A Álgebra nos seus primórdios . . .

Maria José Costa

"A ciência médica actual não vai muito além da Álgebra. Endireita-se uma costela . . ."
Camilo Castelo Branco, Quatro Horas Inocentes

O que é a Álgebra?

Mas o que é a Álgebra? Para responder a esta dúvida, um leitor não matematizado mas escolarizado ou, pelo menos, esclarecido, procurará num dicionário de língua portuguesa o significado de tal palavra. Assim, poderá encontrar «Ciência que generaliza as questões numéricas. Medicina antiga: ortopedia». Ficará assim informado que Camilo está a usar a palavra na segunda acepção, aliás legítima!

O leitor poderá não ficar por aqui e outra consulta poderá, por muito estranho que pareça, cimentar esta ideia: tal palavra tanto pode significar a "sciencia que se diz da regra da cousa" como a "arte de restabelecer os ossos partidos ou deslocados". A mesma consulta esclarece: esta dupla significância depende do étimo considerado. Assim, partindo de um dos étimos árabes *al-jabrâ* ou *al-jabr*, que significa "redução, reparação" o latim medieval introduziu o vocábulo *algebra* (sem acentuação), outra designação da chamada Ciência Caballa em oposição à chamada ciência Almuca Cabalha, esta com origem no verbo *cheber* ou no verbo *gebere* e que conduzem a *Arabigo*, com esse mesmo significado; por outro lado, partindo do étimo *al-jabãrâ* nasce Álgebra, palavra agora acentuada e que significa "ortopedia". A confusão entre ambas as palavras não deve ter sido difícil ...

A palavra *Álgebra* entrou na língua portuguesa em 1519; e tanto pode significar "parte da Matemática elementar que generaliza a aritmética, introduzindo variáveis que representam os números" como "ciência matemática cuja finalidade principal consiste em, simplificando e resolvendo por meio de fórmulas problemas nos quais as grandezas são representadas por símbolos, generalizar os resultados dos mesmos". Mais tarde dar-se-á a separação definitiva das duas áreas: em 1858 é introduzido o vocábulo "ortopedia" referindo-se a "especialidade médica que se dedica ao estudo e tratamento do sistema locomotor e da coluna vertebral (ossos, articulações, ligamentos, tendões e músculos)".

Impossível falar em Álgebra, no sentido matemático do termo, sem referir três nomes, dois árabes e um português: al-Khwãrizmi, Omar Khayyam e Pedro Nunes.

O papel de cada um deles na criação da Álgebra está já sobejamente divulgado em numerosas páginas; contudo, não poderemos deixar de os referir neste trabalho. De matemáticos de outras civilizações, que também se preocuparam à sua maneira, segundo a sua cultura e até de acordo com as necessidades, os instrumentos, a mentalidade e o desenvolvimento da ciência na respectiva época, não se poderá dizer o mesmo; procuraremos dar-lhes alguma visibilidade apresentando alguns dos seus feitos algébricos.

Quando começou a Álgebra?

E quem poderá ser considerado pioneiro neste assunto?

Muitos são, dentro da História da Matemática, os autores que consideram que a Álgebra foi iniciada com al-Khwãrizmi.

Al-Khwãrizmi (c. 825) foi um dos sábios da Casa da Sabedoria, casa criada em Bagdad pelo califa al-Mansur. Escreveu, em árabe, dois livros de crucial importância para o desenvolvimento da Matemática. O título de um deles pode ser traduzido por *Cálculo por Restauração e Redução*; o título destaca as duas principais operações usadas na resolução de equações: escrita da equação sem termos de coeficientes negativos (reunião de termos no mesmo membro da equação todos com coeficientes positivos) e sem termos semelhantes no mesmo membro.

Assim, o método apresentado neste livro aplicado à equação $2x + 5 = 8 - 3x$ permite escrever sucessivamente:

$$2x + 5 + 3x = 8 \quad \text{e} \quad 5x + 5 = 8.$$

Até aqui, está ilustrado o *al-jabr*, a dita reunião. Se houvesse necessidade de multiplicar ambos os membros da equação para obter apenas coeficientes inteiros, ainda seria uma aplicação deste princípio.

Teremos agora de nos libertar da parcela 5 existente no primeiro membro. Para isso, aplicamos o *al-muqabala*, ou seja, somamos a ambos os membros -5, obtendo $5x = 3$. Afinal os princípios de equivalência que hoje utilizamos para resolver equações do primeiro grau provêm do século IX e terão sido criados por um matemático árabe de nome al-Khwãrizmi.

Mais tarde, o mesmo título foi traduzido para latim por *Liber algebrae et almucabola*.

