Dos números para a Álgebra. Por onde vão os alunos?

Partindo da nossa curiosidade em compreender um pouco melhor como os alunos analisam as regularidades numéricas com vista à obtenção de uma expressão algébrica fomos ouvi-los.

Seleccionámos uma questão do PISA 2000, a das macieiras, e convidámos alguns jovens de 15 anos, no final destas férias, a conversar connosco. Alguns tinham completado o 9° ano e outros o 10° ano. Procurámos que eles nos mostrassem a forma como contavam as coníferas e como relacionavam essa contagem com o número de ordem da figura. (Figura 1)

Um lavrador planta macieiras num padrão quadrangular. A fim de proteger as árvores do vento, planta coníferas à volta do pomar.

Esta situação está ilustrada no diagrama abaixo representado, no qual se pode ver a disposição das macieiras e das coníferas para um número qualquer (n) de filas de macieiras:

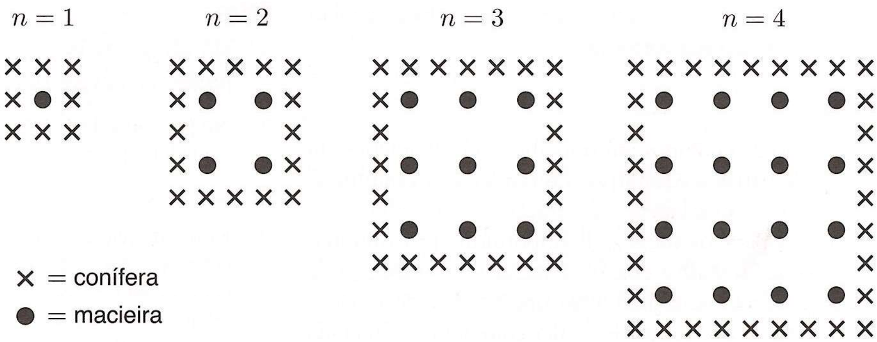


Figura 1.

Todos eles compreenderam com relativa facilidade quer o padrão geométrico quer o padrão numérico a ele associado, sendo capazes de fazer previsões para as figuras seguintes. Os processos de contagem foram no entanto diversificados, e nem todos foram capazes de chegar sozinhos a uma expressão algébrica que traduzisse a regularidade identificada.

A Inês, aluna do 9° ano, contou pelo processo ilustrado na figura 2 e previu sem dificuldade o número de coníferas nas figuras seguintes mas não chegou sozinha a uma expressão algébrica que traduzisse este número. O Miguel, aluno de 9° ano, também recorreu a este processo de contagem e a partir da observação que na fila horizontal o número de coníferas se obtinha juntando $n + 1$ ao n, concluiu que o lado horizontal podia ser representado por $(2n + 1)$ e o vertical por $(2n - 1)$, tendo chegado à expressão $[(2n + 1) \times 2 + (2n - 1) \times 2]$ para traduzir o número total de coníferas.

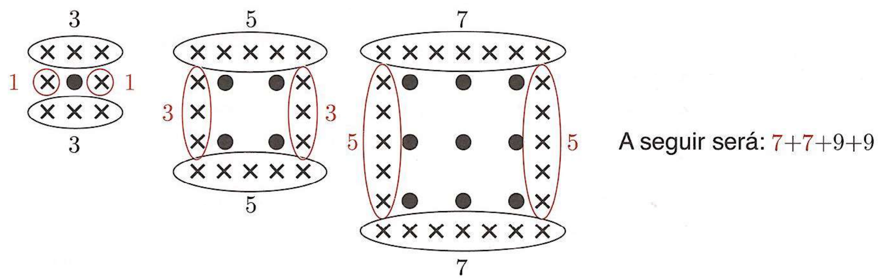


Figura 2. Inês, 9° ano, 15 anos

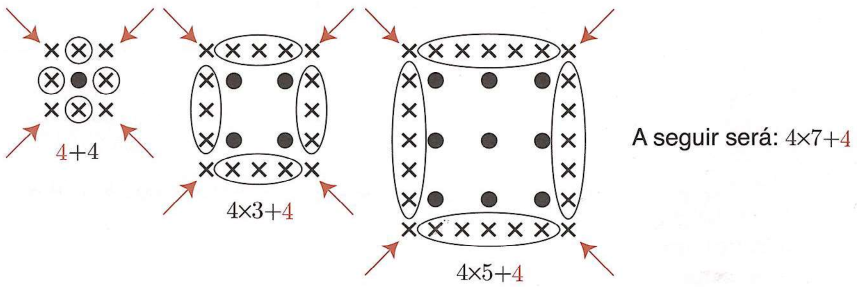
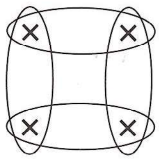


