O triunfo da álgebra

Eduardo Veloso

Que construções geométricas são, ou não, teóricamente possíveis? [...] Um aspecto singular relativo a esta questão é o facto da geometria elementar não fornecer qualquer resposta a esta questão. Temos que recorrer à álgebra [...]. Este novo método de ataque tornou-se necessário devido ao facto da geometria elementar não possuir um método geral, um algoritmo, [como é o caso da álgebra].

Felix Klein, *Famous Problems of Elementary Geometry*.

A longa história da descoberta da impossibilidade de resolução dos três famosos problemas da antiguidade clássica — duplicação do cubo, trissecção do ângulo e quadratura do círculo —, constitui um tópico excelente para fazer compreender a natureza da matemática e a riqueza dos seus processos de investigação. Deveria fazer parte obrigatória de todos os cursos de formação de professores, como ocasião privilegiada para ilustrar a unidade da matemática e tornar significativas as aprendizagens de algumas estruturas algébricas. Não é infelizmente esse o caso.

Trata-se de um tema extenso que poderia facilmente e utilmente preencher uma cadeira semestral. Neste artigo apenas vou tentar despertar a curiosidade dos leitores da *Educação e Matemática*, salientar alguns aspectos mais relevantes e indicar futuras leituras. Os livros que irei referindo serão comentados na última secção do artigo.

O facto da impossibilidade de resolução dos três problemas geométricos ter sido demonstrada, por métodos algébricos, mais de dois mil anos depois de terem sido enunciados, é certamente *um triunfo da álgebra*. Mas deve também ajudar-nos a reflectir, neste número dedicado à álgebra, sobre a necessidade de uma abordagem do ensino da álgebra que tome sistematicamente como ponto de partida problemas interessantes e com significado.

Construção geométrica e resolução algébrica: que conexões?

Nesta longa história, o passo fundamental foi a compreensão de como era possível traduzir, na linguagem da álgebra, uma construção geométrica. Tal exige uma apresentação detalhada e um esforço de leitura a que convido os colegas leitores deste artigo. A isso será dedicada esta primeira parte, em que mostraremos essa conexão através de um exemplo simples: a determinação da bissectriz de um ângulo.

Trata-se da proposição I.9 (livro I, proposição 9), dos *Elementos* de Euclides e tem o seguinte enunciado:

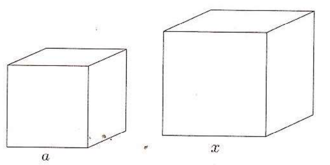
Proposição I.9.
Dado um ângulo, construir a sua bissectriz.

Sendo dado o ângulo AOB, pretendemos encontrar um ponto X tal que a semirecta OX seja a sua bissectriz, ou seja, que o ângulo AOX seja igual ao ângulo XOB.

Os três problemas clássicos da geometria grega

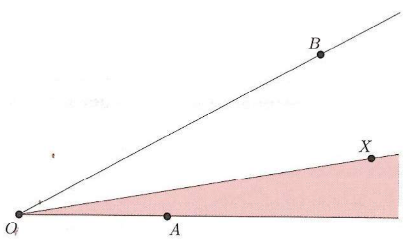
Os três problemas referem-se a construções na geometria euclidiana, ou seja, admitem nessas construções apenas os dois instrumentos dos *Elementos* de Euclides — a régua não graduada e o compasso euclidiano — e de acordo com os postulados de Euclides relativos a estes instrumentos[1]. Tendo em conta estas condições, que são pressupostos, os enunciados dos três problemas (em linguagem moderna) são os seguintes:

Trissecção do ângulo



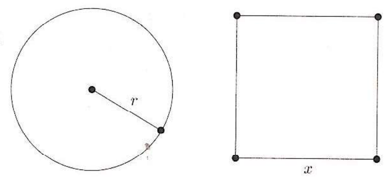
Dado um cubo de aresta a, construir um segmento de comprimento x tal que o cubo de aresta x tenha o dobro do cubo dado.

Quadratura do círculo



Dado um ângulo AOB construir um ponto X tal que o ângulo AOX tenha uma amplitude igual a 1/3 da amplitude AOB.

