Acerca dos fundamentos da Matemática

António M. Fernandes

A divulgação científica tem tido entre nós um peso diminuto. O caso da matemática é especialmente grave. A análise dos aspectos essenciais e substanciais associados aos fundamentos desta disciplina tem sido deixada a cargo de alguns personagens que, animados de um forte impulso literário não se têm coibido de produzir algumas peças exibindo a mais atroz incompetência científica relativamente ao tema. Este artigo é em larga medida motivado por mais uma dessas *contribuições*. Refiro-me a *Conhecimento, verdade e prova: um percurso pelas filosofias fundacionistas*, um texto recentemente publicado nas actas do V CIBEM, da autoria de Alexandre Pais.

As considerações deste autor são ecos de concepções erróneas que se têm propagado, em muitos casos por vultos responsabilizáveis, mas que urge desmistificar senão por outra razão, ao menos pelo respeito devido a uma argumentação racional e ao rigor factual, razões estas que não são menores.

Começando pelo fim: o autor tem como objectivo a apologia das *teses para uma ciência pós-moderna* de Boaventura de Sousa Santos. De acordo com essas teses o conhecimento científico, e o conhecimento matemático em particular, só podem ser legitimados socialmente estando, deste modo, na mesma posição que qualquer outra forma de conhecimento. Boaventura de Sousa Santos não é particularmente expansivo no que diz respeito ao caso da Matemática. O seu principal pseudo-argumento envolve precisamente os teoremas da incompletude de Gödel. Esvaziados do seu conteúdo matemático preciso, os teoremas da incompletude são geralmente descritos recorrendo à frase "a matemática não pode demonstrar a sua própria consistência". E esta frase é tomada como uma evidência que sustenta a ideia de que o próprio conhecimento matemático não é confiável. Uma tal conclusão, contudo, só é sustentável à margem da racionalidade do próprio argumento. A verdade é que os teoremas de Gödel são teoremas demonstrados no formalismo matemático, então ou a matemática é consistente e os teoremas da incompletude não acrescentam nada a esse facto ou, pelo contrário, a matemática é inconsistente e então não podemos confiar nos próprios teoremas de Gödel, o que nos impede de os utilizar em argumentos válidos.

A causa de Alexandre Pais é pois uma causa perdida, mas não é isso que importa aqui. O que importa é que se socorre de uma interpretação absurda dos programas fundacionistas e não raras vezes a uma mistificação dos conceitos envolvidos de modo a tornar necessárias as suas conclusões.

Este tipo de postura intelectual não pode ser ignorado e ao longo deste artigo tentar-se-á restituir ao tema o mínimo de dignidade de rigor factual e conceptual que o autor de *Conhecimento, verdade e prova* lhe subtraiu.

Kurt Gödel

A busca de fundações rigorosas

A exigência de que os conceitos matemáticos se fundassem em bases sólidas começou a ganhar um decisivo fôlego logo depois que Newton e Leibniz inventaram o cálculo diferencial, baseado na noção de *quantidade infinitesimal*. O carácter paradoxal da noção de infinitésimo, foi desde logo criticado enfaticamente pelo bispo George Berkely. Precisamente em 1734 ele publicou *The Analyst* uma síntese incisiva das suas críticas ao método newtoniano. O *cálculo* de Newton dependia de uma forte intuição física e não podia ser encarado como rigoroso de um ponto de vista matemático. Berkely toma como exemplo a dedução da regra de derivação do produto a que Newton chegou depois de utilizar o argumento que se descreve a seguir. Considerando duas quantidades x e y, suponhamos que ambas sofrem variações infinitesimais dx e dy. Para calcular a variação do produto $d(xy)$, podemos imaginar que esse mesmo produto varia continuamente de $(x - dx/2)(y - dx/2)$ até $(x + dx/2)(y + dx/2)$ pelo que

$$d(xy) = \left(x + \frac{dx}{2}\right)\left(y + \frac{dx}{2}\right) - \left(x - \frac{dx}{2}\right)\left(y - \frac{dx}{2}\right)$$

simplificando, obtém-se $xdy + ydx + dxdy$ e, como a quantidade $dxdy$ pode ser considerada nula, isto reduz-se a $d(xy) = xdy + ydx$.

