Computadores e Probabilidades

João Filipe Matos, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

É importante compreender os desafios colocados pela utilização das novas tecnologias de informação — e em particular dos computadores — em todas as esferas da sociedade, e as suas implicações na educação. E neste domínio é necessário explicitar propostas pedagógicas consistentes para a utilização curricular dos computadores em Matemática, quer na sala de aula, quer em contextos informais de aprendizagem como os Clubes e Núcleos de Informática.

Por outro lado, é igualmente importante contribuir para a compreensão das implicações que a utilização dos computadores poderá ter na relevância dos diversos tipos de actividades a realizar em Matemática.

É nesse contexto que se aborda, através de um exemplo concreto, a problemática da utilização do LOGO em actividades de investigação no domínio das Probabilidades e se pretende contribuir para a clarificação do *interface* entre o LOGO e a Matemática.

Os computadores como tecnologias cognitivas

Muito antes da era dos computadores, diversos instrumentos — tais como a linguagem escrita — permitiram realizar a extensão do nosso pensamento. Esta extensão pode ser conceptualizada sobretudo como contributo para a elaboração e descoberta. Estes instrumentos são designados por Pea (1987) como *tecnologias cognitivas*. Os computadores constituem um dos melhores exemplos de instrumentos propiciadores de desenvolvimento cognitivo e de produção intelectual. Por exemplo, no domínio da Matemática, ao permitirem a análise e discussão dos passos dados na resolução de um dado problema, eles têm a particularidade de «tornar externos os produtos intermédios do pensamento» (Pea, 1987, p. 91) e dessa forma contribuir para uma melhor compreensão dos aspectos mais profundos da questão ou problema em estudo.

A utilização do computador, como ferramenta, para realizar uma abordagem dum problema (por exemplo através de uma simulação) ou para ensaiar uma dada estratégia, constitui um exemplo do papel do computador como tecnologia cognitiva na educação matemática.

Probabilidades e Currículo

A ideia de que as Probabilidades devem ser um tema integrante dos currículos de Matemática tem vindo a ser defendida desde há alguns anos, em Portugal, por diversos autores (Matos, 1983; Ponte, 1985; Abrantes e outros, 1986) e, mesmo, desde os primeiros anos de escolaridade (Bernardes, 1987; Sousa, 1987). Reflectindo por um lado uma preocupação já sentida a nível internacional (NCTM, 1980), a introdução de elementos de Probabilidades e Estatística no currículo é também justificada na medida em que pode constituir ela mesma uma oportunidade de abordar, de uma forma natural, diferentes temas e aplicações da Matemática.

No entanto, a concepção tradicional de Matemática, tende a privilegiar o raciocínio dedutivo na resolução de problemas envolvendo Probabilidades, dando pouco ênfase a abordagens de tipo intuitivo. A razão geralmente apontada é a impossibilidade de considerar um «número adequado» de ensaios de um dado acontecimento para obter uma solução do problema (Matos, 1989). Se tomarmos em consideração as actuais potencialidades dos computadores, esta posição, deverá ser naturalmente reavaliada.

Assim, ao admitir a inclusão de Probabilidades no currículo de Matemática, desde os primeiros anos de escolaridade, deve ser objectivo central a sensibilização dos alunos — a partir de uma avaliação qualitativa do grau de incerteza de um acontecimento aleatório — para o facto de que também o fortuito pode ser analisado racionalmente. Simultaneamente, os alunos deverão ser progressivamente sensibilizados para a realização de uma avaliação quantitativa da probabilidade de um dado acontecimento ocorrer.

Este tipo de proposta deverá passar pela ideia de que a probabilidade de um acontecimento ocorrer é uma avaliação ligada à informação que é possível obter sobre esse acontecimento. E é, actualmente, indiscutível que a recolha de informação pertinente, a sua análise e tratamento, com vista à elaboração de conjecturas, constitui um dos objectivos mais importantes da Educação Matemática. Esta perspectiva implica a aceitação de abordagens intuitivas aos problemas de Probabilidades. Pesci (1988) admite que a probabilidade associada a um acontecimento não é algo objectivo e estritamente «contido» no acontecimento e que temos que descobrir, mas sim a avaliação da probabilidade desse acontecimento ocorrer numa dada situação. Ao fazermos uma avaliação daquela probabilidade baseamo-nos na nossa compreensão da situação e portanto na informação que dele conseguimos obter.

