Álgebra no currículo escolar[1]

João Pedro da Ponte

Na maioria dos países, a Álgebra é um tema fundamental do currículo da Matemática escolar. Quem não tiver uma capacidade razoável de entender a sua linguagem abstracta e de a usar na resolução dos mais diferentes problemas e situações está seriamente limitado na sua competência matemática. No entanto, em Portugal, este tema tem merecido pouca atenção da Educação Matemática. Pouco se tem reflectido sobre o papel da Álgebra no currículo, as razões porque os alunos portugueses mostram fraco desempenho neste campo e o que poderia ser feito para melhorar as respectivas aprendizagens.

1. O que é a Álgebra?

Podemos situar as origens da Álgebra na formalização e sistematização de certas técnicas de resolução de problemas da Antiguidade — no Egipto, na Babilónia, na China e na Índia. O célebre papiro de Amhes/Rhind é um documento matemático cheio de técnicas de resolução de problemas com um marcado cunho algébrico (ver Stanic e Kilpatrick, 1989). A pouco e pouco vai-se afirmando o conceito de equação e a Álgebra passa a ser entendida como o estudo da resolução de equações ("algébricas"). Diofanto (329–409), por alguns considerado o fundador da Álgebra, desenvolve métodos aproximados para a resolução de diversos tipos de equações e sistemas dos 1.° e 2.° graus. O termo Álgebra é cunhado no século IX por al-Khwarizmi (790–840), para designar a operação de transposição de termos, essencial na resolução de equações[2].

As equações gerais dos 3.° e 4.° graus mostram-se muito mais difíceis de resolver que as dos 1.° e 2.° graus e resistem a todos aos esforços dos matemáticos até ao século XVI, altura em que são brilhantemente solucionadas por Scipione del Ferro (1465–1526) e Ferrari (1522–1565). Outra questão importante é a de saber quantas soluções pode ter uma equação algébrica de grau n (ou, noutros termos, quantos zeros pode ter uma função polinomial). O primeiro matemático a afirmar que uma tal equação tem sempre n soluções foi Girard (1595–1632) mas não o demonstrou. Este importante teorema foi sucessivamente provado e refutado por diversas vezes, numa história interessantíssima em que intervêm matemáticos famosos como Leibniz (1642–1727), Euler (1707–1783), d'Alembert (1717–1783) e Lagrange (1736–1813) e só foi resolvido por Argand (1768–1822), em 1814, e por Gauss (1777–1855), em 1816.

Dois resultados essenciais marcam a etapa final do desenvolvimento da teoria das equações algébricas: (i) a prova da impossibilidade de encontrar uma solução geral para uma equação com coeficientes arbitrários de grau superior ao 4.°, dada por Abel (1802–1829), e (ii) a formulação das condições necessárias e suficientes para que uma equação de grau superior ao 4.° tenha solução por métodos algébricos, dada por Galois (1811–1832). É este matemático quem, neste trabalho, estuda pela primeira vez a estrutura de grupo que viria a ser fundamental no desenvolvimento posterior da Álgebra.

A partir de meados do século XIX, a Álgebra conhece uma evolução profunda. O estudo das equações (algébricas) esgota-se com a demonstração do teorema fundamental da Álgebra e com a demonstração de que não existem métodos gerais (algébricos) para a resolução de equações de grau superior ao 4.°. A partir dessa altura, a atenção dos matemáticos começa a voltar-se cada vez mais para o estudo de estruturas abstractas como grupo, espaço vectorial, anel, corpo e conjunto.

Dado o modo como foi ensinada durante séculos, a Álgebra é usualmente vista como tratando de regras de transformação de expressões (monómios, polinómios, fracções algébricas, expressões com radicais) e processos de resolução de equações e sistemas de equações. Isso é testemunhado pela terminologia usada nos actuais programas portugueses do 3.º ciclo do ensino básico que, em vez de falar em "Álgebra", fala apenas em "cálculo" (referindo-se ao cálculo numérico e algébrico). Trata-se, claramente, de uma visão redutora da Álgebra, que desvaloriza muitos aspectos importantes desta área da Matemática, quer relativos à Antiguidade (onde como vimos, se destaca a ideia de resolução de problemas), quer actuais (onde se dá atenção a relações e a diversas outras estruturas algébricas), quer mesmo do período "clássico" da Álgebra (estudo de funções e da variação em geral).