A *dedução* de Newton enferma de dois problemas. Em primeiro lugar existe um certo grau de arbitrariedade em considerar a variação dx entre $x - dx/2$ e $x + dx/2$ e não, entre as quantidades (mais *naturais*) x e $x + dx$, por exemplo. (E o mesmo se aplica à variação dy.) Por outro lado, não sendo nulos nem dx nem dy, em rigor, não pode ser considerado nulo o produto $dxdy$ (mas este tipo de consideração é recorrente em Newton).

Apesar das críticas, os infinitesimais de Newton e os diferenciais de D'Alembert, continuariam a fazer progredir a análise, sobretudo devido à sua fertilidade conceptual. Contudo, e não obstante uma tal profusão de novos resultados, a verdade é que permanecia uma insatisfação relativa à falta de rigor metodológico. A geometria euclidiana revelava-se impotente perante a complexidade dos novos resultados e deixou-se invadir de forma crescente pela noção intuitiva de *variação contínua*, algo que na época correspondia a uma noção desprovida de qualquer rigor lógico-matemático. Este facto não passou despercebido a Bernard Bolzano (1781–1848). Este proporia uma verdadeira reforma metodológica e, de certo modo, as suas propostas acabariam por marcar indelevelmente o percurso para estabelecer as fundações rigorosas da Matemática.

O trabalho de Bolzano assinala um ponto de ruptura com o *estilo* do século XVIII, um estilo apoiado na *maneira geométrica dos antigos*, misturado com noções da *teoria do movimento*, com auxílio do qual, Leibniz, Newton, MacLaurin, D'Alembert e outros fundaram o *Cálculo*.

Bolzano reconheceu nesta metodologia uma circularidade logicamente insustentável — os argumentos da teoria do movimento só poderiam ser considerados rigorosamente estabelecidos se descritos na geometria (enquanto teoria do espaço). Deste modo, incorporar de modo essencial resultados da primeira na segunda, corresponde a violar uma prioridade lógica. Bolzano estava igualmente determinado em expurgar todo o carácter intuitivo das demonstrações matemáticas, sendo por isso conduzido a apontar a lógica e a aritmética como os meios para uma fundamentação rigorosa da Matemática.

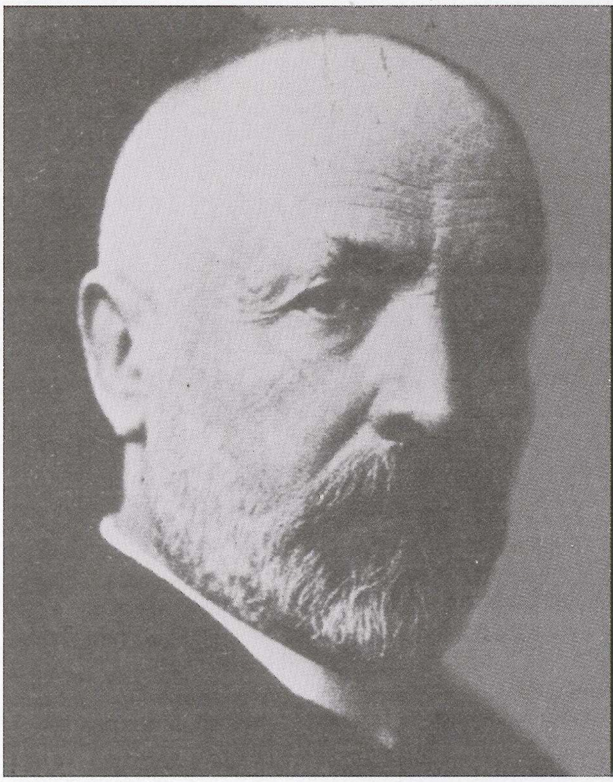
Depois de Bolzano iniciar-se-ia o programa da *aritmetização da análise*, conduzido por vultos como Weierstrass e Dedekind, que tinham em vista caracterizar todos os conceitos da análise, em particular a noção de *número real*, tomando como base a aritmética.