Probabilidades e Simulações

O tipo de informação necessária pode ser obtido por via experimental, mesmo nos casos em que os acontecimentos em estudo não são fisicamente realizáveis. De facto, um dos meios interessantes de estudar a probabilidade de um acontecimento ocorrer é o recurso à simulação desse acontecimento. Naturalmente que o recurso à simulação será justificado na medida em que for possível repetir essa simulação (tantas vezes quantas quisermos) acumulando, dessa forma, mais informação sobre ele. Cabe aqui referir que uma das questões centrais das Probabilidades é a ligação entre os conceitos de frequência e de probabilidade de um dado acontecimento, o que por si só justificaria uma abordagem experimental deste tipo de problemas.

No entanto, uma das dificuldades inerentes ao desenvolvimento de simulações em Probabilidades é a escolha de questões interessantes para a realização de propostas de actividades inovadoras. Se é fácil encontrar bons problemas com «respostas teóricas» interessantes, tal não acontece em geral com as simulações (Chance & Brazier, 1986).

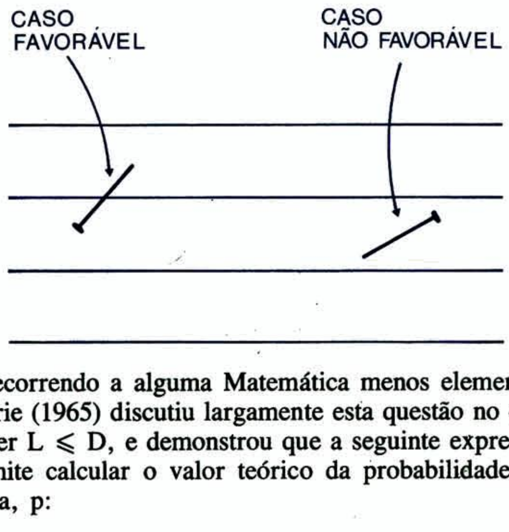
As simulações podem ser realizadas numa variedade de contextos e utilizando uma variedade de materiais manipuláveis. Naturalmente que os computadores assumem, neste contexto, um papel relevante, já que permitem a construção de simulações de acontecimentos (inclusivamente de realização perigosa ou mesmo impossível) e a sua repetição com grande economia de tempo.

O problema do Conde de Buffon

Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon, biólogo naturalista do século XVIII e um dos primeiros matemáticos a explicitar a abordagem geométrica de problemas de Probabilidades, enunciou o seguinte problema:

Se, num conjunto de rectas paralelas desenhadas à distância D (constante), lançarmos um alfinete de comprimento L, qual é a probabilidade de que o alfinete toque uma das rectas?

Poderíamos discutir o que vai ser considerado como caso favorável neste problema e iniciar o estudo de casos particulares (ver fig. 1). Vamos no entanto abordar o problema de uma forma mais global, tomando-o como referência para o desenvolvimento de algumas ideias.



Recorrendo a alguma Matemática menos elementar, Dörrie (1965) discutiu largamente esta questão no caso de ser $L \leqslant D$, e demonstrou que a seguinte expressão permite calcular o valor teórico da probabilidade em causa, p:

$$p = \frac{2\,L}{D}$$

O recurso à interpretação geométrica da probabilidade (Dahlke & Fakler, 1982) poderia levar a uma abordagem diferente desta questão.

A construção de uma simulação poderá permitir analisar este problema através de uma perspectiva experimental envolvendo questões e problemas interessantes. Consideremos o caso particular em que o comprimento dos alfinetes é igual à distância entre cada duas rectas paralelas consecutivas (L=D). Poderíamos desenhar sobre uma cartolina um conjunto de rectas paralelas à mesma distância e lançar sobre elas «ao acaso» um determinado número *n* de alfinetes. A contagem do número de alfinetes que fica em posição favorável poderá dar um primeiro valor experimental da probabilidade. E poderemos repetir este processo acumulando mais informação acerca do problema. Diversas perspectivas podem ser encaradas na construção de uma simulação deste problema (ver por exemplo, Carlson, 1981).

Um dos instrumentos de que dispomos para a construção de processos de simulação é a linguagem LOGO e esta actividade pode assumir um carácter pedagógico relevante. Tratando-se de uma linguagem de programação «transparente», acessível e simultaneamente bastante potente (Matos, 1987), o LOGO constitui um instrumento de trabalho que pode permitir fazer da própria construção da simulação uma actividade educativa, quer pelos problemas que surgem associados, quer pela clarificação que exige em termos de definição do problema a estudar e do tipo de resultados que se pretende obter.

Além disso, uma das características interessantes do LOGO é permitir a abordagem de problemas através do aproveitamento da «informação local» a que o computador tem acesso uma vez que, em cada momento, a tartaruga «conhece» as suas coordenadas, a sua orientação, a sua cor, a sua forma, a cor do ecrã no ponto em que se encontra, etc.

