A calculadora na aula de Matemática

duas actividades de investigação realizadas numa turma do 6º ano

Graça Zenhas

Apesar da controvérsia em torno da pertinência da utilização da calculadora nos dois primeiros ciclos do ensino básico, ela é hoje um recurso incontornável na aula de matemática e a sua utilização prevista no currículo nacional: "Todos os alunos devem aprender a utilizar não só a calculadora elementar mas também, à medida que progridem na educação básica, os modelos científicos e gráficos". M.E. — DEB, 2001: 71.

Tem sido meu entendimento, como professora de Matemática do 2° ciclo, que a adequação da utilização da calculadora no desenvolvimento de actividades na aula, neste ciclo, se prende com duas situações:

— o tipo de actividade proposto;
— o domínio de cálculo evidenciado pelo aluno.

Os alunos devem ser capazes, perante uma situação que envolva um cálculo, de determinar se este pode ser um valor estimado ou se deve ser um valor exacto. Nesta segunda opção, têm de decidir se os valores em causa indicam a resolução através do cálculo mental ou através da realização do algoritmo. Por isso, considero fundamental que os professores do 2° ciclo continuem a promover actividades que desenvolvam competências de cálculo, pois estas são imprescindíveis em inúmeras situações, como por exemplo a avaliação da plausibilidade de uma determinada resposta.

No entanto, há actividades matemáticas em que os alunos devem ser libertados das tarefas de cálculo, por estas serem acessórias face ao tipo de competências que se pretende trabalhar.

Assim, na aprendizagem Matemática nos dois primeiros ciclos devem coexistir actividades que consolidam e desenvolvem competências de cálculo com actividades em que as tarefas de cálculo sejam feitas pela calculadora por se tornarem secundárias face ao trabalho a desenvolver, sobretudo, se o cálculo em causa, se tornar demorado e fastidioso descentrando, deste modo, a atenção dos alunos do essencial da tarefa a realizar.

Para ilustrar esta segunda situação apresento dois trabalhos de investigação de regularidades realizados pela minha turma de 6° ano no ano lectivo 2003/2004.

Primeira actividade: Investigando regularidades na divisão por 9

O formato proposto na ficha da página seguinte pretende familiarizar os alunos com a necessidade de sistematizarem a informação, formularem várias hipóteses e testarem-nas com vários exemplos, reflectirem sobre o trabalho desenvolvido e irem tirando conclusões. As diversas fases do problema estão explicitadas, ajudando-os a organizarem o seu raciocínio.

Este trabalho foi desenvolvido em duas aulas de 90 minutos. Na primeira aula, os alunos organizaram-se livremente, trabalhando uns em grupo, outros em pares e outros individualmente na resolução da investigação proposta na ficha. Durante o trabalho, questionavam colegas de outros grupos ou o professor. Na segunda aula foram discutidas as conclusões do trabalho.

Os cálculos foram feitos com calculadora e não ofereceram problemas. Rapidamente os alunos verificaram que:

$3 : 9 = 0,(3)$
$3 : 99 = 0,(03)$
$3 : 999 = 0,(003)$
...
$5 : 9 = 0,(5)$
$5 : 99 = 0,(05)$
$5 : 999 = 0,(005)$
...

Também concluíram facilmente que este padrão só surge quando o dividendo é menor que o divisor.

$23 : 9 = 2,(5)$
$23 : 99 = 0,(23)$
$23 : 999 = 0,(023)$
...

Os alunos observaram que o quociente era uma dízima infinita periódica em que só apareciam os algarismos do dividendo e zeros. O período tinha o mesmo número de algarismos que o divisor e, por isso, em alguns casos era necessário acrescentar zeros antes dos outros algarismos. Este padrão só surge quando o dividendo é menor que o divisor.

Ficha de trabalho

Assunto: Investigação de regularidades na divisão por 9

Dividindo por nove

O que acontece quando divides um número por 9? Por 99? Por 999?

Compreende o problema

1) O problema diz-te que números usar como divisor?
Diz-te que números usar como dividendo?