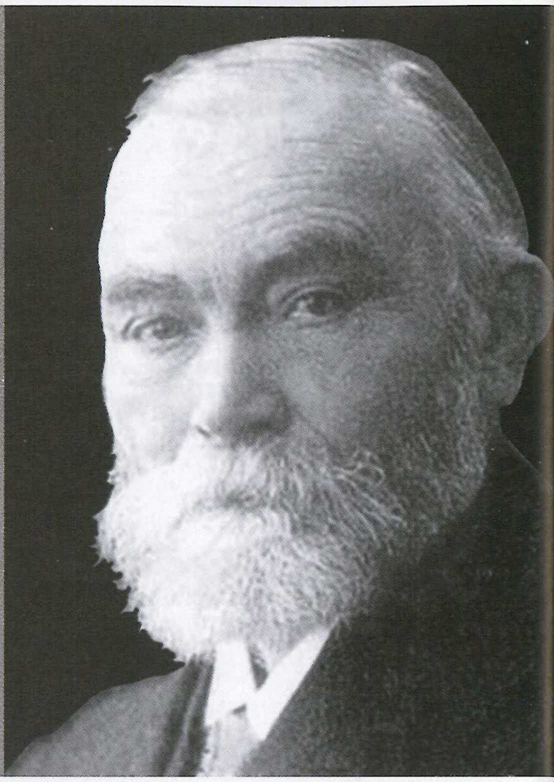
Em finais do século XIX Dedekind e Peano propuseram os axiomas que caracterizam a estrutura dos números naturais — a aritmética — e Dedekind, partido dos números naturais, descreveu uma construção rigorosa dos números reais em 1898. Este facto testemunha um inegável sucesso do programa de aritmetização da Matemática que, apesar de tudo, acabou por não satisfazer plenamente os anseios de rigor antecipados por Bolzano. A construção de Dedekind, apesar de tomar como base os números naturais e a aritmética não podia ser concretizada nessa estrutura. Uma noção mais fundamental que a de número — a de conjunto — era necessária. A teoria que governa esta nova noção estava entretanto em desenvolvimento, graças ao engenho de uma figura ímpar — Georg Cantor. Este matemático tinha em mente a formalização da noção de infinito actual, precisamente uma das noções que mais resistiu às investidas do engenho humano. (Falando acerca deste conceito David Hilbert referia-se-lhe como "a noção que em matemática mais necessita de esclarecimento.") Apesar da dificuldade em formalizar este conceito de modo aceitável, a verdade é que ele se encontrava cada vez mais presente na prática matemática através das noções de *limite* e *convergência*, bem como através da noção de *série*.

Estas questões motivaram diferentes aproximações por parte de matemáticos tentando criar fundações sólidas para o edifício matemático.

O programa logicista foi iniciado por Gotlob Frege. As motivações de Frege não eram essencialmente matemáticas, mas inegavelmente o sucesso do seu programa constituiria igualmente uma solução para o problema dos fundamentos. Frege tentava contrariar a opinião de Kant, segundo a qual a aritmética era essencialmente analítica *a posteriori*. A ideia de Frege era de que seria sintética *a priori*. Para isso ele teve que reformular as definições que Kant disponibilizou na sua *Crítica da razão pura* e, depois de redefinir "analítico *a priori*" como "definível em termos de noções puramente lógicas", Frege propôs-se demonstrar que a aritmética era analítica *a priori*.

Em 1902, Bertrand Russell, formulou o paradoxo com o seu nome que, em última análise, expunha a inconsistência do sistema de Frege. Uma vez que o paradoxo de Russell podia ser adaptado à teoria de conjuntos, ele acabou por expor também a inconsistência da teoria de Cantor.


Georg Cantor


Gotlob Frege

Reacções ao paradoxo de Russell

O paradoxo de Russell tornou clara a necessidade de uma reformulação da teoria de conjuntos e do programa logicista e a busca de uma teoria fundamental teve que ser re-equacionada. A reformulação do programa logicista foi assumida pelo próprio Bertrand Russell em parceria com Alfred Norton Whitehead. Eles conceberam o denominado sistema dos *Principia Mathematica*, um formalismo complexo que contornava o paradoxo de Russell. Mas ainda antes de Gödel ter apresentado os seus resultados já o programa parecia condenado ao fracasso, tanto por causa da sua extrema complexidade, como por depender cada vez mais da adopção de princípios cujo carácter exclusivamente lógico era controverso.

Outra reacção proveio da denominada corrente *intuicionista*. A sua visão restritiva impunha a desconsideração do infinito actual, já que atribuíam a esta noção a razão para os problemas com a fundamentação da matemática. Isto aliado a uma posição filosófica firme acerca da produção de conhecimento matemático, que impunha uma lógica mais restritiva que a lógica clássica não admitindo, entre outros o princípio do terceiro excluído, inviabilizando deste modo as demonstrações por redução ao absurdo. A visão intuicionista acabaria por ser considerada demasiado restritiva e por isso nunca teve particular sucesso.