Em termos epistemológicos, a natureza de cada campo da Matemática está relacionada com os objectos com que esse campo trabalha mais directamente. Podemos então perguntar — quais são os objectos fundamentais da Álgebra? Há duzentos anos a resposta seria certamente: "equações". Hoje em dia, essa resposta já não nos satisfaz, uma vez que no centro da Álgebra estão relações matemáticas abstractas, que tanto podem ser equações, inequações ou funções, como podem ser outras estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos.

2. O pensamento algébrico

A melhor forma de indicar os grandes objectivos do estudo da Álgebra, ao nível escolar, é dizer que visa desenvolver o *pensamento algébrico* dos alunos. Este pensamento inclui a capacidade de manipulação de símbolos mas vai muito além disso. Na verdade, segundo o NCTM (2000), o pensamento algébrico diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação:

- Compreender padrões, relações e funções (Estudo das estruturas),
- Representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos (Simbolização),
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas (Modelação),
- Analisar mudança em diversas situações (Estudo da variação). (p. 37)

O pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com o cálculo algébrico e as funções. No entanto, inclui igualmente a capacidade de lidar com outras estruturas matemáticas (como as relações de ordem e de equivalência) e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios.

A capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico. No entanto, o pensamento algébrico envolve também o "sentido do símbolo" (*symbol sense*), como diz Abraham Arcavi (1994), ou seja, a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na descrição de situações e na resolução de problemas. Ou seja, no *pensamento algébrico* dá-se atenção não só aos objectos mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações de modo geral e abstracto tanto quanto possível. Por isso, uma das vias privilegiadas para promover este pensamento é o estudo de padrões e regularidades.

Kaput e Blanton (2005) sugerem que o pensamento algébrico se deve tornar uma orientação transversal do currículo, à semelhança do que já acontece com o pensamento geométrico. Para estes autores, isso significa:

- Promover hábitos de pensamento e de representação em que se procure, sempre que possível, a generalização;

Caminhando

A figura mostra as pegadas de um homem a andar. O comprimento do passo, P, é a distância entre a parte de trás de duas pegadas consecutivas.

Para os homens, a fórmula

$$\frac{n}{p} = 140$$

estabelece uma relação aproximada entre n e P, em que

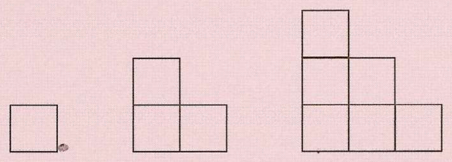
n = número de passos por minuto, e
P = comprimento do passo em metros

Figura 1. Adaptado do Pisa, p. 82.

Padrão em escada

Questão 24: Padrão em escada

O Roberto constrói um padrão em escada, utilizando quadrados. Aqui estão as etapas que ele segue:



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

Como pode ver, o Roberto utiliza um quadrado na etapa 1, três na etapa 2 e seis na etapa 3.

Quantos quadrados deverá utilizar na quarta etapa?

Resposta: .... quadrados

Figura 2. Adaptado do Pisa, p. 89.

- Tratar os números e as operações algebricamente — prestar atenção às relações existentes (e não só aos valores numéricos em si) como objectos formais para o pensamento algébrico;
- Promover o estudo de padrões e regularidades, a partir do 1° ciclo.

3. As dificuldades dos alunos em Álgebra

No estudo internacional PISA 2003 (Ramalho, 2004), alguns dos itens referem-se a questões de natureza algébrica. Trata-se de questões que envolvem relações e dependências funcionais entre variáveis, padrões e regularidades e aspectos matemáticos da mudança, e que surgem numa variedade de representações, simbólicas, algébricas, gráficas, tabulares e geométricas.

Neste estudo, duas das questões de natureza algébrica surgem com o título *Caminhando* (Figura 1). Uma delas, pergunta

Questão 8 — Se esta fórmula se aplicar ao Pedro e ele der 70 passos por minuto, qual é o comprimento do passo do Pedro? Apresente os cálculos que efectuar.