Decide um plano

2) Tenta algo. Escolhe um número qualquer e experimenta-o. Supõe que escolhes o 3. Então descobre:

3 : 9 = ________
3 : 99 = ________
3 : 999 = ________

3) O que está a acontecer?

Executa o plano

4) Procura um padrão (regularidade) experimentando outros números de um algarismo e escreve o que fores encontrando:

_____ : 9 = ________	_____ : 9 = ________	_____ : 9 = ________
_____ : 99 = ________	_____ : 99 = ________	_____ : 99 = ________
_____ : 999 = ________	_____ : 999 = ________	_____ : 999 = ________

Regista as tuas conclusões.

5) Usa o teu padrão para prever o que acontece quando 7 é dividido por 9, 99, por 999.
Verifica a tua previsão com a ajuda da calculadora. Estava certa?

Revê o problema

6) Irá o teu padrão manter-se quando o dividendo for um número de dois algarismos?

23 : 9 = ________________
23 : 99 = ________________
23 : 999 = ________________
23 : ...... = ________________
23 : .... = ________________

7) O que achas que acontecerá quando o dividendo for um número de três algarismos?
Escolhe um número de três algarismos e experimenta.

________ : 9 = ________________
________ : 99 = ________________
________ : 999 = ________________
________ : 9999 = ________________
________ : 99999 = ________________

8) Descreve o padrão.

A dificuldade surgiu na forma de comunicar os resultados, quer oralmente quer por escrito. Os alunos não encontravam as palavras adequadas para transmitirem as suas ideias, optando por as comunicar através de exemplos. Os trabalhos escritos reflectem esta dificuldade. A seguir apresentam-se algumas respostas dos alunos:

O divisor é 9 e o dividendo é um número escolhido por mim.

3: 9 = 0,333..
3 : 99 = 0,0303...
3 : 999 = 0,003003...

Sempre que se aumenta um nove aumenta um 0 e forma-se a regularidade e o número de 0 é o número de 9 menos um. O número do dividendo aparece sempre no quociente. Com 3 algarismos o padrão só surge quando o dividendo é menor que o divisor.

Sara

O que está a acontecer é que dividir qualquer número por 9 ou 99 ou 999 (...) acrescenta-se quantos zeros quanto o número de noves menos 1. Mas também acrescenta-se o dividendo ao quociente. O padrão só surge quando o dividendo é menor que o divisor.

Francisco, Miguel

Quando o divisor é um número inteiro só constituído por noves o resultado é um número infinito. Quantos mais noves houver mais zeros haverá a separar do dividendo.

Nós concluimos que quando o dividendo é maior que o divisor não se consegue fazer uma regra.

Nuno, Diogo, João

O que está a acontecer é que por cada 9 a mais no divisor acrescenta-se um zero no quociente, mas não modifica o dividendo.

A conclusão que tiramos é que mesmo que o algarismo do dividendo mude o resultado é sempre o mesmo.

Rui, Filipe

O que está acontecer é que quando se divide um número por outros números que só sejam constituídos pelo algarismo 9, o resultado é sempre uma *décima* infinita.

A conclusão a que eu chego quando se divide qualquer número que só seja constituído por noves o resultado é sempre uma décima infinita.

O 7 dividido por 9 daria 0,777... pelo 99 daria 0,070707... e pelo número 999 daria 0,007007007...

O padrão surge quando o dividendo é menor que o divisor.

O quociente é sempre igual ao dividendo acrescentando-se quantos zeros forem precisos.

Quanto maior for o divisor mais zeros acrescenta-se no quociente.

Gabriela, Cátia, Sofia, Adriana

A discussão das conjecturas e das regularidades descobertas pelos alunos é um momento importante, já que permite aos alunos verbalizarem os seus raciocínios, podendo este acto contribuir para a clarificação de aspectos por vezes ainda confusos. Torna também presente a necessidade de melhorar a capacidade de comunicação de ideias matemáticas. Nesta fase do trabalho, tenho a particular preocupação de intervir no sentido de precisar a linguagem matemática (repare-se no último texto, na utilização do termo *décima finita* em vez de *dízima finita*) e de auxiliar os alunos a comunicarem de forma clara o seu pensamento, evitando, contudo, que o rigor da linguagem se torne um obstáculo à comunicação.

