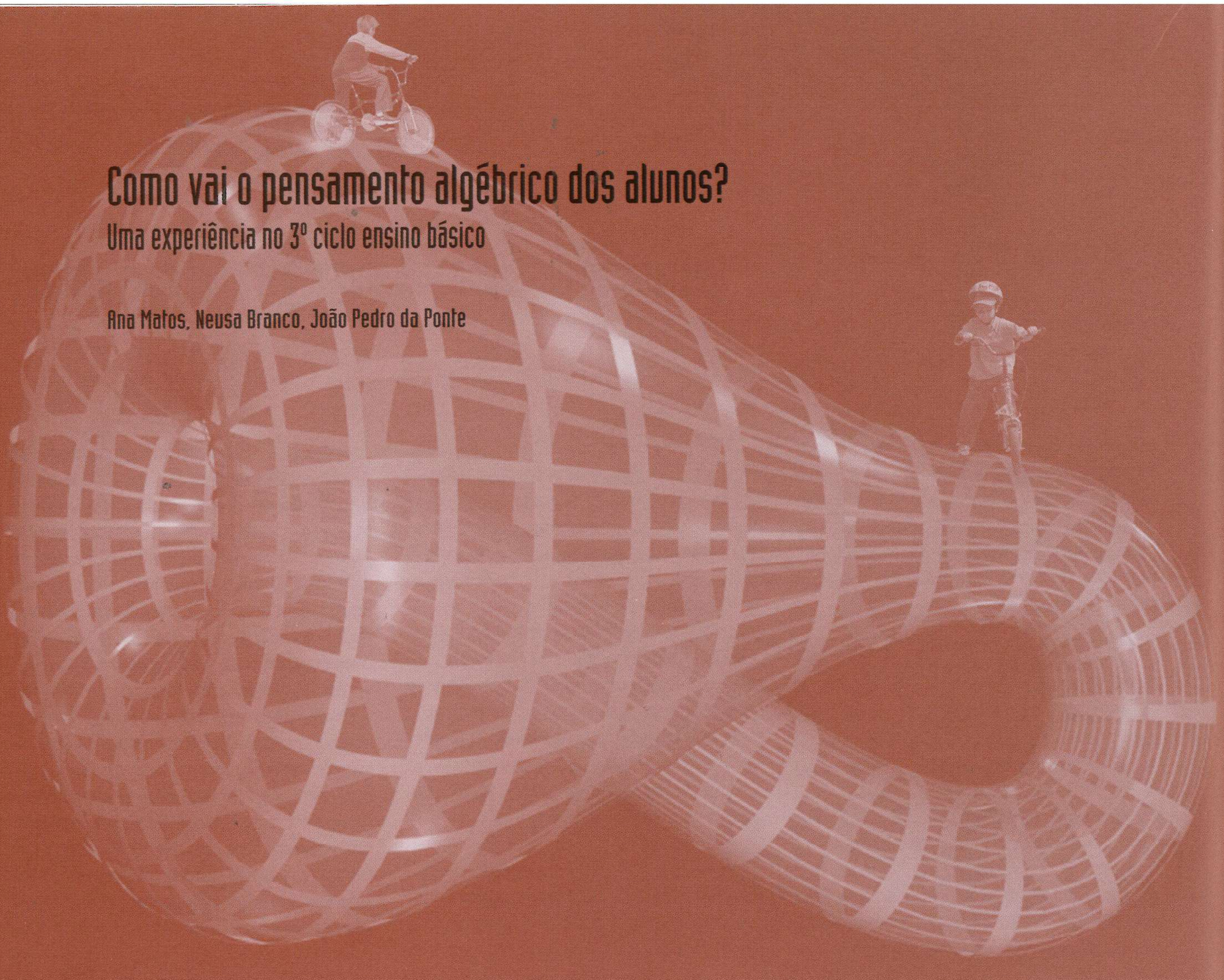
Como vai o pensamento algébrico dos alunos?