Al-Khwãrizmi considerou seis tipos de equações que descreve de uma forma natural a partir dos intervenientes na própria equação. Apresentemos esses tipos, devidamente acompanhados da tradução para a linguagem actual e na qual x designa a incógnita, a que chamava "coisa" ou "raiz", e a, b e c as constantes, os números naturais que na equação figuram e aos quais al-Khwãrizmi chama "números":

Quadrados iguais a raízes	Quadrados iguais a números	Raízes iguais a números
$ax^2 = bx$	$ax^2 = c$	$bx = c$
Quadrados e raízes iguais a números	Raízes e números iguais a quadrados	Quadrados e números iguais a raízes
$a^2x + bx = c$	$bx + c = ax^2$	$ax^2 + c = bx$

Para cada um desses tipos, que identifica de uma maneira especial, providencia regras para a sua resolução e opta por uma resolução geométrica para o caso das soluções serem números racionais. Veremos adiante a resolução geométrica de um desses tipos, identificado como "quadrados e raízes iguais a números", ou seja, do tipo $ax^2 + bx = c$. Repare-se que esta identificação não é casual: "quadrados", que al-Khwãrizmi designa por mal, à primeira parcela que nós identificamos como um múltiplo do quadrado da raiz; "raízes", enquanto plural de "raiz", refere-se à segunda parcela na qual está um múltiplo da solução desejada; quanto ao segundo membro não há dúvidas quanto à interpretação!

Al-Khwãrizmi explica a resolução a partir de um caso concreto, $x^2 + 21 = 10x$, portanto, do último tipo considerado no quadro acima, deste modo: "Calcula metade do número de raízes. É 5. Multiplica-o por ele próprio e o produto é 25. Subtrai dele 21 somado ao quadrado e o resultado é 4. Extrai-lhe a raiz quadrada, 2, e subtrai-a da metade do número de raízes, 5. Sobram 3." E concluí: "Esta é a raiz que queremos, cujo quadrado é 9." Mas não se fica por aqui: "Alternativamente, podes somar a raiz quadrada a metade do número de raízes e a soma é 7. Esta é [então] a raiz que queremos e o quadrado é 49".

A seguir, faz a discussão quanto à hipótese de se somar ou subtrair a raiz quadrada do binómio discriminante da linguagem actual a metade do coeficiente da incógnita, acrescentado: "Neste caso, tanto a adição como a subtracção podem ser usadas, o que não acontece em qualquer um dos outros casos (...)"; referindo-se aos casos em que o produto das raízes é negativo; isto significa a rejeição da raiz negativa! Alerta, também, para a existência de equações impossíveis e para o caso em que a solução é igual a metade do coeficiente da incógnita: as condições em que ocorrem coincidem, a menos da linguagem, com aquelas que hoje consideramos.

Faz acompanhar as regras de uma figura pois, no dizer do próprio autor, "Agora é necessário demonstrar geometricamente a verdade do mesmo problema que explicámos numericamente". Vejamos, então, a solução geométrica dada por Al-Khwãrizmi na resolução da equação $x^2 + 10x = 39$; sugere-se a extracção da regra a partir da sequência de passos que conduz à figura 1:

— traçar o quadrado $[ABCD]$;
— no prolongamento de AD marcar o ponto E a 5 unidades de distância de D;
— no prolongamento de AB marcar o ponto F a 5 unidades de distância de B;
— determinar o ponto K de modo que o quadrilátero $[AFKE]$ seja um quadrado;
— prolongar DC e BC e designar por G e H, respectivamente, os pontos de encontro desses prolongamentos com os lados que lhes são perpendiculares, FK e EK.

A área do quadrado $[AFKE]$ é dada simultaneamente por

$$x^2 + 10x + 25 \quad \text{e por} \quad (x+5)^2.$$

Por isso, para o valor de x esperado, essas duas expressões coincidem. Ora, sendo $x^2 + 10x = 39$, então $(x+5)^2 = 39 + 25$. Daqui decorre o valor da raiz, 3, a partir do valor de $x + 5$, ou seja de 8.

Mas será este processo original? Poderá não ser, mas terá sido al-Khwãrizmi quem primeiro sintetizou todos os tipos de equações de grau não superior ao 2°, bem como as respectivas resoluções e, consequentemente, estabeleceu os princípios de equivalência para as equações do 1° grau.

Outros inovadores

No século X, outro árabe de nome Omar Khayyam descobre que a extracção da raiz cúbica de uma constante a é dada pela intersecção de duas parábolas.