Duplicação do cubo



Dada uma circunferência de raio r, construir um segmento x tal que o quadrado de lado x tenha a mesma área que a circunferência.

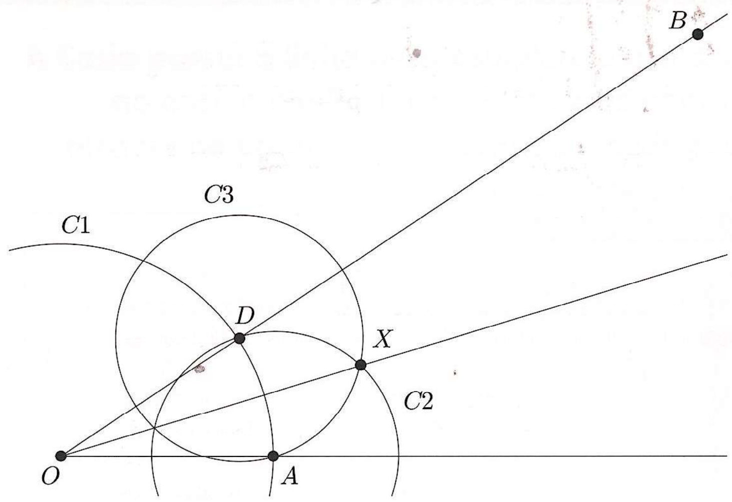


Figura 1.

Na figura 1, o ângulo dado é formado pelas semirectas OA e OB. Para podermos pôr lado a lado a construção geométrica e a resolução algébrica do mesmo problema (determinação da bissectriz), "algebrizamos o plano" com dois eixos coordenados, a recta suporte da semirecta OA e a sua perpendicular no ponto O, e tomamos para unidade o segmento OA. As coordenadas dos pontos dados serão então $O(0,0)$, $A(1,0)$ e $B(p,q)$, em que p,q são dois números reais.

Construção geométrica. Como é sobejamente conhecido, as construções geométricas euclidianas estão sujeitas a regras precisas:

- podemos utilizar dois instrumentos, a *régua não graduada* e o *compasso euclidiano*, com os quais é permitido:
  régua não graduada: dados dois pontos K e L, construir a recta definida por esses dois pontos (bem como o segmento KL e as semirectas KL e LK);
  compasso euclidiano: dados dois pontos K e L, construir a circunferência de centro K e passando por L;
- a construção de novos pontos, para além do conjunto dado inicialmente, é obtida pela intersecção de duas rectas, de uma recta com uma circunferência ou de duas circunferências (*Euclides não assume explicitamente esta regra, mas usa-a constantemente*).
  Na construção pedida na *proposição I.9.*, o conjunto de pontos inicialmente dado é formado pelos pontos A, O e B. E os passos da construção geométrica são os seguintes:

1. construção da semirecta OB;
2. construção da circunferência c_1, de centro O e passando por A;
3. construção do ponto D, intersecção da circunferência c_1 com a semirecta OB;
4. construção da circunferência c_2, de centro A e passando por D;
5. construção da circunferência c_3, de centro D e passando por A;
6. construção do ponto X, uma das intersecções das circunferências c_2 e c_3.
7. construção da semirecta OX, bissectriz do ângulo AOB.

Como sempre, Euclides não termina aqui: tendo proposto uma construção, é necessário provar que a construção resulta realmente na bissectriz. Aceitamos a demonstração de Euclides, mas aconselhamos vivamente o leitor a não deixar de ter o prazer de a ler[2]. Interessa-nos aqui fazer alguns comentários aos passos da construção:

- todos eles estão conformes com as regras das construções geométricas euclidianas;
- no fundo, o que se trata essencialmente é de, tomando o conjunto de pontos A, O e B como conjunto de *partida*, ir construindo sucessivos pontos — no caso os pontos D e X — de tal modo que o último responda ao problema posto;
- na realidade, ao atingirmos o ponto X, a questão de traçar ou não a semirecta OX é claramente de somenos importância, a resolução do problema consistiu na construção do ponto X;
- temos assim uma sequência de pontos — A, O, C, D, X — em que cada um ou faz parte do conjunto de partida ou é obtido de *pontos anteriores da sequência* de acordo com as regras que enunciámos:
  — D é obtido pela intersecção da circunferência c_1 (centro O, passando por A; A e O anteriores a D) com a recta OB (O e B anteriores a D);
  — X é obtido pela intersecção da circunferência c_2 (centro em A, passando por D; A e D anteriores a E) com a circunferência c_3 (centro em D, passando por A; D e A anteriores a X).