Uma experiência no 3º ciclo ensino básico

Ana Matos, Neusa Branco, João Pedro da Ponte



A Álgebra pode ser encarada sob diversas perspectivas e assumir maior ou menor visibilidade no currículo. Em Portugal, nos programas de Matemática, para o ensino básico (ME–DGEBS, 1991), a Álgebra surge com maior incidência no 3° ciclo. No entanto, o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME–DEB, 2001), para além dos objectivos específicos definidos para esse ciclo, estabelece um conjunto de objectivos gerais de aprendizagem no domínio "Álgebra e Funções", a atingir ao longo dos três ciclos de escolaridade. A importância dada neste texto ao desenvolvimento do pensamento algébrico vai ao encontro de discussões que se têm realizado em diversos países, sugerindo que os alunos podem e devem começar bastante cedo a viver experiências de aprendizagem que os preparem para um futuro contacto com símbolos e expressões algébricas.

Além disso, tem sido sublinhada a necessidade de proporcionar aos alunos oportunidades que os levem a encarar a Álgebra, não só como um assunto que é preciso dominar, mas também como uma ferramenta que é importante saber mobilizar em diferentes situações. Deste modo, a aprendizagem da Álgebra não deve fechar-se em si mesma, mas sim habilitar os alunos a tirar partido dela, em diferentes contextos (Kooij, 2002).

A discussão sobre o que são os aspectos essenciais da Álgebra escolar e quais as formas adequadas de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico tem sido particularmente viva em muitos países e em diversos encontros internacionais. O mesmo não tem acontecido em Portugal, onde não tem sido dada uma atenção significativa a este tema. É tempo, no entanto, de começarmos a participar activamente neste debate. Este artigo pretende ser um pequeno contributo nesse sentido, relatando uma experiência realizada com alunos do 3° ciclo.

O pensamento algébrico

Kaput (1999) defende que a Álgebra deve ser entendida de uma forma muito mais ampla, profunda e rica do que acontece tradicionalmente. Do seu ponto de vista, o pensamento algébrico pode tomar diversas formas que se interligam. Assim, considera que os alunos devem realizar actividades envolvendo a exploração da Aritmética como um domínio propício para a expressão e formalização de generalizações (Aritmética generalizada) e a generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional). Sublinha, igualmente, a modelação como oportunidade de exprimir e formalizar generalizações e a própria generalização sobre estruturas abstractas. Desta forma, ao procederem a generalizações a partir das suas concepções e experiências em vez de procederem a uma mera aplicação de regras de manipulação simbólica, sem atenderem ao significado dos símbolos, os alunos estarão a revelar alguns aspectos do pensamento algébrico.

1. Notem que os objectos abaixo indicados têm todos preços diferentes. Será que os conseguem descobrir? Expliquem a vossa resposta com todo o promenor.

Figura 1. Ás voltas com os preços ...

Esta perspectiva inspira os *Principles and Standards* do NCTM (2000), que indicam que o currículo de Matemática, relativamente ao tema da Álgebra, deve possibilitar a todos os alunos: (i) a compreensão de padrões, relações e funções; (ii) a representação e análise de situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos; (iii) a utilização de modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e (iv) a análise da variação, em diversas situações. Entendida desta forma, a Álgebra constitui uma componente importante do currículo que o unifica e lhe dá consistência. Daí que esta organização defenda o lema "Álgebra para todos".

A experiência

As tarefas[1] que aqui apresentamos, e às quais nos referiremos em detalhe, foram propostas em quatro turmas do ensino básico em 2004/05. Estas constituem uma forma de os alunos tomarem contacto com situações não rotineiras e desafiantes, susceptíveis de lhes proporcionar novas experiências de aprendizagem. As tarefas proporcionam, nomeadamente, a oportunidade de verificar relações entre variáveis e fórmulas e de procurar soluções de equações, bem como, de analisar relações numéricas em situações concretas, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las por diferentes processos (ME–DEB, 2001). Note-se que as tarefas em causa não fazem, necessariamente, apelo a conhecimentos específicos e que os próprios alunos podem decidir de que forma utilizar os dados fornecidos, explorando caminhos diversificados.

As tarefas foram resolvidas por 36 alunos de duas turmas do 7° ano e por 43 alunos pertencentes a três turmas do 8° ano, de duas escolas da região de Lisboa e Vale do Tejo, no início do 3° período. No 8° ano, pelo facto de ter ocorrido uma situação muito particular em que uma das três turmas realizou uma visita de estudo, as tarefas foram resolvidas, individualmente, por Rodrigo, o único aluno que não participou nessa actividade. Os alunos do 7° ano, no momento em que resolveram estas tarefas ainda não tinham estudado o capítulo *Equações*, previsto para este ano de escolaridade, pelo que a sua exploração constituiu o ponto de partida para a aprendizagem deste tópico. Todos os alunos do 8° ano tinham estudado na íntegra o capítulo *Equações*, incluído no programa deste ano de escolaridade, à excepção de Rodrigo.

