

# Jacob Steiner e o problema da menor malha viária

José Luiz Pastore Mello



## O problema da menor malha viária

O caminho mais curto ligando dois pontos no plano euclidiano é a linha recta, mas qual seria o caminho mais curto ligando quatro pontos?

Do ponto de vista prático, esse problema poderia ser apresentado da seguinte forma: se quisermos construir estradas ligando quatro cidades, qual é a configuração da malha viária mais curta possível? Para simplificar a análise do problema, admitiremos que cada cidade esteja localizada no vértice de um quadrado de lado unitário.

A figura 1 (página seguinte) indica seis possíveis projetos de malha viária ligando as cidades *A*, *B*, *C* e *D*.

No projeto (1) temos a malha com as menores distâncias ligando duas cidades quaisquer, contudo, seu comprimento total ( $4 + 2\sqrt{2} \approx 6,83$ ) ainda pode ser sensivelmente reduzido. Na opção (2), por exemplo, conseguimos reduzir o comprimento da malha para  $2\pi(0,5 \cdot \sqrt{2}) \approx 4,44$ . Essa opção pode ainda ser melhora-

da, como mostra o projeto (3), onde o comprimento total se reduz para 4 unidades.

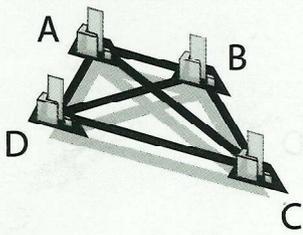
O projeto (4) continua garantindo a ligação entre as quatro cidades e reduz o comprimento total da malha para 3 unidades. O projeto (5) não reduz o comprimento da malha em relação ao anterior, mas melhora sua eficiência, já que nele pode-se ir da cidade *A* para *B* percorrendo um caminho mais curto do que em (4).

Dos seis projetos apresentados, (6) é o de malha viária mais curta ( $2\sqrt{2} \approx 2,83$ ), contudo ele não constitui a solução do problema apresentado inicialmente, como veremos a seguir.

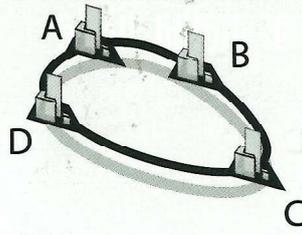
## A mais curta entre todas as malhas possíveis

A figura 2 indica a configuração da mais curta malha viária possível (as duas malhas apresentadas nessa figura diferem apenas por uma rotação de  $90^\circ$ ).

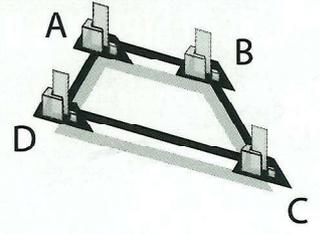
Figura 1.



[1]



[2]



[3]

Figura 2.

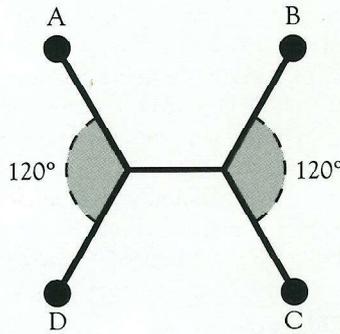
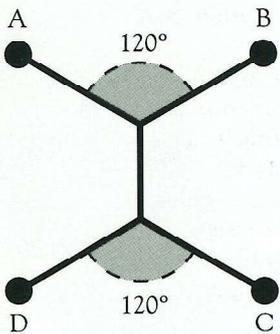
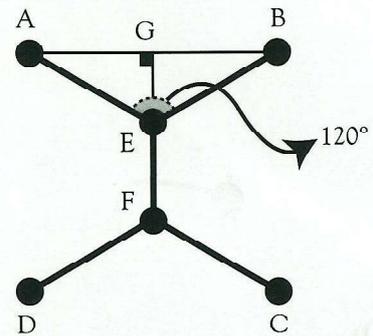


Figura 3.



Antes de demonstrarmos que tal malha constitui o mais curto caminho possível, vamos calcular o seu comprimento total tomando como referência a figura 3.

O  $\triangle ABE$  (figura 3) é isósceles, com ângulos da base medindo  $30^\circ$ . Aplicando a lei dos senos, temos que

$$1/\text{sen } 120^\circ = \overline{AE}/\text{sen } 30^\circ,$$

ou seja,

$$\overline{AE} = \sqrt{3}/3$$

(observe nesta malha que  $\overline{AE} = \overline{BE} = \overline{CF} = \overline{DF}$ ).

Como  $\overline{AG} = 0,5$  e o  $\triangle AGE$  é retângulo,

$$\overline{GE} = 0,5 \cdot \text{tg } 30^\circ,$$

ou seja,  $\overline{GE} = \sqrt{3}/6$ . Da figura concluí-se que

$$\overline{EF} = 1 - 2\overline{GE},$$

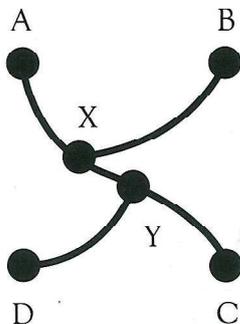
ou seja,  $\overline{EF} = (3 - \sqrt{3})/3$ . Como a malha total mede  $4\overline{AE} + \overline{EF}$ , seu comprimento será igual a  $1 + \sqrt{3} \approx 2,73$ . Esse resultado é 4% menor do que o valor encontrado na malha (6) da figura 1.