Resolvido o problema geometricamente, passemos agora para a resolução algébrica.

Resolução algébrica. Em linguagem de programação, poderíamos dizer que a análise está feita, agora é só programar. Ou seja, a geometria serviu para perceber como se resolve o problema da determinação da bissectriz (fundamentalmente, como vimos, através da sequência de pontos A, O, B, D, X). O que vamos agora fazer (não porque seja necessário para resolver o problema, pois está completamente resolvido pela geometria) é traduzir aquela construção geométrica na linguagem algébrica. Para que vamos fazer isto, se o problema está resolvido geometricamente? Porque a geometria parece ser muito potente a resolver problemas mas tem dificuldade, não parece ser capaz de mostrar que certos problemas, nomeadamente os famosos problemas que referimos no princípio deste artigo, não admitem solução! Portanto o que pretendemos é perceber como a álgebra resolve os problemas de construções geométricas, não para resolver os resolúveis ... mas para detectar os insolúveis recorrendo à álgebra ...!

A geometria analítica, iniciada por Descartes e Fermat, permite-nos colocar claramente o problema em termos algébricos:

- dados os pontos A, O e B, construímos um modelo do plano euclidiano através de um sistema de eixos coordenados cartesianos, com a origem em O e com a unidade igual ao segmento OA;
- designamos as coordenadas de B por (p,q), e pretendemos determinar as coordenadas do ponto X;
- sabemos traduzir em equações as figuras (rectas e circunferências) usadas na construção de D e de X;
- e sabemos também que, sendo os pontos D e X obtidos por intersecção de uma recta com uma circunferência e de duas circunferências, respectivamente, em termos algébricos o que há a fazer é resolver dois sistemas de equações.

Mãos à obra, portanto...

- recta OB
  - equação: $y = \frac{q}{p}x$
- circunferência c_1 (centro O, passando por A)
  - equação: $x^2 + y^2 = 1$
- ponto D (intersecção da recta e da circunferência anteriores)
  - sistema de equações

$$\begin{cases} y = \frac{q}{p}x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

  - resolução

$$\begin{cases} y = \frac{q}{p}x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2} \\ y = \frac{q\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2} \end{cases}$$

  - coordenadas de D

$$D\left(\frac{p\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2}, \frac{q\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2}\right)$$

  - raio das circunferências c_2 e c_3

$$\sqrt{\left(\frac{p\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{q\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2(p^2+q^2-p\sqrt{p^2+q^2})}{p^2+q^2}}$$

- equações das circunferências c_2 e c_3

$$c_2\colon (x-1)^2 + y^2 = \frac{2\left(p^2+q^2-p\sqrt{p^2+q^2}\right)}{p^2+q^2}$$

$$c_3\colon \left(x - \frac{p\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2}\right)^2 + \left(y - \frac{q\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{2\left(p^2+q^2-p\sqrt{p^2+q^2}\right)}{p^2+q^2}$$

- coordenadas do ponto X
  - as coordenadas de X são as soluções do sistema de equações formado pelas equações das circunferências c_2 e c_3; obtemos (depois de cálculos laboriosos ..., de preferência feitos com um programa de cálculo simbólico, por exemplo o *Derive*[3]), dois pontos;
  - escolhemos neste caso aquele que corresponde ao ponto X da figura
- abcissa de X:

