valor de x — não importa como se chega lá. Para mim não havia nada dessas coisas de o fazer “pela aritmética” ou “pela álgebra”. “Fazê-lo pela álgebra” era um conjunto de regras segundo as quais, se as seguisse fielmente, teria de “subtrair 7 de cada lado; se x tem um coeficiente, dividir ambos os membros por ele”, e assim sucessivamente — uma série de passos que nos levam à solução se não compreendemos o que estamos a fazer. As regras foram inventadas para que as crianças consigam passar. E foi por isso que o meu primo nunca conseguiu fazer álgebra.

Richard Feynman