A questão pode ser resolvida substituindo o valor conhecido ($n = 70$) na fórmula dada (numa equação literal do 1.° grau) e determinando depois o valor desconhecido P:

$$\frac{n}{p} = 140 \to \frac{70}{P} = 140$$

A equação é relativamente simples. O aspecto mais problemático diz respeito ao facto da incógnita P aparecer em denominador. Acertaram nesta questão 36,6% dos alunos portugueses, isto é, cerca de um terço, o que corresponde à média internacional. Uma percentagem quase idêntica de alunos (32,3%) substituiu correctamente o valor de n na fórmula, mas deu uma resposta incorrecta (como $P = 2$) ou não respondeu.

Outra questão pergunta:

Questão 9 — O Bernardo sabe que o comprimento do seu passo é de 0,80 metros. A fórmula aplica-se ao caminhar do Bernardo.

Calcule em metros por minuto e em quilómetros por hora, a velocidade que o Bernardo caminha. Apresente os cálculos que efectuar.

Esta questão é bastante mais complexa, pois pede a velocidade, cujo valor não se tira directamente da fórmula dada. O modo mais directo de resolver envolve a determinação do número de passos por minuto dados por Bernardo:

$$\frac{n}{0,80} = 140 \to n = 112.$$

A partir daqui o problema poderia resolver-se recordando que a velocidade é o espaço percorrido na unidade de tempo e ainda que o espaço percorrido num minuto pode ser determinado a partir do conhecimento do comprimento de cada passo e do número de passos dado num minuto. Designando a velocidade por v, temos

$$v = 112 \times 0,8 = 89,6 \text{ (metros por minuto)}$$

e ainda, como era igualmente pedido

$$v' = 112 \times 0,8 \times 60 = 5376 \text{ (metros por hora)},$$

e portanto a resposta será 5,376 k/h.

Responderam correctamente a questão 4,6% dos alunos portugueses, ou seja, uma pequena minoria, percentagem abaixo da média internacional de 5,8% que, no entanto, não foi muito melhor.

A Questão 8, classificada como de nível de dificuldade simples (reprodução) envolve, na verdade, dois procedimentos que muitos alunos terão treinado: substituir um valor numa expressão algébrica e resolver uma equação do 1.° grau simples. Já a Questão 9, classificada de nível de dificuldade intermédio (conexões) envolve a coordenação de diversos passos:

- substituição do valor conhecido na fórmula,
- cálculo do número de passos por minuto,
- recordar o conceito de velocidade e reconhecer como se pode esta determinar a partir da informação dada,
- cálculo da velocidade em metros por minuto,
- e, depois, cálculo da velocidade em quilómetros por hora.

Apenas 1 em cada 20 alunos portugueses, ou seja, aproximadamente um aluno em cada turma, conseguiu resolver correctamente esta questão.

Neste mesmo teste internacional surgem também questões relacionadas com padrões e regularidades, como é o caso da questão, *Padrão em escada* (Figura 2):

Questão 13 — Quantos quadrados deverá utilizar na quarta etapa?

Esta questão envolve o reconhecimento de uma regularidade relativa ao número de quadrados de sucessivas etapas:

$$1, 3, 6 \ldots$$

Notando que da 1.ª para a 2.ª etapa aumentou 2 e da 2.ª para a 3.ª aumentou 3, o aluno deve deduzir que da 3.ª para a 4.ª etapa haverá um aumento de 4, sendo portanto a resposta 10. Os alunos portugueses que respondem correctamente são apenas 46,9%, ou seja, menos de metade. Neste item ficam significativamente abaixo da média internacional de respostas correctas, que é de 67%.

Esta questão sobre padrões é de dificuldade relativamente reduzida, sendo classificada como tal pelo próprio PISA (reprodução). A única coisa que se pede é o elemento seguinte de uma sequência, que é das perguntas mais simples que se podem fazer sobre padrões. É verdade que existem padrões mais simples, envolvendo repetições sem variação ou com variação constante. Neste caso, a própria variação varia, mas fá-lo de um modo particularmente simples, seguindo a sequência dos números naturais (a partir de 2).