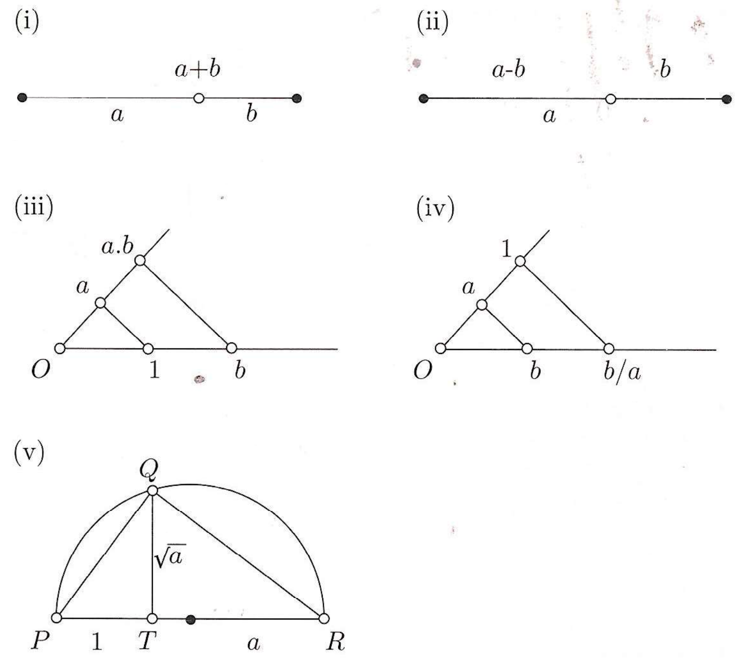
$$\frac{1}{2} + \frac{(p+q\sqrt{3})}{2(p^2+q^2)}\sqrt{p^2+q^2}$$

- ordenada de X:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(q+p\sqrt{3})}{2(p^2+q^2)}\sqrt{p^2+q^2}$$

Observações em relação aos resultados anteriores

- Geometricamente, o ponto X é construtível ou euclidiano, ou seja, pode ser obtido através da construção com régua não graduada e compasso euclidiano de uma sequência finita de pontos A, O, B, D, X, em que na construção de cada ponto se utilizam apenas pontos anteriores da sequência.
- Algebricamente, as coordenadas de X são obtidas a partir das coordenadas de A, O e B mediante operações racionais (adições, subtracções, produtos e divisões) e extracções de raizes quadradas. Essas operações e extracções são naturalmente em número finito e envolvem números racionais e eventualmente números não racionais. Com efeito, mesmo nos dados, neste caso, as coordenadas de B podiam não ser racionais. Mas mesmo partindo apenas de pontos com coordenadas racionais podemos ter que extrair raizes quadradas de raizes quadradas de números que não sejam quadrados perfeitos, dado que as coordenadas do ponto solução, X, vão depender da resolução de sistemas de equações em que uma ou duas das equações podem ser do segundo grau. Note-se que neste exemplo os valores da abcissa e ordenada do ponto X envolvem $\sqrt{3}$ e $\sqrt{p^2+q^2}$. Se a determinação da bissectriz fosse apenas um passo intermédio da construção, e nos passos seguintes houvesse que



Notas:
1. Nos esquemas (iii) e (iv), os segmentos Oa, Ob, etc têm por comprimentos a, b, etc.
2. (i) e (ii) são óbvios, (iii) e (iv) provam-se recorrendo ao teorema de Tales; (v) (que mostra como se constrói a raíz quadrada de um segmento dado a) prova-se recorrendo à semelhança dos triângulos PTQ e QTR.

Figura 2.

determinar intersecções de circunferências com rectas ou circunferências, como nas equações destes objectos haveria coeficientes envolvendo $\sqrt{3}$ e $\sqrt{p^2+q^2}$, as coordenadas do ponto solução envolveriam muito provavelmente

$$\sqrt{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \sqrt{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

A teoria dos corpos numéricos, desenvolvida no início do século XIX, e das suas extensões quadráticas — por exemplo, a extensão quadrática $Q(\sqrt{3})$ é o conjunto (corpo) dos números reais da forma $a + b\sqrt{3}$, em que a e b são números racionais — desempenha como é previsível um papel fundamental no tema que estamos a tratar. Para uma descrição completa das questões algébricas que são necessárias para as demonstrações de impossibilidade, ver por exemplo o livro de George Martin.