Em todas as turmas, desde o início do ano lectivo, os alunos trabalhavam, habitualmente, de forma colaborativa. Estas tarefas foram resolvidas em grupos de dois ou três alunos, tendo sido, em todos os casos, fornecida apenas uma ficha de trabalho a cada um dos grupos.

Inicialmente, tínhamos previsto a resolução das três tarefas numa única aula de 90 minutos. No entanto, a sua exploração por parte dos alunos do 7° ano demorou mais tempo. Assim, à maior parte destes alunos foram propostas, apenas, a primeira tarefa e a questão 2.1. da tarefa seguinte. Alguns grupos de alunos do 8° ano, pelo mesmo motivo, também não resolveram a questão 2.2. A discussão colectiva de cada uma das tarefas foi efectuada numa aula posterior. Após a sua resolução, recolhemos os registos escritos dos alunos e procedemos à sua análise, com o intuito de identificar as suas estratégias e observar as suas reacções às tarefas propostas.

Do nosso ponto de vista, estas tarefas poderiam proporcionar aos alunos uma oportunidade para pensarem genericamente e para estabelecerem relações entre diversas variáveis em simultâneo, tendo em conta as condições a satisfazer em cada caso. Através da sua resolução de forma colaborativa e da elaboração de um registo escrito pretendíamos levar os alunos a argumentar e comunicar, oralmente e por escrito. Na nossa análise procuramos verificar até que ponto isso realmente aconteceu.

Ás voltas com os preços ...

Na primeira tarefa proposta existem três montras diferentes, cada qual com o preço total indicado na figura respectiva (Figura 1). De cada montra fazem parte apenas dois objectos, de entre os três cujo preço desconhecemos: a bola, o livro ou a mochila. Pretende-se que os alunos determinem os preços de cada um deles.

Quando iniciam a resolução da tarefa, os grupos manifestam algumas dificuldades na interpretação do enunciado e tentam certificar-se de que estão a compreender exactamente o que lhes é pedido. A sua primeira dúvida é se o número indicado em cada figura é o preço total da montra ou o preço de apenas um dos objectos. Após a clarificação des-

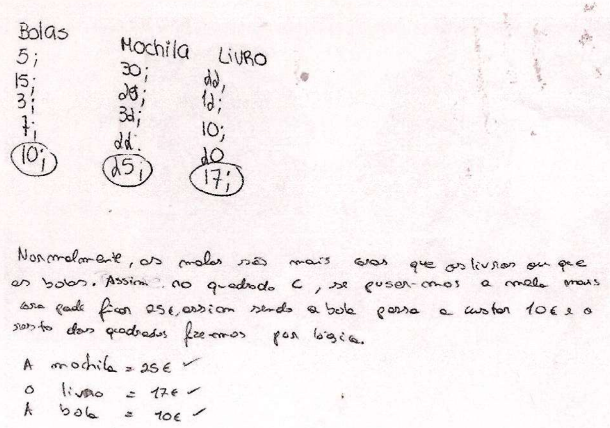


Figura 2. Jéssica, Nádia e Sandra, 7º ano[2].

te aspecto, os alunos iniciam o trabalho da forma que lhes parece mais adequada. Logo nas primeiras tentativas surge uma nova questão, relativa ao preço de cada objecto poder, ou não, variar de montra para montra. A professora esclarece que, neste caso, o preço de cada objecto é sempre o mesmo, independentemente da montra em que esteja colocado. Durante a exploração da tarefa, alguns alunos questionam, ainda, se o preço de cada objecto pode não ser um número natural, hipótese que se põe de parte.

No que diz respeito às estratégias desenvolvidas, pelos grupos de trabalho, podemos estabelecer algumas distinções às quais nos referiremos de seguida.

Processo de tentativa-erro influenciado por vivências prévias

Grande parte dos alunos começa por atribuir um valor, mais ou menos ao acaso, a um dos objectos numa das montras, indo em seguida verificar se as restantes condições são, ou não, satisfeitas. Pela interacção gerada entre eles percebemos que muitos grupos atribuem um valor, não pela análise e comparação dos dados fornecidos, mas com base na sua experiência pessoal, supondo que o objecto mais barato é a bola, por imaginarem que assim sucede numa loja de verdade.