Um outro tipo de questões do PISA envolve noções de variação, como se exemplifica no item *Crescimento* (Figura 3)

A propósito do gráfico da Figura 3 eram formuladas, entre outras, as seguintes questões:

Questão 15 — Explique de que modo o gráfico mostra que, em média, o crescimento das raparigas é mais lento depois dos 12 anos de idade.

Questão 16 — De acordo com o gráfico, durante que período da sua vida as raparigas são, em média, mais altas que os rapazes?

A questão 16 envolve a observação do gráfico e a identificação das abcissas dos pontos em que as duas funções se intersectam. É uma questão considerada simples (reprodução) que é respondida correctamente por 56,6% dos alunos portugueses, um valor inferior à média internacional, que é de 60%.

A questão 15 envolve a produção de uma explicação, fazendo referência à inclinação das curvas ou comparando crescimentos num intervalo apropriado. Trata-se de uma questão que requer raciocínio e capacidade de comunicação desse raciocínio, sendo classificada como de nível intermédio (conexões) pelo PISA. Esta questão é respondida correctamente apenas por 29,8% dos alunos portugueses, bastante abaixo da média internacional de 45,2%.

Estas questões do PISA ilustram algumas das dificuldades dos alunos portugueses no campo da Álgebra: lidar com (i) equações, variáveis e relações, (ii) com padrões e regularidades, e (iii) com mudança e variação. Nos itens cujos resultados foram divulgados, os alunos portugueses têm pior desempenho na questão 9, mas nesse item a diferença não é muito grande para a média internacional. As diferenças em relação a esta média são mais significativas nos itens 13, sobre padrões, e 15, sobre variação.

O crescimento

Os jovens estão cada vez mais altos

No gráfico seguinte está representada a altura média dos jovens rapazes e raparigas holandeses, relativa ao ano de 1998.

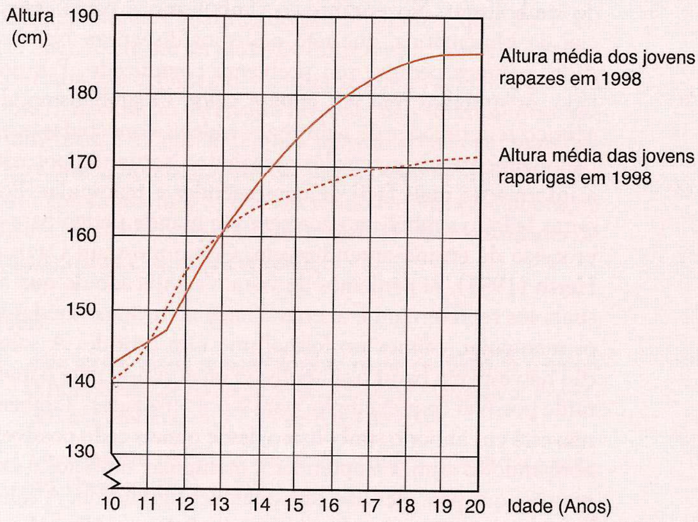


Figura 3. Adaptado do Pisa, p. 90.

4. Investigação sobre as dificuldades dos alunos em Álgebra

Há alunos que conseguem um nível de desempenho razoável no trabalho com números e operações numéricas, mas deparam-se depois com grandes dificuldades na Álgebra. As dificuldades dos alunos na transição da aritmética para a Álgebra têm sido discutidas por numerosos autores, como Booth (1994) e Rojano (2002). Alguns exemplos dessas dificuldades têm a ver com o uso de letras para representar variáveis e incógnitas, não conseguindo ver uma letra como representando um número desconhecido e não percebendo o sentido de uma expressão algébrica. Outra dificuldade está em traduzir informação da linguagem natural para a linguagem algébrica. Outra dificuldade, ainda, é compreender as mudanças de significado, na Aritmética e na Álgebra, dos símbolos $+$ e $=$, bem como das convenções adoptadas; assim, em Aritmética, 23 tem um significado aditivo $(20 + 3)$, enquanto que em Álgebra $2x$ tem um significado multiplicativo $(2 \times x)$; em Aritmética $3 + 5$ indica uma "operação para fazer" (cujo resultado é 8), mas em Álgebra $x + 3$ representa uma unidade irredutível (enquanto não se concretizar a variável x). Estas dificuldades dos alunos são compreensíveis tendo em conta a complexidade dos conceitos em jogo e também as subtilezas que envolvem o uso da linguagem exemplificadas, como mostra Rojano (2002), pelos diferentes significados do símbolo "=" em Álgebra, que pode representar a equivalência entre duas expressões (como em $2(a+b) = 2a + 2b$), uma equação (como em $7x - 4 = 28x + 15$), ou uma relação funcional (como $y = 3x + 2$).