A Simulação

Em termos de definição da simulação, em termos gráficos, poderíamos caracterizar os seguintes passos para cada ensaio:

(i) desenhar as rectas paralelas;

(ii) desenhar um alfinete lançado aleatoriamente sobre as rectas;

(iii) verificar se o alfinete corta ou não uma das rectas.

Pondo de lado a preocupação com questões de carácter gráfico, vamos centrar-nos no processo de lançamento de um alfinete. A posição de um alfinete pode ser caracterizada, no plano das rectas paralelas, por um ponto e uma direcção.

Através da operação **random** o computador é capaz de simular a criação de números aleatórios (ver a este respeito a secção LOGO.MAT neste número da revista). Assim, por exemplo, random 60 gera um número aleatório entre 0 e 59. Tomando o exemplo de um conjunto de rectas distando de 10 unidades e um alfinete de comprimento 10, e depois de desenhadas as rectas em cor magenta (código 2 na versão LOGOWRITER), o procedimento **buffon** permitirá criar a posição aleatória e desenhar o alfinete verificando ao mesmo tempo se ele corta uma das rectas:

```
to buffon
make "posicao list random 60 random 60
pu setpos :posicao
seth random 360
repeat 10 [forward 1 teste]
setpos :posicao pd forward 10
end

to teste
if equal? colorunder 2 [make "cf :cf+1]
end
```

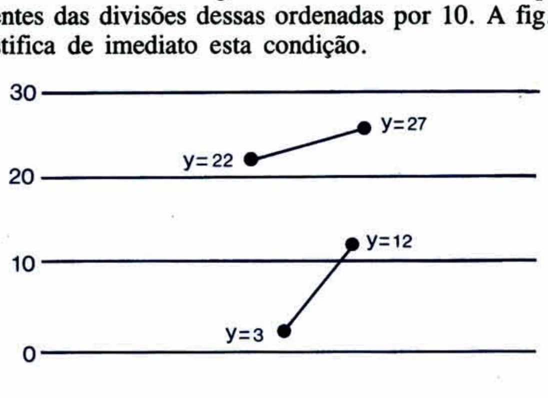
A variável **:posicao** é criada aleatoriamente com a operação **random** e a tartaruga é colocada nessa posição. Depois de ser orientada também aleatoriamente com a instrução **seth random 360**, é realizado o processo de identificação da situação do alfinete; passo a passo, é executado o procedimento **teste** que verifica se o traço debaixo da tartaruga é de cor magenta (código 2) e em caso afirmativo é incrementada uma unidade na variável acumulação **:cf**. Finalmente é desenhado o alfinete através da última linha do procedimento **buffon**.

Uma outra abordagem poderia tirar partido de um traçado cuidado das rectas. Se as paralelas forem desenhadas em posição horizontal a partir da origem [0 0] em intervalos de 10 unidades, bastará comparar as ordenadas dos pontos inicial e final de cada alfinete para verificar se este corta ou não uma das rectas. O procedimento **novo.buffon** resolve o problema:

```
to novo.buffon
make "posicao.ini list random 60 random 60
pu setpos :posicao.ini
seth random 360
pd forward 10
make "posicao.fin pos
novo.teste
end

to novo.teste
make "oi last :posicao.ini
make "of last :posicao.fin
if not equal? int (:oi/10) int (:of/10) [make "cf :cf+1]
end
```

Neste caso o alfinete é desenhado de uma vez, mantendo-se em memória os valores das posições inicial (**:posicao.ini**) e final (**:posicao.fin**) da tartaruga, isto é, das extremidades do alfinete. O procedimento **novo.teste** selecciona as ordenadas daquelas duas posições e verifica se são iguais os valores inteiros dos quocientes das divisões dessas ordenadas por 10. A fig. 2 justifica de imediato esta condição.



A utilização da simulação na repetição do número de ensaios poderá induzir uma ideia acerca do valor aproximado da probabilidade. Estes valores aproximados que é possível obter através da simulação podem constituir referências para a análise teórica do problema na medida em que se trata de informação recolhida no próprio acontecimento. Para além dos valores probabilísticos experimentais obtidos será necessário desenvolver outras abordagens de índole teórica que permitam resultados definitivamente exactos. Mas aquele tipo de abordagem pode proporcionar e iluminar novas formas de encarar o problema inicial.

Através do registo sistemático das conclusões de cada sucessão de ensaios poderá ser possível obter indicações úteis acerca do problema. Se a definição da simulação incluir parâmetros que permitam fazer variar o comprimento do alfinete e a distância entre as rectas paralelas será possível estudar a variação desses factores na tendência do valor da probabilidade.