Na actividade acima descrita, é fundamental que os alunos se apercebam da necessidade de testarem as suas conjecturas com vários exemplos que sustentem uma argumentação lógica. A calculadora permite-lhes fazer a validação das suas hipóteses, variando quantitativa e qualitativamente os exemplos.

Os alunos devem habituar-se a descrever este tipo de actividade encadeando as ideias, utilizando frases curtas e ilustrando-as, sempre que possível, com exemplos.

Ficha de trabalho

Assunto: Investigação de regularidades na divisão por 7

Dividindo por sete

Usando calculadora, transforma em dízima:

$$\frac{1}{7} = \qquad \frac{2}{7} = \qquad \frac{3}{7} =$$

$$\frac{4}{7} = \qquad \frac{5}{7} = \qquad \frac{6}{7} =$$

a) Notas alguma coisa de especial nos seis primeiros dígitos da dízima correspondente à divisão de um número inteiro por sete?

b) És capaz de estabelecer uma regra que permita prever o resultado de qualquer divisão por sete?

Segunda actividade: Investigando regularidades na divisão por 7

Este trabalho foi desenvolvido na turma, em duas aulas de 90 minutos, um mês depois da actividade *investigando regularidades na divisão por 9*.

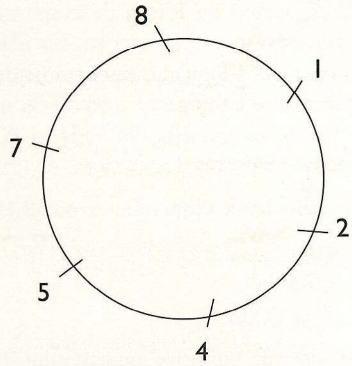
Os alunos organizaram-se livremente, trabalhando uns em grupo, outros em pares e outros individualmente. Durante o trabalho questionavam o professor ou colegas de outros grupos. O trabalho demorou 90 minutos e foi discutido numa segunda aula de 90 minutos.

Depois de transformarem a fracção em dízima,

$$\frac{1}{7} = 0,142857 \qquad \frac{2}{7} = 0,2857142$$

$$\frac{3}{7} = 0,428571 \qquad \frac{4}{7} = 0,571428$$

$$\frac{5}{7} = 0,714285 \qquad \frac{6}{7} = 0,857142$$



os alunos concluíram que:

— os algarismos 1, 2, 4, 5, 7, 8 apareciam em todas as dízimas;

— os algarismos apareciam sempre repetidos pela ordem 1, 4, 2, 8, 5, 7;

Rafael

a) Os algarismos são sempre os mesmos.
Estão ordenados na forma 1, 2, 4, 5, 7 e 8.
O período da dízima tem sempre 6 números.
O numerador é igual ao primeiro número da dízima sem contar com os números 3, 6 e 9.

b) A primeira regra é multiplicar o numerador por 14285. A segunda regra é o numerador é igual ao primeiro número da dízima sem entrar o 3, o 6 e o 9.

um de diferença por causa do 3 e 6

$$\frac{4}{7} = 0,(571428)$$

dois de diferença por causa do 3 e do 6

$$\frac{5}{7} = 0,714285$$

$$\frac{25}{7} = 3,5714285 \qquad \frac{4}{7} = 4:7 = 0,5714285$$

$$\underbrace{\frac{7}{7} + \frac{7}{7} + \frac{7}{7}}_{3,571428} + \frac{4}{7}$$

$$\frac{21}{7} + \frac{4}{7} = \frac{25}{7} \quad \boxed{\frac{7}{7} + \frac{7}{7} + \frac{7}{7}} + \frac{4}{7} = 3,5714285$$

$\boxed{1+1+1}$

Isabel

Os números 1, 4, 2, 8, 5, 7 aparecem em todas.

Que os primeiros números da dízima são por ordem, mas não podemos repetir. Os números estão por ordem do primeiro. Ex: a primeira é 1, 4, 2, 8, 5, 7 se começar por 2 a dízima é 2857142 e se começar por 7 a dízima é 7142857.