Na educação matemática não faltam "condenações" do simbolismo. No entanto, o simbolismo é parte essencial da Matemática, que não podemos dispensar. Na verdade, estamos perante um problema complicado. Por um lado, os símbolos têm um grande valor. O simbolismo algébrico tem o poder de aglutinar as ideias concebidas operacionalmente em agregados compactos, tornando por isso a informação mais fácil de compreender e manipular. Por outro lado, o simbolismo acarreta um grande perigo para o processo de ensino-aprendizagem. Como mostram Davis e Hersh (1995), se perdemos de vista o significado do que os símbolos representam e apenas damos atenção ao modo de os manipular, caímos no formalismo sem sentido. A solução não está em banir o simbolismo ou atrasá-lo para o mais tarde possível (por exemplo, para a universidade). Também não está em impor o simbolismo desde o mais cedo possível, obrigando os alunos a aprender a manipular símbolos e expressões que para eles não têm qualquer significado. A solução terá de passar por uma estratégia de ir introduzindo os símbolos e o seu uso, em contextos significativos, no quadro de actividades que mostrem de forma natural aos alunos o poder matemático da simbolização e da formalização.

5. A abordagem da Álgebra no currículo

O ensino da Álgebra elementar tem conhecido mudanças significativas através dos tempos. Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) distinguem três grandes correntes: (i) a *linguístico-pragmática*, assumia que a Álgebra constitui um instrumento técnico mais poderoso que a Aritmética para a resolução de problemas, colocando a ênfase no domínio das respectivas regras sintácticas para a transformação de expressões (que os autores denominam de *transformismo algébrico*); o pressuposto era que se o aluno dominasse essas regras, seria certamente depois capaz de as aplicar a situações concretas; (ii) a *fundamentalista-estrutural*, característica do período da Matemática moderna, dava especial atenção às propriedades estruturais para fundamentar e justificar as transformações das expressões; e (iii) a *fundamentalista analógica*, que procura combinar as duas anteriores, recuperando o valor instrumental da Álgebra e preservando o cuidado com as justificações, com base em modelos analógicos geométricos (figuras, objectos) ou físicos (como a balança[3]). Estes autores criticam o facto de que qualquer destas concepções reduz a Álgebra aos seus aspectos transformacionistas, colocando a ênfase na sintaxe da linguagem algébrica e não nos significados representados pelos símbolos. Deste modo, propõem um ensino da Álgebra noutra perspectiva, que leve os alunos a "pensar genericamente, perceber regularidades e explicitar essa regularidade através de estruturas ou expressões matemáticas, pensar analiticamente [e] estabelecer relações entre grandezas variáveis" (p. 87).