Omar parte de quatro quantidades, designadas por a, b, c e d, tais que

$$b/c = c/d = d/a.$$

Daqui deduz:

1. $c^3 = b^2a$, pois $(b/c)^2 = (c/d)(d/a)$ (basta multiplicar membro a membro as duas igualdades que se podem retirar da condição que relaciona a, b, c e d e nas quais aparece b/c.
2. $c^2 = bd$, (basta considerar a igualdade entre a 1ª e a 2ª expressões da relação referida); na hipótese de $b = 1$, então $c^2 = d$.
3. $d^2 = ac$ (basta considerar a igualdade entre as duas últimas proporções).

Admitindo c e d como variáveis e a como uma constante, considera as duas parábolas definidas em 2. e 3., de eixos perpendiculares um ao outro e com o mesmo vértice; aplicando a linguagem curricular, na primeira parábola o parâmetro, é $1/2$ e na segunda é $a/2$. Logo, desde que existam c e d, cumprindo 2. e 3., a raiz cúbica de a será dada por c, que é a abcissa do ponto de intersecção dessas duas parábolas (figura 2).

O contributo de Pedro Nunes vem na esteira das inovações de al-Khwãrizmi. No seu *Libro de Algebra*, conside-

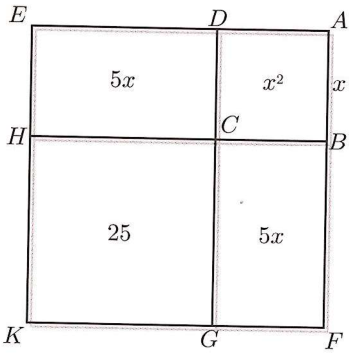

Figura 1.

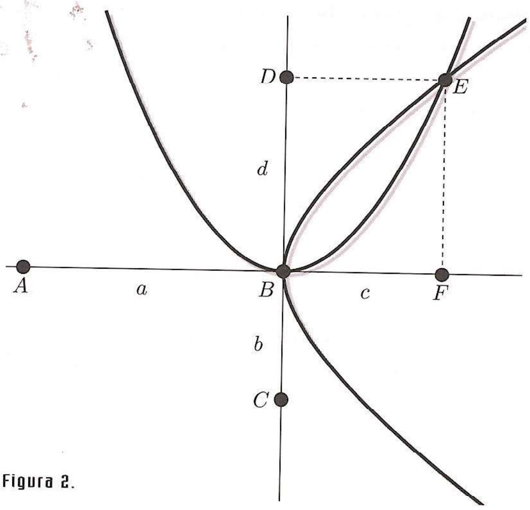

Figura 2.

ra seis tipos de "conjugações", a saber, e seguindo a ordem estabelecida no quadro anteriormente apresentado:

Censos iguais a coisas	Censos iguais a números	Coisas iguais a números
Censo e coisas iguais a números	Coisas e números iguais a censo	Censo e números iguais a coisas

Comparando a terminologia, somos levados a concluir que Pedro Nunes

- designa por "coisa" a raiz da equação e por "censo" o seu o quadrado,
- faz o tratamento das equações por nós ditas de completas com o coeficiente de x^2 unitário (diz "censo" e não "censos").

Faz distinção entre as conjugações escritas no quadro acima: às da primeira linha, chama "simples", e às que figuram na segunda, chama "compostas". Usa uma linguagem "sincopada" para escrever as equações, recorrendo, a abreviaturas das palavras proferidas: encontramos, por exemplo, "co", "ce" "p" e "m", com o significado de, respectivamente, "coisa", "censo", mais" e "menos. Usa "cifra" com o significado de "zero"; não considera coeficientes negativos: daí a necessidade das três "conjugações compostas".

Neste trabalho, e para cada uma das conjugações,

- apresenta, em linguagem corrente e genérica, uma regra para determinar a raiz em cada conjugação e aplica-a de imediato a um problema a resolver, supostamente proposto; faz, em geral, a verificação da solução encontrada. Estas regras, passadas para linguagem matemática, conduzem à fórmula resolvente actualmente em uso;
- aplica novamente a regra a um outro problema, também com a verificação da solução;
- demonstra a validade das regras dadas por dois caminhos diferentes; ambas as demonstrações se apoiam em figuras mas de natureza diferente, tal qual os argumentos utilizados.

Além disso, procede à discussão das equações. No Capítulo 6 da Primeira Parte do referido *Libro*, intitulado "Como reconhecer se um caso é necessário ou impossível", diz: "Daremos portanto alguns avisos para conhecer se o caso é impossível ou necessário, para que não trabalhemos no vazio". Também alerta que nem sempre é possível reconhecê-lo à partida ...