Investigar para Aprender

Pela sua natureza, as investigações em Matemática estão estreitamente ligadas aos conteúdos matemáticos. Mas o foco dessas actividades é o processo utilizado para lidar com aqueles conteúdos. Alguns dos processos relevantes para a Matemática passam pela formulação de problemas, generalização e particularização de soluções, desenvolvimento de simbologia e notações, registo de observações, exploração sistemática de questões, elaboração de conjecturas e tentativa da sua demonstração, etc. Alguns destes processos são componentes daquilo que é geralmente descrito como pensamento matemático e constituem actividades em que não existe substituto para a experiência pessoal. Ao realizar investigações em Matemática, os alunos são em grande parte responsáveis pela definição e exploração das questões, deixando, dessa forma, de ser tarefa do professor. Kissane (1988) apresenta cinco tipos de razões para a realização de actividades de investigação:

1. Trata-se de uma actividade que tem a ver com a natureza da actividade matemática — a formulação de problemas.
2. Coloca o ênfase da formação em Matemática naqueles aspectos menos susceptíveis de serem substituídos pela tecnologia.
3. Contribui para o desenvolvimento da persistência dos alunos.
4. Propicia uma melhor compreensão da natureza da Matemática através da sua construção e da realização de experiências.
5. As investigações em Matemática fornecem um contexto no qual os alunos poderão envolver-se no desenvolvimento de Matemática, através de uma motivação intrínseca progressivamente adquirida pela experiência.

Assim, a realização deste tipo de actividades constitui uma contribuição importante para a educação matemática. E os computadores podem contribuir de forma significativa para a criação de um ambiente de trabalho em que as actividades de investigação se desenvolvam com facilidade, constituindo verdadeiras «bancadas» para realizar experiências em Matemática. É neste sentido que a proposta de envolvimento dos alunos em actividades de investigação com base em micromundos é colocada.

Conclusão

Ao possibilitar a construção de diferentes micromundos matemáticos — e simultaneamente a simulação de processos e fenómenos que podem constituir um contexto interessante para a construção da Matemática — a utilização do LOGO coloca desafios permanentes. Em particular, o LOGO permite a construção de simulações de processos aleatórios que possibilitam aos alunos a realização de sucessivos ensaios, proporcionando uma abordagem experimental de diversos problemas de Probabilidades. As características da linguagem LOGO e a facilidade de manipulação de variáveis, propiciam o desenvolvimento de uma atitude investigativa da parte dos alunos, através da alteração de parâmetros e subsequente análise dos resultados.

Ao propor a utilização dos computadores no ensino da Matemática devemos ter em consideração que os êxitos dessa utilização poderão passar muito mais pela qualidade das propostas pedagógicas que consigamos explicitar do que pela quantidade de *software* específico que consigamos reunir.

Referências

Abrantes, P., Barros, C., Cerqueira, F., Couto, H. & Mesquita, C. (1986). Estatística no Ensino Secundário: uma oportunidade para renovar. *PROFMAT*, 2, p. 93-107.

Bernardes, O. (1987). Probabilidades no Ensino Básico? *PROFMAT*, 3, p. 147-158.

Carlson, R. (1981). Buffon's needle problem on a microcomputer. *Mathematics Teacher*, 74(8), p. 638-640.

Chance J. & Brazier . (1986). Two Problems that Illustrate the Techniques of Computer Simulation. *Mathematics Teacher*, 79(9) , p. 726-731.

Dahlke, R. & Fakler, R. (1982). Geometrical Probability — a Source of Interesting and Significant Application of High School Mathematics. *Mathematics Teacher*, 16, p. 736-745.

Dörrie, H. (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. New York: Dover.

Kissane, B. (1988). Mathematical Investigation: description, rationale and example. *Mathematics Teacher*, Oct. 88, p. 520-528.

Matos, J. F. (1983). A Estatística no Ensino Secundário. *Página da Educação Diário de Notícias*.

Matos, J. F. (1987). *A Natureza do Ambiente de Aprendizagem Criado com a Utilização da Linguagem LOGO no Ensino Primário e as suas Implicações na Construção do Conceito de Varável*. Lisboa: Projecto MINERVA, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Matos, J. F. (1989). O LOGO e a Educação Matemática: um exemplo de Probabilidades. *Aprender*, 7, p. 19-25.

NCTM (1980). *Agenda for Action*. Reston: NCTM.

Pea, R. (1987). Cognitive Technologies for Mathematics Education. In Schoenfeld, A. (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* New Jersey: LEA.

Pesci, A. (1988). *Proposal fo curriculmum for teaching Probability and Statistics*. Comunicação apresentada no Internationial Congress on Mathematical Education, Budapest.

Ponte, J. P. (1985). O impacto dos computadores no currículo de Matemática. *PROFMAT*, 1, p. 25-39.

Sousa, M. A. (1987). Estatística no Ensino Primário. *PROFMAT*, 3, p. 111-114.