Na resposta que apresentamos na figura 2 é nítida esta estratégia:

Processo de tentativa-erro orientado pela análise das condições do problema

Noutros casos, os alunos, apesar de terem chegado a uma solução através de tentativas partem de algumas relações a que chegam analisando as condições indicadas no problema e estabelecendo relações entre os preços dos diversos objectos. Nos exemplos que se seguem, os alunos tecem considerações quanto aos objectos de preço mais elevado.

Se a bola com a mochila é mais cara que a bola e o livro, então a mochila é mais cara que o livro.

(Andreia e Lídia, 8° ano)

Estas alunas estabelecem comparações entre duas montras, de modo a que o objecto comum não interfira e seja possível retirar conclusões acerca dos restantes objectos.

A diferença da figura 1 e a figura 2 é de 15 €.
A diferença da figura 1 e a figura 3 é de 7 €.
A diferença da figura 2 e a figura 3 é de 8 €.
A mochila é a mais cara.
A diferença da mochila e da bola é de 15 €.

(Amélia e Marcelo, 7° ano)

Neste caso, os alunos, partindo da diferença dos preços totais das montras, conseguem determinar as diferenças entre os preços de cada um dos objectos de um dado par.

Rodrigo apresenta também um processo de tentativas orientado pelas condições do problema, embora utilize já uma linguagem mais formal. A sua estratégia é constituída por várias etapas:

$M + L = 42$
$L + B = 27$
$B + M = 35$

A mochila é a mais cara porque somada com o livro dá o valor + elevado portanto ela e o livro são os mais caros, como ela somada com a bola é mais cara que o livro quando somado com a bola também então a mochila é a mais cara.

A bola tem que ter um preço que seja menos de metade de 35 e de 27.

A mochila tem que ter um preço que seja mais de metade de 42 e de 35.

O livro tem que ter um preço que seja mais de metade de 27 e menos de metade de 42.

Bola	> 0 € e $< 13,5$ €	9 €	10 €
	> 0 € e $< 17,5$ €		
Mochila	> 21 € e < 42 €	24 €	25 €
	$> 17,5$ € e < 35 €		
Livro	> 0 € e < 21 €	18 €	17 €
	$> 13,5$ € e < 21 €		

(Rodrigo, 8° ano)

Numa primeira fase, o aluno traduz os dados do problema para uma linguagem simbólica, afirmando oralmente que assim consegue uma melhor visualização e compreensão de todos os elementos fornecidos[3]. De seguida, passa ao estabelecimento de limites possíveis para os preços dos objectos. Embora não o tenha explicitado por escrito, é notório que os comparou previamente. Essa comparação aliada à determinação de metade do preço de cada montra, permite-lhe enquadrar os diferentes preços. A terceira fase da resolução surge de um processo de tentativas que são orientadas pelos limites inferior e superior já estabelecidos. Em primeiro lugar selecciona para preço da bola, o valor de 9 € e, partindo da expressão $L + B = 27$, verifica que o livro tem que custar 18 €. Em seguida, recorrendo à expressão $M + L = 42$, obtém o valor de 24 € para o preço da mochila. No entanto, usando estes valores, a condição $B + M = 35$ não é satisfeita, o que indica a necessidade de formular nova tentativa. Desta feita, fixa para o preço da bola o valor de 10 €,

2. Cada um dos sólidos geométricos da figura tem um peso diferente. Será que conseguem descobrir os pesos de todos eles? Descrevam por escrito o vosso raciocínio com todo o promenor.