A *terceira via* consistia no denominado *programa de Hilbert*. Este programa acabaria por ser o mais directamente afectado pelos resultados de Gödel pelo que o analisamos mais em detalhe a seguir.

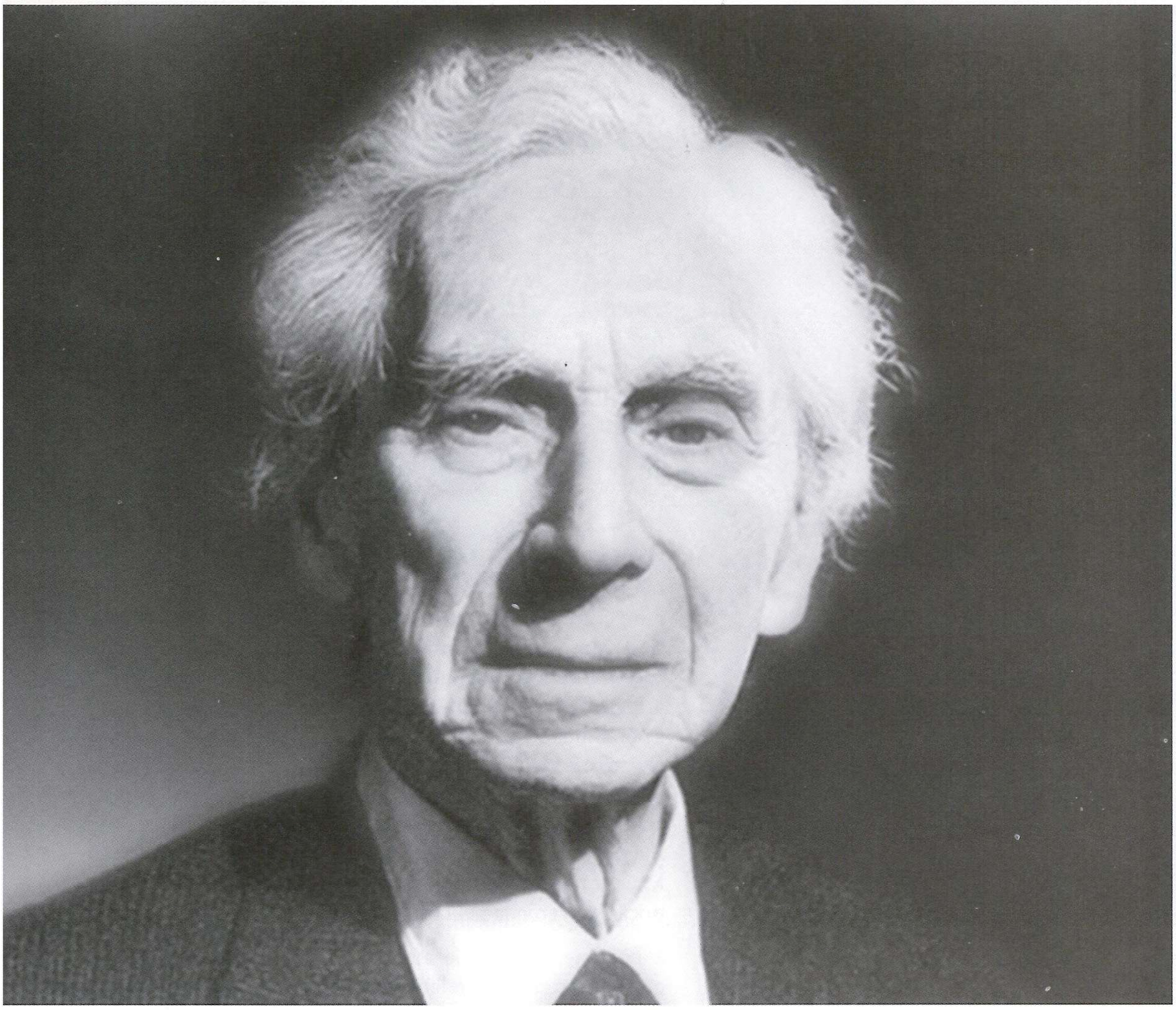
O programa de Hilbert

David Hilbert foi uma das mais influentes figuras na transição do século XIX para o século XX e grande parte da matemática do século XX foi directa ou indirectamente condicionada pela sua visão. Em 1899, ele publicou os seus *Fundamentos da geometria* um produto da concepção hilbertiana do método axiomático. Hilbert atribuía a este método uma importância fundamental. Numa conferência sobre os fundamentos da geometria em 1902 dizia

> Qualquer ciência tem como ponto de partida um conjunto de factos suficientes e coerentes, a partir dos quais a ciência se organiza. Essa organização tem lugar recorrendo ao *método axiomático* (...)