— o primeiro algarismo da dízima era o número do numerador. Como 3 (e depois 6) não existia no padrão descoberto para a formação do período da dízima, a partir daqui passava-se para o algarismo seguinte.

Um grupo achou que a situação era idêntica a um *relógio*, em que o mostrador, em vez dos números/horas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12, tinha assinalado 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Assim, para se saber a dízima correspondente a uma determinada fracção, uma vez descoberto o primeiro algarismo do período bastava olhar para o relógio pois a sequência dos algarismos era invariavelmente a mesma. Esta ideia propagou-se rapidamente pelos diversos grupos, que acharam a imagem visual particularmente facilitadora da clarificação do raciocínio.

Alguns alunos descobriram que:

— para se obter a dízima correspondente a $2/7$ bastava multiplicar 0,142857 — a dízima correspondente a $1/7$ — por 2; e

— para se obter a dízima correspondente a $3/7$ bastava multiplicar 0,142857 por 3. Como no decurso desta multiplicação, o penúltimo produto era $3 \times 4 = 12$, era então necessário juntar 1 ao último produto (3×1), obtendo-se assim 4. Por esta razão não aparecia o 3 no período das dízimas.

Explicação idêntica foi encontrada para o facto de não aparecer o 6.

$$\begin{array}{r} 1428571 \\ \times 2 \\ \hline 2857142 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1428571 \\ \times 3 \\ \hline 42857142 \\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1428571 \\ \times 4 \\ \hline 5714285 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1428571 \\ \times 5 \\ \hline 7142857 \\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1428571 \\ \times 6 \\ \hline 8571428 \end{array}$$

Os numerais mistos, tal como os alunos os trabalharam, ainda não tinham surgido nas aulas. Contudo, este facto pareceu não ser obstáculo, já que alguns alunos trabalharam com eles como se já estivessem familiarizados com esta forma de registo.

Em baixo apresentam-se algumas respostas dos alunos:

Susana

a) Em todos os resultados aparecem sempre os mesmos seis algarismos: 1, 2, 4, 5, 7, 8.

Aparecem na ordem 142857.

Por ex: na divisão 3:7 como o numerador é 3 e não entra no padrão tem que se pôr o 4 porque é o número que vem a seguir do 3. Mas na divisão 4:7 não se pode pôr o 4, porque este já foi usado então põe-se o 5 que é o número a seguir. Na divisão 5:7 também não se pode pôr o 5 porque este já foi usado e por isso põe-se o 7 porque o número a seguir do 5, o 6 não entra no padrão.

b) Por exemplo quando o numerador é maior que o denominador a parte inteira já não é nula mas a dízima é uma das divisões por 7 de um número mais pequeno que 7.

Ex:

$$\frac{1}{7} = 0,142857 \qquad \frac{8}{7} = \frac{7}{7} + \frac{1}{7} = 1,(12857)$$

Quando o numerador é múltiplo de 7 deixa de haver parte decimal.

O resultado da divisão 3:7 é o triplo da divisão 1:7. No resultado da divisão 3:7 não aparece o 3 porque vai um de trás, mudando o 3 para 4.

Sara

a) Em todos os resultados aparecem sempre os mesmos seis algarismos: 1, 2, 4, 5, 7, 8.

A ordem é 142857.

Se o numerador for 3 o resultado é 428571 porque o 3 não aparece no padrão mas aparece o 4 e como o 4 é a seguir do 3 segue a ordem do padrão a partir do 4.

Mas se depois aparece $4/7$ já não se pode por o 4 porque já foi usado e então põe-se o 5 que é a seguir do 4 e existe no padrão.

b) Quando o numerador é maior que o denominador a parte inteira já não é nula, mas a dízima é uma das divisões por 7 de um número.