Pelo seu lado, Lins e Giménez (1997) distinguem igualmente três grandes correntes nas abordagens didácticas para o ensino da Álgebra. A primeira corrente é o que designam por visão *"letrista"*, que reduz a Álgebra exclusivamente à sua vertente simbólica. Esta visão tem uma versão "pobre", em que o objectivo é aprender a manipular os símbolos (por treino e prática) e tem uma versão "melhorada" segundo a qual o objectivo é aprender a manipular correctamente os símbolos, recorrendo a apoios intuitivos (de novo com destaque para a balança). A segunda corrente vê a Álgebra como *Aritmética generalizada*. A ideia central é que "a actividade algébrica se caracteriza pela expressão da generalidade" (p. 110). Procurando contrariar a tendência anterior, procura-se agora valorizar a linguagem algébrica como meio de representar ideias e não apenas como um conjunto de regras de transformação de expressões simbólicas. A terceira corrente corresponde à *visão "estruturalista"* subjacente ao movimento da Matemática moderna. Para esta tendência, a atenção deve centrar-se nas estruturas algébricas abstractas, ou seja, nas propriedades das operações numéricas ou das transformações geométricas. Finalmente, Lins e Giménez (1997) discutem uma quarta corrente, em que a Álgebra é encarada como uma actividade. Esta actividade pode desenvolver-se sobretudo a partir de um contexto, mas pode também assumir um cunho investigativo ou, de preferência, englobar os dois aspectos.

As diferentes perspectivas enunciadas tanto por Fiorentini, Miorim e Miguel, como por Lins e Giménez, em última análise, dizem respeito à actividade dos alunos. Temos, por isso, que perguntar o que predomina nesta actividade: exercícios, modelações, explorações, investigações? De que modo se articulam estes diferentes tipos de tarefas? Disso dependem em grande medida os resultados da aprendizagem[4].

Para além dos tipos de tarefas, um aspecto muito importante das abordagens didácticas é o papel dos contextos, nomeadamente das *"situações reais"*. Nos manuais de há um século tais situações praticamente não surgem a não ser nos capítulos de "problemas" dos 1.º e 2.º graus, sendo consideradas como meras "aplicações". Nos nossos dias, elas surgem cada vez mais como ponto de partida da aprendizagem. O papel destas situações na aprendizagem é defendido, por exemplo, pela educação matemática realística[5]. Note-se, no entanto, que não basta "partir de situações reais". É preciso que seja o aluno a trabalhar activamente essas situações, num processo de "re-invenção" guiada dos conceitos e ideias matemáticas.

Outra questão importante diz respeito ao papel da *tecnologia*, nomeadamente calculadoras e computadores. Que *software* devem os alunos poder usar? Dois dos programas mais usados em Álgebra são a folha de cálculo (como o Excel) e os programas de cálculo simbólico (como o DERIVE). A folha de cálculo é relativamente simples de aprender, mas usa uma representação algo distante da habitual na Matemática escolar (as fórmulas ou expressões não aparecem directamente visíveis nas suas celas). Os programas de cálculo simbólico envolvem uma aprendizagem mais demorada e, muito possivelmente, só começam a ter verdadeiro interesse numa fase relativamente adiantada da aprendizagem da Álgebra por parte dos alunos.

Na verdade, a tecnologia tem muitas potencialidades mas também tem os seus problemas. Por exemplo, uma potencialidade importantíssima da calculadora gráfica é que liga expressões e gráficos, o que pode dar aos alunos *feedback* visual ilustrando vários aspectos de um mesmo objecto. Outra potencialidade não menos importante é que a calculadora realiza o trabalho mecânico e favorece a realização de explorações e investigações. Estas potencialidades têm o reverso da medalha: as representações gráficas não são transparentes e compreendê-las e usá-las pressupõe uma aprendizagem não trivial.

6. O currículo português e as propostas do NCTM

Em Portugal, tradicionalmente, a Álgebra era a par da Geometria um dos temas fortes do 3.° ciclo e do ensino secundário6. Com os programas de 1991, a Geometria mantêm-se e até reforça a sua posição, enquanto que a Álgebra desaparece como grande tema. Parte dela, sobrevive no tema *Funções*, que tem um destaque significativo, e outra parte está integrada no tema *Números e cálculo*. Ou seja, a Álgebra é reduzida ao cálculo algébrico e ao estudo das funções[7]. Mais sintonizado com as actuais tendências internacionais, o *Currículo Nacional* (ME-DEB, 2001) valoriza a Álgebra como grande tema curricular e aponta vários aspectos a dar atenção. A secundarização da Álgebra observa-se igualmente nos programas do ensino secundário em vigor (ME-DES, 2001–02). Na verdade, este tema não aparece em destaque. Nos objectivos e competências gerais existe um grupo de itens cujo conteúdo é claramente algébrico, mas cujo título, surpreendentemente, é "ampliar o conceito de número" (p. 4)[8] e, além disso, aparecem alguns assuntos de Álgebra, mas sempre numa perspectiva de funções[9]. Podemos dizer, portanto, que tanto nos programas do ensino básico como nos do ensino secundário, a Álgebra desaparece como grande tema da Matemática, estando reduzida a um conjunto técnicas (cálculo algébrico) e ao estudo das funções. Não se dá a atenção devida ao estudo de padrões e regularidades, nem ao uso do simbolismo em situações contextualizadas nem à interpretação da variação em contextos reais, como claramente se comprova pelos resultados dos alunos portugueses no PISA.