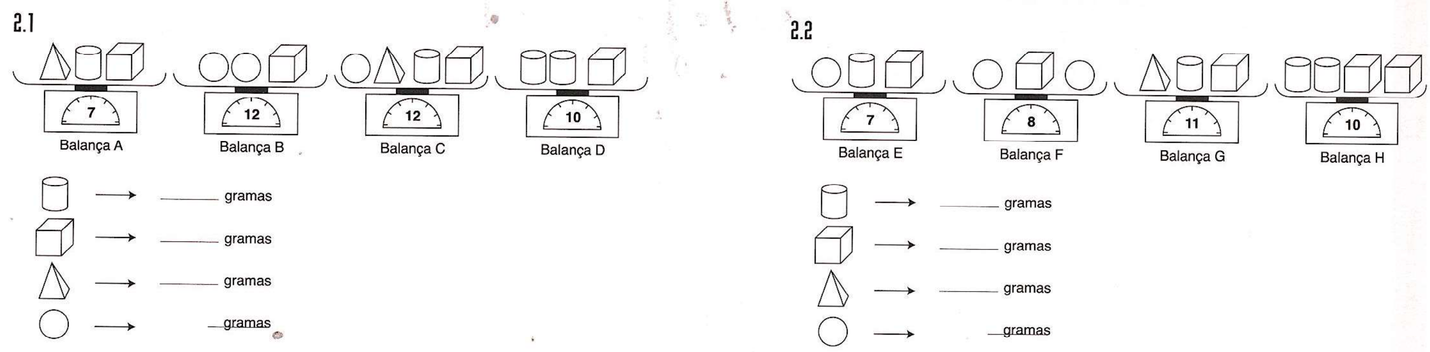


Figura 4. Quanto pesam os sólidos?

pelo que, por um processo análogo, a solução do problema é encontrada.

Desempenho geral

De uma forma geral, nas turmas do 7° ano, a maior parte dos grupos determina correctamente os preços dos três objectos. Amélia e Marcelo são os únicos alunos que não o chegam a fazer. Contudo, estabelecem várias relações entre os preços dos objectos, ocupando grande parte do tempo da aula com essa exploração. Já no 8° ano, 17 dos 21 grupos conseguem resolver o problema. Apenas 4 grupos, apesar das muitas tentativas que efectuam, não chegam, efectivamente, à sua solução.

Por ser uma tarefa com características pouco habituais, alguns alunos dos 7° e 8° anos manifestam dificuldades iniciais que só conseguem superar quando, por algum processo, se envolvem na exploração da situação proposta. No entanto, a descoberta da solução do problema, ou até de algumas relações matemáticas interessantes relativas aos preços dos objectos, constituem momentos entusiasmantes de que muitos dos alunos revelam gostar bastante.

Quanto pesam os sólidos?

A tarefa seguinte é constituída por duas situações que envolvem balanças, sendo pedido aos alunos que determinem os pesos de cada um dos sólidos geométricos e que descrevam o raciocínio que sustenta a sua resposta (Figura 4). Mais uma vez a tarefa suscita algumas dúvidas aos alunos, que questionam, em primeiro lugar, se todos os sólidos do mesmo tipo pesam o mesmo, nas diferentes balanças. Para além disso, os alunos questionam-se se os pesos podem, ou não, tomar valores decimais. Uma vez esclarecidos sobre o facto de só poderem utilizar números naturais iniciaram o seu trabalho.

Processo de tentativa-erro

No exemplo seguinte, relativo à questão 2.2, a estratégia adoptada pelos alunos baseia-se num processo de tentativa-erro que lhes permite, por experimentação, obter os valores que satisfazem todas as condições, em simultâneo.

Se a esfera pesar 2 gramas na balança F duas esferas pesam 4 gramas por isso só sobram 4 gramas que são as do cubo. Na balança E o peso da esfera e do cubo dá 6 gramas por isso só sobra 1 grama que é o peso do cilindro. Na balança G se somarmos o peso do cubo e do cilindro é 5 gramas por isso só sobra 6 gramas que são as da pirâmide. Na balança H o valor do peso é 10 gramas porque o peso dos cubos dá 8 gramas e o valor dos dois cilindros dá 2 gramas por isso o resultado é 10 gramas.

(Raul e Vasco, 8° ano, questão 2.2.)

Processo de estabelecimento de relações seguido de tentativa-erro

Outra estratégia também usada por alguns dos grupos passa pela combinação entre o estabelecimento de relações e a realização de tentativas. Os alunos comparam algumas das balanças e, baseando-se nessas comparações, estabelecem novas relações entre os pesos dos sólidos, terminando com novo processo de experimentação, como sucede no caso seguinte:

A esfera é o que pesa mais. A pirâmide pesa menos 3 gramas que o cilindro [comparam as balanças A e D]. Se o cilindro pesar 4 e o cubo 2 a balança D está resolvida. Se a esfera pesar 5 e a pirâmide 1 então: $5 + 1 + 2 + 4 = 12$ [Balança C]
A balança B fica: $5 + 5 + 2 = 12$
A balança A fica: $1 + 4 + 2 = 7$.