A escolha dos axiomas pode ser (segundo Hilbert) algo arbitrária, mas dela devem exigir-se três predicados — *completude*, *independência* e *consistência*. Analisemos mais em detalhe cada um destes predicados.

A melhor forma de perceber o que está envolvido consiste em imaginar que os axiomas são proposições básicas



Bertrand Russell

acerca de certas entidades num determinado universo. Os axiomas são assim propriedades fundamentais dessas entidades. (Considerem-se por exemplo os axiomas da geometria plana, que descrevem propriedades básicas partilhadas por rectas e pontos.) Usando as regras lógicas podemos, partindo dos axiomas, deduzir outras proposições (os teoremas). Uma demonstração é um *objecto finito* por isso utiliza sempre um número finito de axiomas.

Uma axiomática é *consistente* se dos seus axiomas não se pode deduzir nenhuma contradição. É *completa* se dada uma qualquer proposição B acerca do universo de discussão, se tem que ou B ou "não B", se podem deduzir nessa axiomática.

Finalmente a axiomática é *independente* se não se pode manter o mesmo poder demonstrativo eliminando axiomas.

Hilbert atribuía à aritmética o mesmo valor fundacional que os intuicionistas mas, não estava disposto a abdicar de outras noções marginalizadas pelo programa intuicionista. O seu programa passava então por axiomatizar um fragmento da aritmética, que serviria como sistema fundamental, possuindo essa axiomática os três predicados enunciados anteriormente.

Em 1931, Kurt Gödel publicou o primeiro de dois resultados de incompletude que inviabilizaram definitivamente o programa de Hilbert. Em qualquer teoria aritmética com valor fundacional (no sentido de Hilbert) é possível formalizar a noção de consistência. Grosso modo existe uma proposição que *diz* "eu sou consistente", proposição essa que a teoria, se for consistente, não consegue demonstrar.

O que restou depois de Gödel

Depois de Gödel, ficou claro que nunca se poderia obter um sistema fundacional relativamente ao qual se pudesse estabelecer a sua própria consistência. Isso, contudo, não eliminou a busca de um sistema fundamental que descrevesse

David Hilbert

uma noção relativamente à qual todas as noções matemáticas se pudessem reduzir. Essa teoria fundamental acabou por ser a teoria de conjuntos depois de reformulada por Zermelo e Fraenkel, de modo a contornar o paradoxo de Russell. A aritmética, ou seja a estrutura dos números naturais é definida recorrendo à noção de conjunto indutivo originalmente descrita por Dedekind (e não recorrendo à noção de cardinalidade como erradamente refere Alexandre Pais). Como já se disse no início, os teoremas de Gödel não podem ser utilizados num argumento que tente estabelecer a falibilidade da matemática. Um tal argumento deverá sempre recorrer a evidência extra-matemática ou, então à exibição de uma contradição concreta. Ainda assim, o método axiomático assegura que a matemática é a forma mais segura de conhecimento. O surgimento de um eventual paradoxo na teoria de conjuntos poderia ser analisado, dada a natureza estruturada do conhecimento matemático, e eliminado com mais sucesso aqui que em qualquer outra forma de organizar conhecimento.

Algumas observações finais

Terminarei este artigo expondo alguns erros factuais e de apreciação cometidos por Alexandre Pais. Falarei apenas dos mais significativos tentando não ser tão exaustivo como a oportunidade sugere.

1. Alexandre Pais sugere que o programa logicista surge como uma tentativa de remediar o efeito do paradoxo de Russell sobre a teoria de conjuntos. De facto a teoria de conjuntos e os sistemas de Frege tiveram um desenvolvimento paralelo e origem em preocupações diferentes — Frege tinha uma preocupação eminentemente filosófica, enquanto Cantor procurava descrever os processos transfinitos. Por outro lado o paradoxo de Russell foi concebido para demonstrar a inconsistência do sistema de Frege que era uma teoria sobre objectos e conceitos e não uma simples versão da teoria de conjuntos.