Sigamos a proposta de Nunes para uma das conjugações compostas, precisamente a 6ª anteriormente enunciada, adaptando a grafia mas procurando manter a estrutura original: "Quando um censo e o número forem iguais a coisas, multiplicaremos em si mesmo a metade do número das coisas criando quadrado, do qual tiraremos o número proposto, e do que restar tomaremos a raiz. A qual juntando com a metade do número das coisas, ou subtraindo se quisermos, nos dara o valor da coisa". A regra é, então:

- elevar ao quadrado a metade do coeficiente da incógnita,
- subtrair ao quadrado obtido o termo independente,
- calcular a raiz quadrada desta diferença,
- somar ou subtrair esta raiz à metade do coeficiente da incógnita.

Qual é a diferença entre esta regra e a anteriormente enunciada atribuída a al-Khwãrizmi? Fácil é constatar que coincidem, a menos do âmbito do seu enunciado: al-Khwãrizmi enuncia-a face a um exemplo; Pedro Nunes, opta pelo geral, enuncia-a para qualquer "conjugação" daquele tipo!

Não é difícil verificar a equivalência da regra aqui enunciada à fórmula resolvente actualmente em uso. É apenas neste tipo de equações que Nunes admite a soma e a diferença da raiz do quadrado discriminante com a metade do coeficiente de x; também é o único caso da equação de 2° grau com termo independente negativo; mas isto não significa que aceitasse raízes negativas: nos exemplos que inclui, as soluções são sempre e só números positivos.

Pedro Nunes avança com um exemplo, no qual retira ambas as soluções, após o que alerta para a equação com raiz dupla: se o número proposto for igual ao quadrado da metade do número das coisas, então essa metade do número das coisas será o valor da coisa. Exemplifica, depois, este "alerta" com $x^2 + 9 = 6x$; perante a diferença entre 3^2 e 9, diz, em jeito de justificação da sua afirmação: é indiferente somar ou subtrair à metade das coisas!

Nada falta no *Libro de Algebra* de Pedro Nunes para ser considerado um tratado sobre as equações de grau não superior ao segundo: regras gerais, demonstrações e discussões, tudo lá está! Mas também trata da resolução de equações do 3° grau.

E noutras civilizações não houve procedimentos algébricos?

Vejamos agora como outras civilizações lidaram com a necessidade de determinar quantidades desconhecidas.

Recuemos a Euclides, mais precisamente à proposição 44 do livro I da obra *Os Elementos*, cujo enunciado é:

"Aplicar a uma linha recta dada, segundo um rectilíneo dado, um paralelogramo igual a um triângulo dado".

Talvez a interpretação desta mensagem fique mais acessível substituindo

— "aplicar a" por "construir sobre",
— "linha recta" por "segmento de recta",
— "rectilíneo" por "ângulo".

Poderá ainda levantar alguma dúvida, Euclides pretender "um paralelogramo igual a um triângulo": por certo que esta "igualdade" não é no sentido geométrico mas sim métrico, ou seja; pretende que as duas figuras tenham a mesma área.

Simplifica, e não reduz a generalidade, construir um rectângulo sobre um segmento de recta de modo que a sua área seja previamente fixada. Numericamente, pretendemos, dados uma área A e um comprimento s, determinar o comprimento x tal que

$$sx = A$$

Euclides resolve o problema geometricamente. Não deixa, porém, de resolver uma equação!

Voltando a Euclides, mas agora ao livro VI dos seus Elementos, lá encontramos a proposição 29, que reza assim:

Aplicar a uma linha recta dada um paralelogramo igual a uma figura rectilínea dada e excedente por uma figura paralelogrâmica semelhante a uma dada.

Tal como na proposição anterior, algumas substituições de linguagem facilitam o entendimento da mensagem; às duas primeiras antes indicadas, cabe agora acrescentar:

— "figura rectilínea" por "polígono",
— "excedente por" por "cuja área exceda".

Trabalhar um caso particular, usando rectângulos, o que em nada reduz a generalidade, permite entender mais claramente o conteúdo desta proposição. Afinal a proposição pretende que se construa sobre um segmento de recta dado, um rectângulo cuja área seja igual à de um polígono dado acrescida de uma outra área dada, por exemplo, da área de um quadrado. Recorrendo a simbologia, diremos: seja A a área de um dado polígono e seja s um dado comprimento: determine o comprimento x, de modo que

$$(s + x)x = A$$

Ora nesta expressão há duas constantes, A e s, e uma variável, x: não é senão uma equação do 2° grau!