- Podemos analisar a conexão que estamos a estudar em dois sentidos:
  - *Da geometria para a álgebra:* como a resolução geométrica da construção euclidiana de um ponto implica apenas *um número finito* de intersecções de rectas com rectas, de rectas com circunferências ou de circunferências com circunferências, as operações necessárias para a obtenção algébrica das coordenadas desse ponto são em número finito e apenas as descritas anteriormente (operações racionais e extracções de raizes quadradas).
  - *Da álgebra para a geometria:* Descartes introduziu, no início da sua Geometria, a chamada álgebra dos segmentos (melhor dizendo, dos comprimentos dos segmentos). Como diz Lebesgue, é na realidade uma álgebra dos números reais que prova que as operações racionais e as extracções (mesmo sucessivas) de raizes quadradas de números reais podem ser feitas por régua não graduada e compasso euclidiano (ver figura 2).

É precisamente esta conexão, esta equivalência entre um *tipo específico de construções geométricas* e um *conjunto específico de operações algébricas* que permitiu resolver, pela negativa — ou seja, pela demonstração da sua impossibilidade — os três famosos problemas da geometria grega. Um modo de exprimir esta equivalência, cuja demonstração rigorosa se pode encontrar, por exemplo, no livro de Lebesgue, é o seguinte:

Seja dado um conjunto inicial finito de pontos A, B, ... E, cujas coordenadas são p_1, p_2, ... , p_n. Existe equivalência entre as duas afirmações seguintes:

- o ponto X é construtível, com régua não graduada e compasso euclidiano, a partir dos pontos dados;
- as coordenadas de X podem ser expressas algebricamente num número finito de operações racionais e extracções de raizes quadradas, a partir das coordenadas p_1, p_2, ..., p_n.

Como aplicação concreta, verifique o leitor que as coordenadas de X, ponto construtível no exemplo anterior, verificam as condições indicadas neste enunciado.

As três impossibilidades

Limitamo-nos a breves referências históricas sobre as demonstrações de impossibilidade. Ver a secção final para indicações bibliográficas.

A duplicação do cubo

Se a aresta OA do cubo dado for a unidade $[O(0,0), A(1,0)]$, e pretendemos determinar com régua não graduada e compasso euclidiano o ponto $X(x,0)$ que resolve o problema da duplicação do cubo, a abcissa x será obtida resolvendo a equação

$$x^3 - 2 = 0$$

Pierre Wantzel (1814–1848) demonstrou em 1837 que a equação anterior não nem nenhuma raiz que possa ser obtida por operações racionais e extracções de raizes quadradas a partir dos seus coeficientes, provando assim a impossibilidade da problema da duplicação do cubo.

Trissecção do ângulo

No mesmo artigo em que demonstra a impossibilidade da duplicação do cubo, Wantzel demonstra também a impossi-

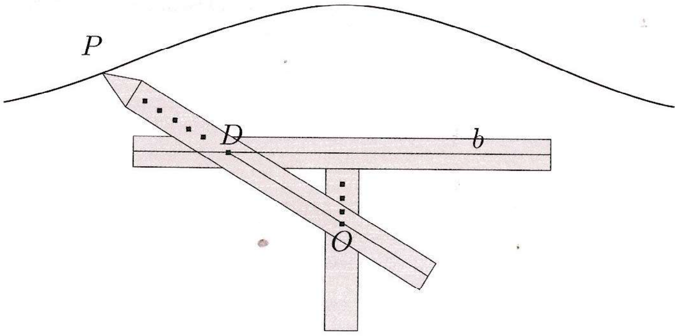


Figura 3.

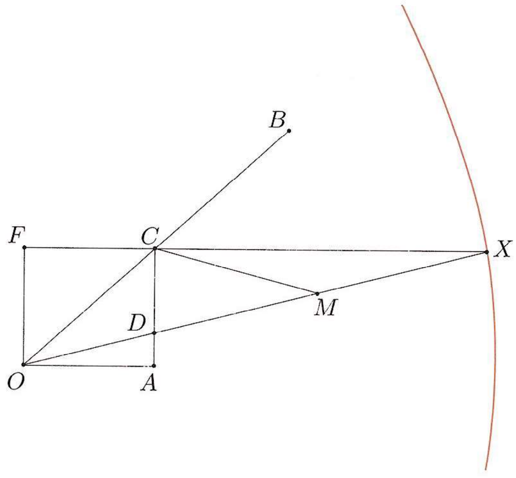


Figura 4.

bilidade da trissecção do ângulo. Mas neste caso eu aconselho o leitor a ler a demonstração apresentada por Robert Yates no seu aclamado livro sobre o problema da trissecção.