Figura 3. Pedro, 9° ano, 15 anos

Já o Sandro, aluno do 10° ano, que procedeu às contagens da mesma forma que os alunos anteriores, após ter escrito a expressão $2 \times (2n+1) + 2 \times (2n-1)$. Escreveu de seguida a expressão $4 \times (2n+1) - 4$. Perante a nossa estranheza, sobre a relação entre as duas expressões, ele explicou a nova expressão a partir do desenho:



Mostrou que se fizesse $4 \times (2n+1)$ estaria a duplicar a contagem de algumas das árvores (as dos cantos). Na verdade ele não passou algebricamente de uma expressão para outra equivalente, mas antes afinou o seu processo de contagem.

O Pedro, aluno do 9° ano, percebeu logo que para ter um bom padrão de contagem o melhor era *separar* os 4 cantos. Assim, poderia considerar quatro lados iguais aos quais teria de acrescentar os 4 cantos. (Figura 3)

O padrão de repetição desta contagem foi claramente compreendido ainda que não tivesse chegado a uma expressão algébrica. Também o João, 10 ° ano, optou por separar os cantos depois de ter verificado que conseguia emparelhar as coníferas com as macieiras (n), depois sobravam sempre as do meio $(n-1)$. E assim chegou à expressão: $4 \times (n+n-1)+4$. (Figura 4)

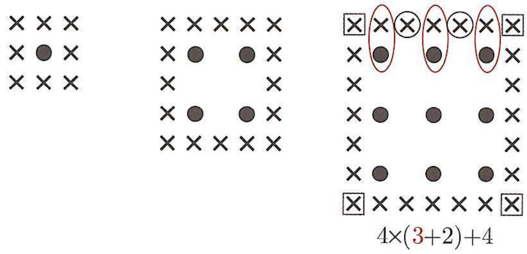
A Juliana, 10° ano, considerou que em cada lado do quadrado tinha duas coníferas para uma macieira. Na 1ª figura tinha 2 coníferas para cada macieira de cada um dos 4 lados do quadrado portanto teria 2×4 coníferas. Na 2ª figura continuava a ter 2 coníferas para cada uma das duas macieiras de cada lado, ou seja $2 \times 2 \times 4$ (duas coníferas vezes duas macieiras vezes 4 lados). E assim sucessivamente. A partir deste processo de contagem a Juliana concluiu que tem $2n+2n+2n+2n$ coníferas em cada figura. (Figura 5)

Entendendo a álgebra como uma actividade que tem a sua origem na generalização do trabalho com números [ou na generalização da aritmética] deixámo-nos surpreender pela diversidade de processos de contagem e de *algebrização* a que estes jovens nos conduziram. Esse foi o ponto de partida para o levantamento de algumas questões que gostaríamos de deixar aqui:

- Que dificuldades podem surgir na passagem do numérico para o simbólico?
- Qual a importância, para o desenvolvimento do pensamento algébrico, da partilha, por parte dos alunos, de várias formas de visualizar e de contar numa mesma situação?
- *Queimar* estas etapas não será um impeditivo para que os alunos atribuam um sentido aos símbolos?
- A sistematização dos processos de contagem destes alunos conduz a expressões diferentes mas, naturalmente, equivalentes. Será uma situação deste tipo um bom ponto de partida para discutir a equivalência de expressões algébricas?

Pense nisto!

Ana Luísa Paiva
Joana Brocardo
Manuela Pires



Para a n-ésima figura n será:
$4\times(n+n-1)+4$

Figura 4. João, 10° ano, 15 anos

Para a n-ésima figura n será:
$2n+2n+2n+2n$

Figura 5. Juliana, 10° ano, 15 anos