Com outra proposição deste tipo, e a primeira proposição que referimos, temos nada mais, nada menos do que Euclides a dar processos geométricos para a resolução de três tipos de equações de 2° grau e a partir de figuras da mesma família da que al-Khwãrizmi apresenta. Então não se pode atribuir a criação da Álgebra a Euclides? Os mais reputados especialistas em História da Matemática são peremptórios: Euclides não apresenta todos os tipos possíveis de equações do 2° grau! Logo, Euclides está apenas a fazer Geometria!

Nos tão célebres como antigos *Os Elementos* de Euclides encontramos com frequência situações algébricas resolvidas geometricamente e vem de longe a questão: trata-se de uma geometria algébrica ou de uma álgebra geométrica?

Em obras legadas por matemáticos chineses, que de algum modo chegaram aos nossos dias, somos levados a acreditar que os processos algébricos mereceram a sua atenção. Na recuperação da obra *Chiu-Chang Suan-Shu*, título traduzido por alguns como *Aritmética em Nove Secções* e por outros como *Nove Capítulos na Arte da Matemática*, levada a cabo por Liu Hui, que viveu no século III, é contada a história desta obra; porém, tanto a autoria como a data de elaboração são desconhecidas, tudo apontado, contudo, para ter sido escrita 213 anos antes de Cristo. Nesta obra, em cada capítulo há um conjunto de problemas sobre o mesmo assunto e todos de índole prática, centrados na actividade diária do reino. Um dos problemas do 7° Capítulo, cujo título é "Excesso e deficiência", tem, em tradução livre, o seguinte enunciado:

"Um grupo de amigos pretende fazer uma compra conjunta. Se cada um deles der 9 moedas, sobram 3; se cada um der 7, faltam 4. Quantos amigos compõem o grupo e quantas moedas são necessárias para efectuar a compra?"

Dispensamo-nos de transcrever as instruções que, incidindo sobre os números dados, conduzem à solução. O curioso é que, seguindo essas instruções, que passam inclusivamente pela disposição dos números do enunciado em filas, e recorrendo a expressões designatórias para as quantidades, caímos na expressão que hoje resulta da aplicação da regra de Cramer. Todavia, no ocidente atribui-se o conceito de determinante a este matemático suíço (1750)!

Um dos assuntos que mais prendeu a atenção dos matemáticos chineses terá sido aquele que hoje catalogamos como Congruências, talvez por este assunto ter a ver com a construção do calendário. Numa dessas obras, datada do ano 280, intitulada *Sun Tsu Suan Ching* que pode ser traduzido pela A *Aritmética do Mestre Sol* e da autoria de Sun Tsu, encontra-se o seguinte enunciado: "Há um número de objectos desconhecido. Quando contados 3 a 3, sobram 2; quando contados 5 a 5, sobram 3; e quando contados 7 a 7, sobram 2. Quantos são esses objectos?" O livro dá a respos-

今有共買物，人出八，盈三；人出七，不足四。問人數、物價各幾何。

答曰：

七人，

物價五十三。

Figura 3. Nesta figura, o enunciado ocupa as duas primeiras linhas, que vem acompanhado da respectiva solução, ambos em formato original.

ta (23) e também apresenta a resolução: "Se contados 3 a 3 sobram 2, põe 140. Se contados 5 a 5 sobram 3, põe 63. Se contados 7 a 7 sobram 2, põe 30. Agora soma esses números, o que dá 233; subtrai-lhe 210 e obténs a resposta". Obviamente que a actual teoria de congruências resolve o problema e justifica a resolução. Mas o problema é indeterminado e não é dito que se quer o número mínimo de objectos nessas condições. Como chegou o autor a estes números? Ora, calculando o mínimo múltiplo comum dos divisores tomados dois a dois, temos 35, 15, e 21. Multiplicando cada um destes números pelo resto da terceira congruência, ou seja, daquela cujo divisor não está envolvido no mínimo múltiplo comum, obtemos números cuja soma não é um múltiplo de 105, isto é, do mínimo múltiplo comum entre 3, 5 e 7; mas já o é 210. Será por isso que a resolução usa 140?

No século XIII, pelo menos, já os matemáticos chineses resolviam equações pelo chamado "método de Horner". Numa obra *Tratado Matemático em Nove Secções*, da autoria de Ch'in Chiu-shao, aparece a resolução de uma equação que na notação actual se escreve:

$$-x^4 + 763200x^2 - 40642560000 = 0$$

Os matemáticos chineses operavam com os "pauzinhos de contar", que dispunham em tabuleiros com um reticulado rectangular, dedicando uma linha a cada expoente da incógnita (aqui de 0 a 4) e um outro onde escreviam os sucessivos valores ensaiados para a solução. Mikami salienta o facto do autor abordar esta equação como uma equação do 4° grau e não como uma equação biquadrada e de todas as equações terem o termo independente negativo, termo a que chamavam *shih*, o que significa "absoluto".