Ex:

$$\frac{1}{7} = 0,142857\ldots \text{ a } \qquad \frac{8}{7} = \frac{7}{7} + \frac{1}{7} = 1,(12857)$$

Quando o numerador é múltiplo do denominador a parte decimal deixa de existir. O resultado da divisão de 3 por 7 é o triplo do resultado da divisão de 1 por 7. No resultado da divisão de $3/7$ não aparece o três porque vai de trás mudando o três para 4.

$$\begin{array}{r} 0{,}142857 \\ \times 3 \\ \hline 0{,}428571 \end{array}$$

É de realçar a dificuldade que representa escrever um texto em que se descreve uma regularidade. Esta turma está habituada a escrever, com frequência, na disciplina de Matemática e o facto de este ser o segundo trabalho de investigação de regularidades com divisões permite verificar uma evolução francamente positiva na comunicação escrita dos resultados da investigação. Nota-se a preocupação de utilizar frases curtas e de ilustrar as afirmações com exemplos para tornar mais clara a informação que se pretende transmitir.

Na parte final da segunda aula, propus ainda uma actividade de investigação de regularidades na divisão por 17:

- Uma calculadora foi usada para investigar o período das dízimas que se obtém quando o divisor é 17, mas a sua capacidade não foi suficiente para mostrar o ciclo completo de dígitos que se repete. Os diferentes cálculos conduziram às seguintes dízimas:

$$\frac{1}{17} = 0,0588235$$

$$\frac{2}{17} = 0,1176471$$

$$\frac{3}{17} = 0,1764705$$

$$\frac{4}{17} = 0,2352941$$

$$\frac{5}{17} = 0,2941176$$

$$\frac{6}{17} = 0,3529411$$

$$\frac{7}{17} = 0,4117647$$

- Sabendo que, neste caso, o período tem dezasseis dígitos, indica os vinte primeiros dígitos das dízimas correspondentes a:

$$\frac{1}{17}, \frac{2}{17}, \frac{3}{17}, \frac{4}{17}, \frac{5}{17}, \frac{6}{17}, \frac{7}{17}$$

Um número significativo de alunos rápida e facilmente chegou à conclusão de que o período da dízima era constituído pelos seguintes algarismos 2352941176470588.

$$\frac{1}{17} = 0,0588\underline{235}$$

$$\frac{4}{17} = 0,235\underline{2941}$$

$$\frac{5}{17} = 0,2941\underline{176}$$

$$\frac{7}{17} = 0,41176\underline{47}$$

$$\frac{3}{17} = 0,17647\underline{05}$$

$$\frac{1}{17} = 0,05\underline{88}235$$

No entanto, a observação do registo

$$\frac{2}{17} = 0,1176471$$

gerou muita confusão, pois não se enquadrava no padrão deduzido. Depois de algum tempo de discussão, alguns alunos resolveram verificar os resultados do cálculo das dízimas utilizando a calculadora. Não demorou muito a concluir que tinha havido um engano no registo resultante do arredondamento feito pela máquina.

Apesar de o meu engano não ter sido deliberado, acabou por proporcionar um momento de reflexão interessante.

O uso da calculadora nas aulas tem apaixonado a opinião pública e motivado debates acalorados. Será ela uma das causadoras do insucesso na aprendizagem da Matemática?

Eu penso que não. No entanto, a utilização da máquina de calcular na aula de Matemática não deve ser indiscriminada e os alunos não devem poder utilizá-la de forma acrítica. Compete aos professores determinarem em que circunstâncias os alunos a poderão usar e propor as experiências de aprendizagem adequadas. Penso que as actividades que apresentei se inserem nesta filosofia. Elas permitem ao aluno desenvolver o raciocínio indutivo, pois eles têm que deduzir uma regra válida para todos os casos a partir da observação sistemática de semelhanças e de diferenças em inúmeros exemplos. A necessidade dos exemplos e contra-exemplos para fundamentar conjecturas torna-se inultrapassável. E a utilização da calculadora revela-se imprescindível.

Referências

Abrantes, Paulo; Serrazina Lurdes; Oliveira, Isolina (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME-DEB.

BOLT, Brian (1991). *Actividades Matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

ME-DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico — Competências Essenciais*. Lisboa: ME-DEB..

NCTM (1989). *How to develop problem solving using a calculator*. Virgínia: Reston.

Maria da Graça Zenhas
Escola E.B 2,3 de Gueifães