(Andreia e Lídia, 8° ano, questão 2.1.)

Processo de estabelecimento de relações

Uma terceira estratégia também usada envolve apenas o estabelecimento de relações. Assim, no exemplo que se segue, há a salientar o facto de os alunos iniciarem o seu trabalho de forma semelhante aos anteriores, embora a sua estratégia se baseie, até ao final, nas relações que vão estabelecendo entre as variáveis, nunca recorrendo à experimentação (figura 5).

Os alunos de um outro grupo apresentam um raciocínio semelhante, embora tenham pontos de partida diferentes para o seu desenvolvimento. Ao partirem de balanças distintas, as relações que começam por estabelecer são também diferentes.

Balança B e Balança C pesam o mesmo.
O Prisma e o celindro pesam o mesmo que a espera

O Prisma e ci

o prisma, o cedinero, o cubo pesam os 3 sete e na
badança C tem a efera por isso, Faz-se 12 - 7 = 5
badança B

2 esferas = 10 > 12
1 cubo = 2

Badança D:
cubo - 2
cidicros = 8
8 : 2 = 4

Badança A:
cubo + cedinero = 6
prisma = 1
6 + 1 = 7

Figura 5. Adelaide e Noé. 8º ano, questão 2.1.

Se tirarmos a esfera da Balança C e compararmos com a A a esfera vai pesar 5 gramas.
O cubo pesa 2 gramas porque duas esferas pesam 10 gramas e só sobram 2 gramas que são as do cubo.
O cilimdro pesa 4 gramas porque na balança D o cubo pesa 2 gramas sobram 8 gramas dos dois cilimdros por isso um cilimdro pesa 4 gramas.
Se na balança A o cubo pesa 2 gramas, o cilimdro 4 e somarmos dá 6 gramas por isso a pirâmide pesa 1 grama porque entre o pes os dois sólidos e o peso dos três dá 1 grama.

Figura 6. Raul e Vasco. 8º ano, questão 2.1.

Desempenho geral

Analisando o desempenho dos alunos do 7º ano nestas tarefas, de uma forma global, verificamos que a maior parte dos alunos consegue solucionar o problema por processos intuitivos. No entanto, três dos grupos não apresentam a solução correcta, dado que a sua resposta não satisfaz as condições expressas em todas as balanças, mas em apenas algumas delas.

Quanto aos alunos do 8º ano, um grupo não responde à questão 2.1 e um outro grupo não o faz de forma correcta. Na questão 2.2, dos grupos que procuram responder, apenas um não chega à solução. Duas das turmas do 8º ano que participam nesta experiência têm desempenhos bastante distintos, apresentando uma delas, claramente, mais dificuldades na compreensão e resolução das tarefas do que a outra. O Rodrigo, único aluno da terceira turma envolvido nesta experiência, demonstra também algumas dificuldades iniciais relativamente à interpretação das tarefas e ao modo como pode iniciar a sua resolução. A reacção da generalidade dos alunos a esta tarefa é bastante positiva, sendo notório o seu empenho na resolução.

Comentários finais

Na tarefa *Quanto pesam os sólidos?*, os alunos manifestam menos dificuldades iniciais do que na tarefa *Às voltas com os preços*, talvez por conseguirem aplicar alguns processos utilizados com sucesso, na resolução da primeira tarefa. Apesar de nem todos os alunos terem tempo suficiente para resolver esta segunda tarefa, uma grande parte dos grupos que o fazem, acabam por conseguir, de algum modo, solucionar o problema. Da nossa observação apercebemo-nos de que os alunos interagem e argumentam oralmente, produzindo, de acordo com o que lhes é pedido, um breve registo escrito, que sistematiza os passos da sua exploração.

Pensamos que a experiência efectuada constitui um momento positivo para os alunos, pelo desafio que lhes proporciona, e que o seu desempenho global corresponde às nossas expectativas iniciais. Em ambas as tarefas, os alunos exploram as situações apresentadas por processos preferencialmente intuitivos, como a elaboração de tentativas e a verificação experimental da satisfação de todas as condições. Em alguns casos, o processo de tentativa-erro é efectuado de uma forma mais orientada, tendo em conta uma reflexão sobre as condições indicadas no problema. No caso particular de Rodrigo, na resolução da primeira tarefa, é evidente a análise das condições do problema e o estabelecimento de novas relações, que lhe permitem fazer tentativas muito próximas dos preços correctos dos objectos. O aluno usa ainda alguns elementos da linguagem algébrica para analisar a situação, embora não os utilize na determinação da solução. O facto de ser persistente leva-o a superar as dificuldades iniciais e a desenvolver uma estratégia distinta das utilizadas pelos alunos das outras turmas, revelando maior estruturação no seu raciocínio.