Sem nos determos especialmente na representação dos cálculos, atentemos no processo:

— multiplica 8 pelo coeficiente do termo de maior grau;
— soma o produto obtido ao coeficiente do termo de grau seguinte, que neste caso é nulo;
— multiplica a soma obtida por 8 e soma ao coeficiente do termo de grau seguinte, aqui 763 200 mas da esquerda para a direita; aqui é notório que o factor que está a utilizar não é 8 mas 800! Daqui em diante assumimos este valor;
— a diferença encontrada é multiplicada novamente por 800 e somada algebricamente com o coeficiente do termo seguinte, 0, neste caso;
— a soma encontrado é novamente multiplicada por 800;
— o novo produto é somado algebricamente ao termo independente: dá 38 205 440 000.

Deixando de lado este valor, recomeça este processo ainda com o mesmo factor, agora com os coeficientes modificados pelas operações descritas, o que leva a um novo "termo independente": –826 880 000. Recomeça novo ciclo, e mais outro, ambos com o mesmo factor 800, o que leva, respectivamente, aos números –3 076 800 e –3 200. Aqui, muda de factor passando de 800 para 40 e retoma o processo de somas e produtos mas usando o coeficiente do termo de maior grau, neste caso –1, e cada um dos números que ia deixando de lado, no sentido contrário àquele em que foram obtidos: –3 200, –3 076 800, –826 880 000 e 38 205 440 000. Encontra, então, –38 205 440 000 como último produto, o que equivale a encontrar 0 como soma final! Declara, pois: a raiz é 840, o que facilmente verificamos com a ajuda da Regra de Ruffini.

Aliás, usando esta regra, temos algum modo simples de representar os números e as operações que descrevemos (tabela 1).

Falta esclarecer de onde surgem os números 800 e 40. Joseph é peremptório: indispensável estimar o número de algarismos bem como o de maior ordem, feito, provavelmente por tentativa e erro!

O processo descrito, que posteriormente foi aplicado para aumentar a precisão no caso das raízes decimais tanto na China como no Japão, é considerado precursor do designado método de Horner, publicado em 1819. Não há, no entanto, evidência de que este matemático tenha tido conhecimento dos desenvolvimentos da Matemática na China.

Os egípcios também sentiram a necessidade de encontrar valores encobertos em condições, por vezes ligados a problemas da vida real, mas não só.

	–1	0	763 200	0	–40 642 560 000
800		–800	–640 000	98 560 000	78 848 000 000
	–1	–800	123 200	98 560 000	38 205 440 000
800		–800	–1 280 000	–925 440 000	
	–1	–1 600	–1 156 800	–826 880 000	
800		–800	–1 920 000		
	–1	–2 400	–3 0 768 000		
800		–800			
	–1	–3 200			
40		–40	–129 600	–128 256 000	–38 205 440 000
	–1	–3 240	–3 206 400	–955 136 000	0

Tabela 1.

O enunciado do problema 72 do Papiro de Ahmes[1], em tradução mais ou menos livre, é: "Quantos pães de *pesu* 45 podem ser trocados por 100 pães de pesu 10?" [*pesu:* dá informação quanto à relação do grão empregue no fabrico de pão. Para a mesma quantidade de grão, o pão será de pesu tanto mais baixo quantos mais pães forem fabricados].

O próprio Papiro apresenta a resolução, que se baseia, tal como noutros problemas de *pesu*, em apenas dois passos: primeiro, determinar a quantidade de grão gasto na confecção dos 100 pães de *pesu* 10 e, depois, o número de pães que se podem confeccionar com igual quantidade de grão.

Porém, a resolução sugerida é a seguinte:

— determina o excesso de 45 sobre 10: dá 35.
— divide 35 por 10: dá $3 + 1/2^2$
— multiplica esse número por 100: dá 350
— soma 100 a 350: dá 450
— Conclusão: 100 pães de 10 *pesu* são trocados por 450 de 45 *pesu*.

Porquê esta resolução?

Ora, decalcando estes passos mas recorrendo a expressões designatórias, por exemplo:

— p e q: as duas variedades de pão, em *pesu*
— x e y: quantidade de pães a receber, respectivamente a p e a q *pesu*

chegamos a uma resposta em função das expressões designatórias escolhidas:

$$y = \frac{q-p}{p}x + x$$

expressão equivalente a

$$y = \frac{q}{p}x,$$

e que responde à determinação de y de tal modo que seja $y/x = q/p$.

