Ai, tantos testes para corrigir

O Pedrosa tinha uma enorme pilha de testes para corrigir. Na 2ª feira, cheio de energia, despachou metade dos testes. Na 3ª feira já só viu um terço dos que tinham sobrado. Na 4ª feira corrigiu apenas um quarto dos que faltavam. Na 5ª feira, já saturado, viu um quinto dos que tinha para ver. Na 6ª feira, verificando que lhe faltavam menos de duas dúzias, resolveu acabar com o suplício e corrigiu tudo. Quantos testes tinha o Pedrosa?

(Respostas até 31 de Dezembro)

Triângulos no trapézio

O problema proposto no número 82 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

O trabalho numa aula de Matemática, feito em grupos de dois, consistia em desenhar um trapézio qualquer, traçar as duas diagonais e, fazendo as medições necessárias, calcular a área de cada um dos quatro triângulos obtidos.

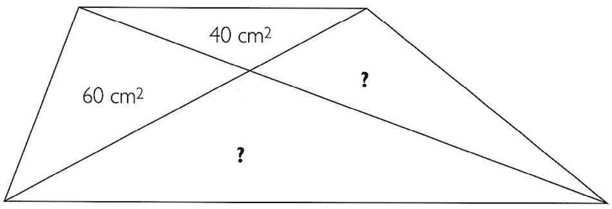
A Rita e a Carolina dividiram as tarefas entre si, ficando cada uma com dois triângulos.

A Carolina, depois de fazer cuidadosamente as medições necessárias, concluiu que um triângulo tinha uma área de 40 centímetros quadrados e o outro de 60.

A Rita foi dar uma volta. Quando chegou, olhou para as áreas encontradas pela Carolina e disse:

— Oh, eu nem preciso de medir nada. Já sei a área dos meus.

Que área tinham os triângulos da Rita?

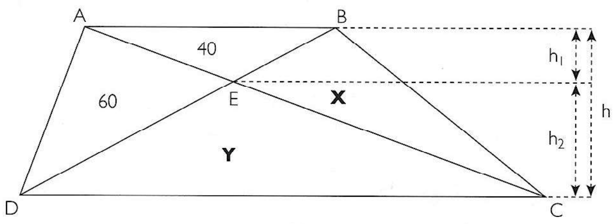


Tivemos 11 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Américo Bento (Vila Real), Ana Luísa Correia (Lisboa), Augusto Taveira (Faro), Francisco Martins (Charneca da Caparica), Graça Braga da Cruz (Ovar), Helena Cunha (Viseu), J. Orlando Freitas (Funchal), João Barata (Castelo Branco), José Rui Ferreira & Luís Santos (Porto), e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

Comecemos por uma citação do Pedrosa Santos: *Tenho de confessar que a Rita, ou meninas como a Rita, me causa inveja, quase raiva. Viu num relance o que eu demorei horas a cogitar.*

Sejam A, B, C e D os vértices do trapézio, E o ponto de intersecção das suas diagonais, h a sua altura, h_1 a altura do triângulo ABE, h_2 a altura do triângulo DCE, X a área do triângulo BEC e Y a área de DCE.

O processo seguido pelos nossos leitores foi praticamente o mesmo na primeira parte mas diferente no cálculo da área Y. Algumas justificações foram também mais sintéticas que outras. Eis uma das vias de resolução.



1º — Área X do triângulo BEC: os triângulos ABD e ABC têm a mesma área porque têm a mesma base AB e a mesma altura h. Então, $40 + 60 = 40 + X$. Logo, $X = 60$. A área do triângulo BEC é de $60\ \mathrm{cm}^2$.

2º — Relação entre as várias alturas: se dois triângulos têm a mesma base, as suas áreas são proporcionais às respectivas alturas (resulta imediatamente da fórmula da área de um triângulo). Considerando os triângulos ABE e ABD, com a mesma base AB, vem

$$\frac{40}{100} = \frac{h_1}{h} \quad \text{e portanto} \quad h_1 = 0,4h.$$

Como $h = h1 + h2$ vem $h2 = 0,6h$.

3º — Área Y do triângulo DCE: considerando os triângulos DCE e DCB, com a mesma base DC, vem

$$\frac{Y}{Y+60} = \frac{h_2}{h} \quad \text{e portanto} \quad \frac{Y}{Y+60} = 0,6$$

$$Y = 0,6Y + 0,6 \times 60$$

$$0,4Y = 36$$

$$Y = 90$$

A área do triângulo DCE é de $90\ \mathrm{cm}^2$.

O Alberto Canelas chama a atenção para o seguinte: *Embora a solução seja única em termos de áreas dos 4 triângulos, há infinitos trapézios que obedecem às condições do problema. Mesmo no caso particular de terem as mesmas bases e a mesma altura do trapézio do problema, há um número infinito de trapézios nessas condições.*

O Augusto e o Alberto generalizaram o problema para quaisquer valores das áreas conhecidas. Assim, se A_1 e A_2 forem as áreas conhecidas, teremos sempre:

$$X = A_2$$

$$A_1 \times Y = A_2 \times X.$$