Pelo seu lado, como vimos, as propostas do NCTM (2000) valorizam quatro dimensões na Álgebra, que propõem que sejam trabalhadas desde a pré-escola até ao 12.° ano de escolaridade, envolvendo o estudo das estruturas algébricas, a simbolização, a modelação e o estudo da variação. Estas posições do NCTM decorrem de um movimento que se desenha desde o início dos anos 80 — a revalorização da Álgebra no currículo da Matemática escolar. Isso passa por entender a Álgebra de uma forma ampla e multifacetada, valorizando o pensamento algébrico e tornando-o, como vimos, uma orientação transversal do currículo.

7. Conclusão

Estamos, pois, perante a necessidade de se repensar a abordagem curricular da Álgebra. Há que voltar a colocar em questão as finalidades, objectivos, conteúdos e métodos do currículo em Portugal no que respeita a este tema. Há que pensar no papel que deve ter o pensamento algébrico como orientação transversal do currículo. É notório que existem sérias dificuldades na aprendizagem na Álgebra, que de resto tem sido bastante maltratado nos programas, quer do 3° ciclo quer do ensino secundário. Entretanto, os currículos têm continuado a evoluir a nível internacional, a tecnologia tem posto à disposição do ensino novos e mais interessantes instrumentos, e a opinião pública mostra-se cada vez mais crítica sobre as aprendizagens dos alunos. São motivos de sobra para aprofundarmos a reflexão tendo em vista a elaboração de um currículo mais coerente e ajustado às necessidades de quem ensina e de quem aprende.

Notas

1 Este artigo baseia-se parcialmente numa conferência feita no *XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática*, realizado em Caminha, em 17–19 de Abril de 2005.

2 Literalmente, *aljabr w'al muqabalah* significa "completar e reduzir" (Bekken, 1994, p. 59).

3 Note-se que a balança como modelo intuitivo para as equações já era usada no século XVI nos livros de Álgebra de Pedro Nunes.

4 Ver Fraga, Salvado, Mosquito, Santos e Ponte (2005).

5 Ver Jan de Lange (1993).

6 Nos anos 50 e 60 do século XX, nestes níveis, eram usados *Compêndios de Álgebra*, de autores como Jorge Calado, José Sebastião e Silva e José da Silva Paulo.

7 No 3.° ciclo, são tratados temas como Equações numéricas e literais do 1.° grau; Operações com monómios e polinómios; Sistemas de equações do 1.° grau, Equação incompleta do 2.° grau, Função afim, Proporcionalidade inversa, Equação (completa) do 2.° grau; Inequações do 1.° grau (ver ME-DGEBS, 1991).

8 Aperfeiçoar o cálculo em R e C e operar com expressões racionais, com radicais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas; Resolver equações, inequações e sistemas; Usar as noções de lógica indispensáveis à clarificação de conceitos.

9 Função quadrática (incluindo inequações 2.° grau), função módulo, funções polinomiais (3.° e 4.°); Decomposição de polinómios em factores; e Funções racionais e com radicais.

Referências

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 24–35.

Bekken, O. (1994). *Equações de Ahmes até Abel*. Rio de Janeiro: GEPEM, Universidade de Santa Úrsula.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Childrens' strategies and errors*. Windsor: Nfer-Nelson.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

De Lange, J. (1993). Innovation in mathematics education using applications: Progress and problems. In J. de Lange, C. Keitel, I. Huntley, & M. Niss (Eds.), *Innovation in maths education by modelling and applications* (pp. 3–18). New York, NY: Ellis Horwood.