O próprio papiro refere a sua idade: terá sido copiado cerca de 1650 anos antes de Cristo a partir de um outro documento escrito entre 2000 e 1800 a.C., sobre assuntos conhecidos desde 2650 a.C.! Os 85 problemas que este papiro apresenta, quase todos acompanhados das respectivas resoluções e todos com a sua solução, poderão ser exemplos de problemas tipo, portanto, não se tratará de situações pontuais nem tão pouco de resoluções de acaso. Não poderemos considerar esta resolução o exemplo tipo das resoluções de equações $y/x = q/p$? Perante uma resposta afirmativa, estaríamos perante a resolução mais antiga de uma equação, por processos mentais conducentes às regras que dominam os processos actuais! Poder-se-á dizer: mas isso é um problema prático, não é uma actividade puramente matemática! É verdade: mas não deixa de exigir um raciocínio matemático!

Mas neste mesmo papiro existem exercícios numéricos envolvendo incógnitas, no dizer de Robins & Shute, "representando uma aproximação à Álgebra", sendo as quantidades desconhecidas enunciadas verbalmente; alguns destes exercícios parecem ter por objectivo uma diversão do tipo dos problemas "pensa num número". Estes exercícios, tinham, eventualmente, um carácter pedagógico: a aprendizagem das crianças que nasciam livres era feita em ambiente de jogo e entretenimento, com exemplos concretos e concretizando as situações.

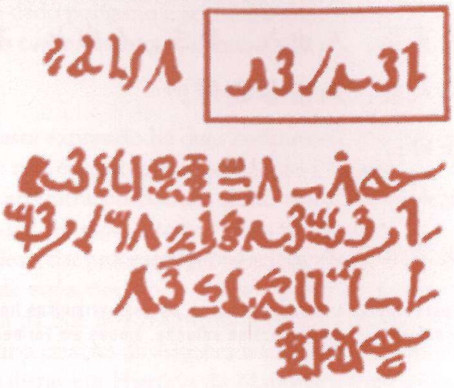

Figura 4. Na 1ª linha, a versão original do dito problema: 1/3 deve ser somado 2/3 devem ser subtraídos; depois, a resolução.

Vejamos um caso desses (Problema 28 do papiro), que em tradução livre reza assim: "A quantidade e dois terços dela são somados, e da soma a terça parte da soma é subtraída, e sobram10. Qual é o número?"

Representando por x o número a descobrir, este enunciado é traduzido em notação actual por:

$$x + 2/3x - 1/3(x + 2/3x) = 10.$$

Em Gillings encontramos uma possível resolução:

— se fica 10, tomar a 10ª parte, que é 1;
— o número é 9.

E segue-se a verificação: cálculo de $2/3$ de 9, a sua soma com 6, o cálculo da terça parte de 15, a diferença para 15 e a constatação que se obtém o número 10 esperado!

Poder-se-á pensar que é uma resolução "tentativa e erro" ou ao acaso. Mas ela tem uma justificação que pode ser encontrada por comparação com a resolução actual da mesma. Da simplificação do primeiro membro da equação resulta $10/9x = 10$, ou seja: $1/9x = 1$ e daí decorre imediatamente a solução.

A agilidade de cálculo com as chamadas fracções unitárias pode justificar que o escriba não tivesse necessidade de registar mais passos na resolução deste problema.

Esta resolução contribui para mostrar que os egípcios tinham processos matemáticos para responder rapidamente a questões como a desta adivinha numérica que, neste caso, exige resolver uma equação do 1° grau.

Um outro problema do mesmo papiro mostra uma actuação diferente perante as equações do 1° grau: a resolução pelo "método da falsa posição". Vejamos como era aplicado, recorrendo ao enunciado de um outro, o problema n.° 27, por exemplo: "Uma quantidade somada com a sua quinta parte dá 21. Qual é essa quantidade?". A resolução

— assume que a resposta é 5;
— soma a 5 a sua quinta parte: obtém 6;
— procura o número que multiplicado por 6 dá 21: obtém 3,5.
— multiplica 3,5 por 5: obtém 17,5, que é a solução.

Ou seja: ao assumir que a solução é 5, verifica que o primeiro membro não dá 21 mas sim 6; faz, então, a proporção $6/5 = 21/x$.

Este problema, tal como outros 10, e ao contrário da maioria dos que figuram no papiro de Ahmes, não tem qualquer interesse do ponto de vista do dia-a-dia: tudo aponta para que visasse apenas a actividade matemática. A sua resolução apoia-se no método da falsa posição: depois de ensaiar um valor para a solução, corrige-o em função do resultado obtido e do desejado.