Quadratura do círculo

Este problema tem um carácter diferente dos dois anteriores. Para compreender este facto, devemos começar por dar uma definição:

Número algébrico é qualquer número que seja solução de uma equação

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + kx + l = 0 \quad (a \neq 0)$$

em que a, b, c, ..., k, l são inteiros.

No problema da quadratura do círculo é dado um segmento r, que podemos tomar como sendo a unidade. Então todos as coordenadas dos pontos construtíveis a partir desse par de pontos pertencem a uma iteração de extensões quadráticas do corpo racional, e prova-se que os números destes conjuntos são números algébricos[4]. Portanto, para provar que π não é abcissa de um ponto construtível, basta demonstrar que π não é um número algébrico. ou seja que é transcendente. Charles Hermite (1822–1901) demonstrou em 1873 que e é um número transcendente. Utilizando ideias análogas, F. Lindemann (1852–1939) demonstrou em 1882 que π é transcendente[5].

A trissecção pela conchóide de Nicomede

A trissecção é impossível, em geral, utilizando apenas os instrumentos euclidianos, mas foram inventados muitos outros instrumentos — ver o livro de Yates — com os quais é possível dividir qualquer ângulo em três partes iguais. O mais antigo é o traçador de conchóides (figura 3) imaginado pelo geómetra grego Nicomede, que viveu no séc. III a.C.

Na figura 3, a haste horizontal é chamada a *base*, e na sua ranhura central b desloca-se um pivô D fixo numa outra haste que tem uma ponta seca P, com a qual se traça a conchóide. A haste DP tem uma ranhura que desliza no pivô O, denominado *pólo* e fixo numa terceira haste perpendicular à base. Para cada posição do pólo O sobre esta haste (ver pontos sobre a haste) e cada posição de D sobre a haste DP, e respectivo *intervalo* DP, obtemos uma conchóide diferente.

A utilização da conchóide na trissecção e a correspondente demonstração — de que o problema fica realmente resolvido —, são muito simples.

O ângulo a trissectar é AOB. Constrói-se, com régua e compasso, a perpendicular AC a OA, o rectângulo $OACF$ e a semirecta FC. Depois traça-se, com a *base* AC, o *pólo* C e o *intervalo* DP — igual ao dobro do comprimento de OC —, a respectiva conchóide. O ponto X que resolve a trissecção é a intersecção da conchóide com a semirecta FC.

Demonstração. Constrói-se M, ponto médio de DX. Os triângulos CMX e OMC são isósceles. Portanto, se a amplitude de $\angle CMD$ for θ, a amplitude de $\angle COD$, igual à de $\angle CMD$, ângulo externo do triângulo CMX, é 2θ. Então a amplitude de $\angle AOX$, alterno interno de $\angle CXM$, é $1/3$ da de $\angle AOB$.

Note que uma régua com duas marcas, cuja distância fosse o dobro do comprimento de OC, resolvia também a trissecção: bastava deslizar a régua, mantendo-a sempre a passar pelo ponto O, até que as duas marcas estivessem uma sobre AC e outra sobre a semirecta FC (determinando assim o ponto X). Como diria George Martin, isso seria ainda outro jogo com outras regras, não as de Euclides, em que a régua a usar é expressamente não graduada ...

A conchóide de Nicomede pode ainda servir para resolver o problema da duplicação do cubo, como pode ver no livro de Henri Lebesgue.

Leituras

Como seria de esperar, a literatura matemática sobre os três problemas clássicos é muito extensa. Seguem-se alguns comentários para facilitar a escolha dos leitores deste artigo que ficaram motivados para desenvolver as suas leituras relativas a este tema. As referências completas dos livros são dadas na bibliografia, sendo a ordem adoptada aqui não relevante.