Fiorentini, D., Miorim, M. A., & Miguel, A. (1993). Contribuição para um repensar... A educação algébrica elementar. *Pro-Posições, 4*(1), 78–91.

Fraga, A., Salvado, C., Mosquito, E., Santos, T., & Ponte, J. P. (2005). Equações do 2.º grau do fim do século XIX ao início do século XXI. *Actas do XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE*. Lisboa: SEM–SPCE.

Kaput, J., & Blanton, M. (2005). Algebrafying elementary mathematics in a teacher-centered, systemic way. (Retirado em 30 Junho de 2005 de `http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/AlgebrafyingMath.pdf`)

Lins, R., & Giménez, J. (1997). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. São Paulo: Papirus.

ME–DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME–DES (2001–02). *Matemática A (10°, 11°, 12° anos)*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário (retirado em 04/Julho/2005 de `http://www.dgidc.min-edu/programs/prog_hm.asp`)

ME–DGEBS (1991a). *Organização curricular e programas (3° ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

ME–DGEBS (1991b). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (3° ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

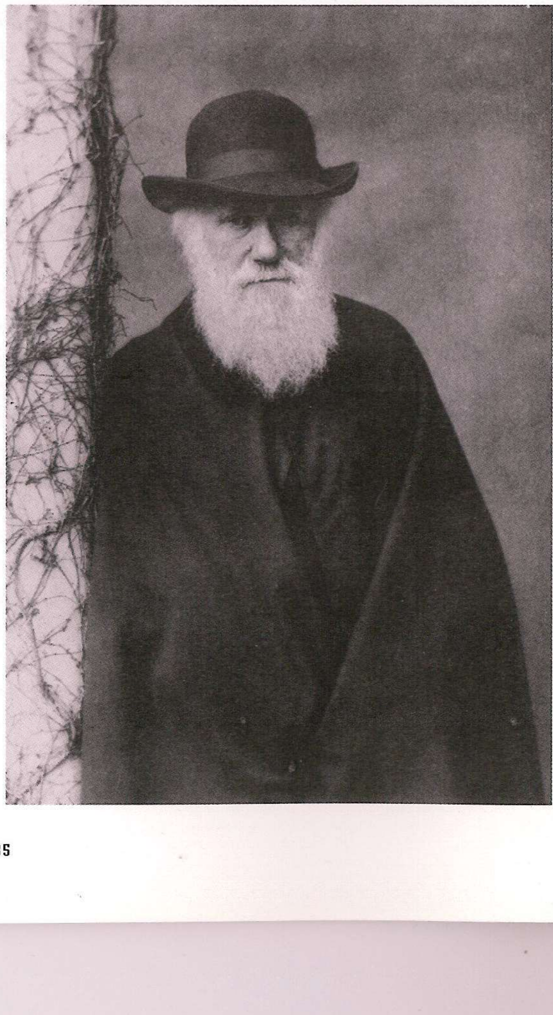
NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Ramalho, G. (2004). *PISA 2003, Resultados do estudo internacional: Primeiro relatório nacional*. Lisboa: ME, GAVE.

Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: Students' access to significant mathematical ideas. In L. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (Vol. 1, pp. 143–161). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Stanic, G. M. A., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1–22). Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum.

João Pedro da Ponte
Grupo de Investigação DIF—Didáctica e Formação
Centro de Investigação em Educação
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa



Durante os três anos que passei em Cambridge, perdi o meu tempo, no que respeita aos estudos académicos, tão completamente como em Edimburgo e no liceu. Fiz uma tentativa para aprender matemática e até tive um explicador em Barmouth (um homem muito maçador) no Verão de 1828, mas avancei pouco. O trabalho desgostava-me, principalmente porque não via qualquer significado nos primeiros passos da álgebra. Esta impaciência foi muito insensata, e mais tarde senti grande pesar por não ter continuado o suficiente para pelo menos compreender algo dos grandes princípios condutores da matemática; porque os homens capazes de o fazerem parecem ter um sentido extra.

Charles Darwin