Na segunda tarefa, é de salientar o facto de apenas dois grupos utilizarem estratégias que favorecem uma maior possibilidade de generalização, estabelecendo relações entre os diversos pesos. Os alunos destes grupos revelam um tipo de pensamento mais elaborado que, desejavelmente, deveria ser acessível a um maior número de alunos.

Apesar de os alunos do 8º ano terem já estudado equações e, portanto, terem já conhecimento da linguagem algébrica, apenas um aluno, Rodrigo, a utiliza. De uma forma geral, os alunos não recorrem às aprendizagens formais realizadas no âmbito da Álgebra para a resolução de problemas, não a encarando ou não a conseguindo utilizar como uma ferramenta.

Esta experiência de ensino, concretizada no caso particular de quatro das nossas turmas, deixa-nos mais alerta para o facto de os alunos possuírem recursos intuitivos que lhes podem ser muito úteis na resolução de problemas. Para além disso, faz-nos sentir a necessidade de perceber melhor como lhes proporcionar o desenvolvimento de aspectos mais elaborados do pensamento algébrico, de modo a que a Álgebra se torne, para eles, um novo recurso a mobilizar com sucesso na resolução de problemas.

Notas

1 Estas tarefas foram adaptadas de exemplos publicados online pela associação americana Annenberg/CPB, em `http://www.learner.org/channel/courses/learningmath/algebra/index.html`, acedido em 10 de Fevereiro de 2005.

2 Há respostas muito semelhantes em vários outros grupos.

3 Tratando-se de um aluno do 8° ano de escolaridade, é natural que não tenha dado seguimento à resolução do sistema de equações, como seria possível se já tivesse estudado este tema.

Referências

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum [Versão electrónica]. Acedido em 1 de Fevereiro de 2005 de `http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/KaputAlgUnd.pdf`

ME-DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME-DGEBS (1991). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (3° ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral dos Ensinos Básico e Secundário.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Van der Kooij, H. (2002). *Algebra: a tool for solving problems?* Comunicação apresentada em "The Netherlands and Taiwan conference on common sense in mathematics education", Taipei, Taiwan [Versão electrónica]. Acedido em 12 de Julho de 2005 de http://www.fi.uu.nl/en/indexpublicaties.html

Ana Matos, Escola Secundária com 3° Ciclo Gama Barros, Cacém

Neusa Branco, Escola Básica dos 2° e 3° Ciclos Mem Ramires, Santarém

João Pedro da Ponte, Dep. de Educação da Fac. de Ciências da Univ. de Lisboa

As contas de dividir eram ensinadas como um conjunto de regras de um livro de cozinha, sem qualquer explicação sobre o modo como esta sequência particular de pequenas divisões, multiplicações e subtracções nos dava resposta certa. No liceu a extracção de raízes quadradas era-nos apresentada com veneração, como se fosse um método sagrado. Tudo o que tínhamos a fazer era recordar o que nos tinham mandado fazer. Dá a resposta certa e não te rales se não percebes o que estás a fazer. No 2° ano tive um professor de Álgebra muito competente com quem aprendi muita matemática; mas também era um bruto que se comprazia em deixar as raparigas lavadas em lágrimas. O meu interesse pelas ciências manteve-se durante todos estes anos por ler livros e revistas científicos e de ficção científica.

Tudo começou num domingo, tinha eu 5 anos, em que o meu pai me explicou, com toda a paciência, o papel do zero na aritmética, os nomes de som estranho dos grandes números e que não existe um número maior do que os outros. De súbito fui invadido por uma compulsão infantil de escrever em sequência todos os números inteiros de 1 a 1000. Não tinha folhas de papel, mas o meu pai ofereceu-me a pilha de cartões cinzentos com que as camisas chegavam da lavandaria e que ele costumava guardar; consegui atingir os 1000 um pouco depois da hora em que habitualmente ia para a cama. Desde então, a magnitude dos grandes números nunca deixou de me impressionar.

Carl Sagan