2. O programa intuicionista/construtivista é assim designado, pois admite como fundamental a intuição acerca dos números naturais. Essa intuição fundamental providencia um ponto de partida para a construção do edifício matemático. Mas isto não significa, como diz Alexandre Pais que "desta forma o programa construtivista advoga que não é a lógica nem a experiência que determina a coerência e a aceitabilidade das ideias matemáticas, mas sim a intuição." De facto a lógica tem um papel decisivo e crucial no programa intuicionista, onde se impõem restrições severas à lógica clássica. Por outro lado o método de prova intuicionista é na sua essência algorítmico, o que deixa pouco lugar à intuição. Mais, em larga medida, o programa intuicionista substitui a noção de verdade pela noção de demonstração.

3. Finalmente gostaria ainda de comentar as observações que são produzidas relativamente às noções de verdade e de demonstrabilidade. Diz Alexandre Pais que "apesar de todas as afirmações demonstráveis serem verdadeiras, existem afirmações matemáticas verdadeiras que não se podem demonstrar." A afirmação, no mínimo, necessita de clarificação e em todo o caso, mesmo tomando-a como verdadeira não traduz um defeito do método axiomático. O método axiomático é finitista, por opção, porque é necessário ter a possibilidade de proceder a uma análise exaustiva dos argumentos em termos lógicos. A verdade, mesmo a verdade no sentido de Tarski, não é finitária. É por isso natural que uma noção e outra não sejam equivalentes. Estamos, contudo, perante um preço a pagar e não perante um defeito. Apesar de tudo, esse preço a pagar não é tão alto como Alexandre Pais faz crer e, para ver isso basta que se analise a questão no devido contexto.

Se considerarmos a frase "existem afirmações matemáticas verdadeiras que não se podem demonstrar." O que significa o excerto "afirmações matemáticas verdadeiras"? A ideia de que existe uma realidade matemática exterior, que a axiomática pretende descrever, não passa de uma po-

Ernst Zermelo

sição filosófica cujo conteúdo essencial é extra-matemático. Recordando que a Matemática é essencialmente a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, incluindo o axioma da escolha (teoria esta usualmente designada de ZFC) então, aquilo que se designa de *verdade matemática*, na sua essência confunde-se com aquelas que são as consequências dos axiomas de ZFC. Efectivamente, quando falamos em *expressões matemáticas* estamos a referir-nos a certas expressões numa linguagem formal, cujo propósito reside em descrever propriedades de certos *mundos*. Existe um *dispositivo* conhecido como *semântica de Tarski* que permite decidir quando uma certa propriedade P é verdadeira num mundo M (se isso acontece escreve-se $M \models P$). Esta *relação* $M \models P$, entre mundos e propriedades é, ao contrário do que refere Alexandre Pais, formalizável em ZFC, pelo que a verificação da verdade de P em M é, em última análise a demonstração em ZFC da relação $M \models P$.

É claro que se o mundo M tiver *estrutura suficiente*, o formalismo e, em particular, a noção de demonstração podem ser formalizados em M. O mesmo não sucederá com a relação de verdade em M (devido aos teoremas de Gödel). Mas esta situação não traduz o alcance que Alexandre Pais pretende dar à sua frase, pois para o fazer teria que se confundir *verdade matemática* com *verdade em* M, o que não pode acontecer.

Bibliografia

Cantor, Georg (1955). *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. Dover: NY.

Dales, H. G.; Oliveri, G. (Eds.) (1998). *Truth in mathematics*. Clarendon Press: NY.

Ewald, W. B. (1996). *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of Mathematics* (Vol. I and II). Clarendon Press: NY.

Hart, W. D. (Ed.) (1996). The philosophy of mathematics. *Oxford Readings in Philosophy*. Oxford University Press: NY.

Kanamori, A. (1991). The higher infinite. *Perspectives in Mathematical Logic*. Springer: NY.

Pais, A. (2005). Conhecimento verdade e prova: um percurso pelas filosofias fundacionistas. In *Actas do V CIBEM* (CD-ROM). APM: Lisboa.

Reid, Constance (1996). *Hilbert*. Copernicus (Springer-Verlag): NY.

Schirn, M. (Ed.) (1998). *The philosophy of mathematics today*. Clarendon Press: NY.

António M. Fernandes
Instituto Superior Técnico