No papiro de Berlim, encontrado em muito más condições, há indícios de um problema de equações simultâneas, cujo enunciado reza assim: "Um quadrado e um segundo quadrado, cujo lado é $1/2 + 1/4$ do lado do primeiro, têm, em conjunto, área igual a 100. Mostra-me como calcular isto". Entende-se, neste enunciado, que se pretende calcular a medida do comprimento do lado de cada um dos dois quadrados, conhecendo a soma das suas áreas e a relação entre os comprimentos dos seus lados. Em simbologia actual, pretendemos resolver um sistema de duas equações, sendo uma delas de 2° grau e a outra do 1°, a saber:

$$x^2 + y^2 = 100 \qquad \text{e} \qquad 4x - 3y = 0.$$

A resolução é feita em linguagem geométrica, partindo de um quadrado de lado unitário:

— conclui que o lado do outro quadrado é $1/2 + 1/4$ (basta considerar $y = 1$ na segunda equação e representar $3/4$ em fracções unitárias),
— calcula a área deste quadrado: $1/2 + 1/16$,
— soma a área dos dois quadrados: $1 + 1/2 + 1/16$,
— toma a raiz quadrada deste valor: $1 + 1/4$,
— toma a raiz quadrada da área do quadrado dado: 10,
— divide 10 por $1 + 1/4$, ou seja, faz a proporcionalidade entre o valor suposto (1), o resultado obtido $(1 + 1/4)$, a solução (x) e o valor total dado (10).
— afirma que a solução é 8.

Ou seja: aqui também é utilizado o método da falsa posição!

Não pretendíamos contribuir para uma nova definição de Álgebra, nem na sua vertente moderna nem na sua vertente clássica. Pretendíamos, isso sim, apresentar contributos de matemáticos de diversas civilizações e em diferentes épocas para a sua construção ou evolução desse capítulo da Matemática. Muito ficou por dizer e muitos mais nomes gostaríamos de ter citado ...

Notas

1 Papiro com o nome do copista que o escreveu; é também conhecido como papiro de Rhind, o antiquário escocês que o comprou em Luxor, no século XIX. O papiro foi encontrado no túmulo do Faraó do Egipto, Ramsés II e pensa-se que poderá ser da autoria de Imhotep, Físico e Arquitecto. O texto estava escrito em linguagem hierática, uma das três linguagens usadas no Egipto.

2 Escrita com recurso a fracções unitárias. Do resultado obtido, 3,5, separamos a parte inteira da parte decimal que representamos em forma de fracção. Adiante voltará a aparecer notação idêntica mas dispensar-nos-emos de prestar este esclarecimento.

Referências bibliográficas

B. L. van der Waerden, *Science Awakening*, P. Noordhoff LTD — Groningen, Holland.

Dicionário Etimológico da língua portuguesa, José Pedro Machado, Livros Horizonte LDA, Lisboa, 3ª edição, 1977.

Dicionário HOUAISS da língua portuguesa, Círculo de Leitores, Lisboa, 2002.

Dirk J. Struik, *História Concisa das Matemáticas*, Colecção Ciência Aberta, Gradiva — Publicações, L.daLisboa, 1989.

Gay Robins & Charles Shute, *The Rhind Mathematical Papurus: an ancient Egyptian text*, British Museum Publications, London, 1987.

George Cheverghese Joseph, *The Crest of the Peacock: Non-Western Roots of Mathematics*, I.B.Tauris & CO. LTD Publishers, London. New York.

J. L. Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer–Verlag New York Inc., 1986.

Karine Chemla et Guo Shuchun, *Les Neuf Chapitres: Le Classique mathématiques de la Chine ancienne et ses commentaires*. Dunod, Paris, 2004.

Maria Fernanda Estrada *et al*, *História da Matemática*, Universidade Aberta, 2000.

Novo Dicionário Compacto da língua portuguesa, António de Morais Silva, Editorial Confluência, Lda, Livros Horizonte, 1980.

Pedro Nunes, *Obras: Nova edição revista e anotada por uma comissão de sócios da Academia das Ciências. Libro de Álgebra em Arithmetica y Geometria*, Academia das Ciências de Lisboa, Imprensa Nacional, 1950.

Richard J. Gillings, *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. MIT Press, 1982, Dover Publications, Inc. Mineola, N.Y.

Ulrich Libbrecht, *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century: The Shu-shu chiu-chang of Ch'in Chiu-shao*, Vol.1, MIT Press, 1971.

Yoshio Mikami, *The desenvolviment of Mathematics in China and Japan*, 2ª edição, Chelsea Publishing Company, New York, N. Y.

Maria José Costa
Escola Secundária Augusto Gomes [Professora Aposentada]