Gomes Teixeira. O volume sétimo das obras completas contém um suplemento ao seu bem conhecido *Tratado sobre Curvas Especiais* (publicado em francês). Esse suplemento tem um apêndice intitulado *Sur les Problèmes Célèbres de la Géométrie Élémentaire non Résolubles avec la Règle et le Compas*. O capítulo IV deste apêndice trata das demonstrações algébricas da impossibilidade de resolução com régua e compasso dos três problemas, de um modo claro e bastante acessível.

Felix Klein. Numa nova edição da Dover de 2003, este pequeno mas célebre livro de Klein contém os textos de um ciclo de conferências de verão (fins do séc. XIX) sobre o tema deste artigo, dirigidas a professores do ensino secundário, com a intenção de "mostrar o que a ciência moderna tem a dizer sobre a possibilidade de construções geométricas elementares".

Courant e Robbins. O livro *What is Mathematics?* é em minha opinião o melhor livro de iniciação à matemática de todos os tempos, e foi revisto por Ian Stewart e reeditado em 1996, a partir das esgotadíssimas edições dos anos 40 do século passado. O capítulo III, *Geometrical Constructions. The Algebra of Number Fields*, constitui talvez a exposição simultaneamente mais clara e completa do tema para que pretendi chamar a atenção neste artigo.

Henri Lebesgue. Em 1941 Lebesgue, já muito doente, escolheu o tema das *Constructions Géométriques* para o que viria a ser o seu último ciclo de conferências no Collège de France. O livro editado a partir dessas conferências é um testemunho exemplar de um matemático que revela na sua exposição permanentes preocupações pedagógicas.

George Martin. Para quem pretenda mesmo aprofundar o tema das construções geométricas, não apenas euclidianas mas também "só com compasso", "só com um compasso enferrujado", "só com régua graduada", "só com dobragens de papel", etc., e compreender como a álgebra permite atacar de modo completo estas diferentes situações, deve aceitar o desafio de ler o livro muito estimulante deste autor.

Robert Yates. O livro de Yates sobre a trissecção, da colecção *Classics in Mathematics Education*, do NCTM, é extremamente acessível e certamente um dos primeiros livros a consultar sobre o problema da trissecção do ângulo. Contém, além de uma introdução teórica, inúmeros exemplos de trissectores.

História da Matemática. O tema das construções geométricas está naturalmente associado a questões da história da geometria e da matemática em geral. Felizmente já temos em português o livro da Universidade Aberta que pode ser um bom auxiliar. Obviamente um livro a consultar sobre a geometria grega é o livro de Heath.

Notas

1. Sobre a história destes problemas e soluções "não ortodoxas" ver *Geometria: temas actuais*, pág. 41–55.
2. Um modo prático de ter sempre à mão os *Elementos de Euclides*, ainda por cima numa edição anotada e com figuras interactivas, é colocar nos seus *bookmarks* ou favoritos o esplêndido *site* `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html`
3. A solução apresentada foi obtida no *Derive* (obrigado, Adelina Precatado!) e confirmada no *Mathematica* (obrigado, Arala Chaves!).
4. Ver, por exemplo, o livro de Courant, pág. 133.
5. V. Katz, *History of Mathematics: An introduction*, pág. 598–99.

Bibliografia

Conway, John H. e Guy, Richard K. *O Livro dos Números*. Universidade de Aveiro/Gradiva, 1999.

Courant, Richard e Robbins, Herbert. *What is mathematics?*. Segunda edição revista por Ian Stewart. New York: Oxford University Press, 1996.

Estrada, M. Fernanda et al. *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

Gomes Teixeira, F. *Obras de Matemática*. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1915.

Heath, Sir Thomas. *A History of Greek Mathematics*. New York: Dover Publications Inc., 1981.

Katz, Victor J. *A History of Mathematics: An introduction*. HarperCollins, 1992.

Klein, Felix. *Famous Problems of Elementary Geometry*. New York: Dover Publications Inc, 2003.

Lebesgue, Henri. *Leçons sur les Constructions Géométriques*. Paris: Éditions Jacques Gabay, 2003.

Martin, George. *Geometric Constructions*. New York: Springer, 1998.

Veloso, Eduardo. *Geometria: temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

Yates, Robert C. *The Trisection Problem*. Reston: NCTM, 1971.

Eduardo Veloso