### Demonstração matemática da solução do problema

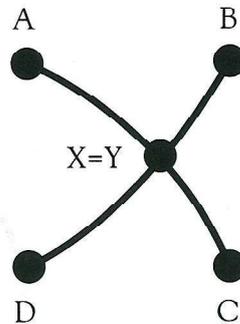
Jacob Steiner (1796–1863), qualificado por muitos historiadores como o maior geômetra desde Apolônio, foi o primeiro a propor o problema da conexão de três ou mais pontos no plano por meio de um caminho total de comprimento mínimo. Como Steiner foi reconhecidamente um geômetra

Figura 4.

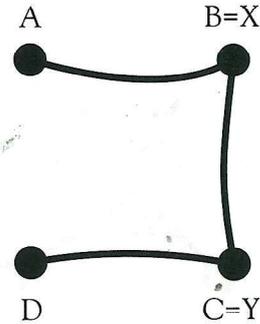
Exemplo 1

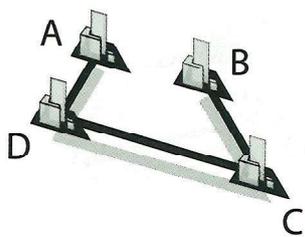


Exemplo 2

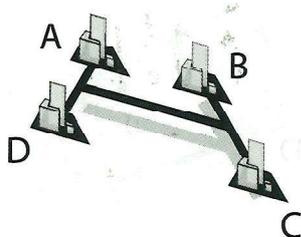


Exemplo 3

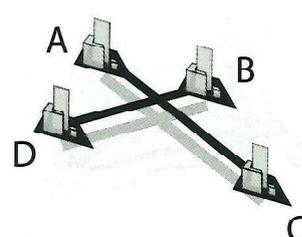




[4]

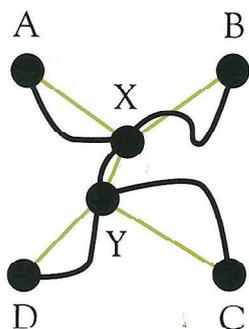


[5]



[6]

Figura 5.



que não apreciava o método analítico — considerado por ele uma “muleta para os espíritos menos dotados” — seus estudos sobre caminhos mínimos sempre privilegiaram o método geométrico puro. O encaminhamento que faremos da solução do problema da malha mínima ligando quatro pontos nos vértices de um quadrado ilustra, de maneira relativamente simples, o alcance desse método de investigação, como veremos a seguir.

Chamemos de caminho  $l$  qualquer ligação que conecte o vértice  $A$  ao  $C$  do quadrado. Para que exista um caminho que conecte os quatro vértices do quadrado,  $B$  e  $D$  devem se conectar-se ao caminho  $l$ . Chamaremos os pontos de conexão de  $B$  e  $D$  com  $l$  de  $X$  e  $Y$ , respectivamente (esses pontos são chamados de pontos de Steiner). Observe (figura 4) que, dependendo dos caminhos de  $B$  e

$D$  até  $l$ ,  $X$  e  $Y$  podem ser dois pontos distintos (exemplo 1), pontos coincidentes (exemplo 2), ou ainda vértices do quadrado (exemplo 3).

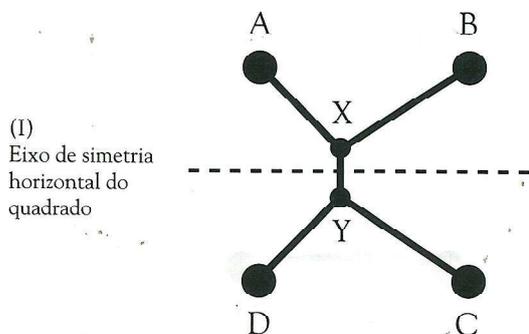
Como estamos interessados na malha total mais curta, devemos observar ainda que um caminho intermediário em linha recta ligando dois pontos será sempre mais curto do que um caminho em linha curva, como ilustra a figura 5.

Resumindo as informações que temos até o momento, é possível concluir que o diagrama que resolve o problema é composto de cinco (ou menos) caminhos intermediários em linha recta, com dois pontos de Steiner (ou um).

Se a solução do problema fosse alguma configuração de malha com um único ponto de Steiner, ou seja, uma solução com  $X = Y$ , a mais curta configuração possível seria aquela que analisamos em (6) da figura 1. Contudo, a malha da figura 2 (e sua rotação de  $90^\circ$ ), que possui dois pontos de Steiner, constitui uma configuração mais curta do que a malha (6) da figura 1, o que implica dizer que a configuração da menor malha viária não pode ter apenas um ponto de Steiner. Resta-nos provar agora que entre todas as malhas com dois pontos de Steiner, a da figura 2 é a de menor comprimento total.

Dada uma malha ligando os quatro vértices de um quadrado, uma reflexão sobre eixo de simetria horizontal (ou vertical) do quadrado reduzirá, de forma eficiente, a malha para uma situação semelhante a (I) ou a (II) da figura 6.

Figura 6.



(I)  
Eixo de simetria  
horizontal do  
quadrado

(II) Eixo de simetria  
vertical do quadrado

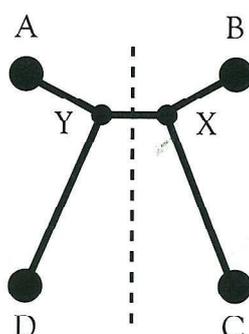


Figura 7.

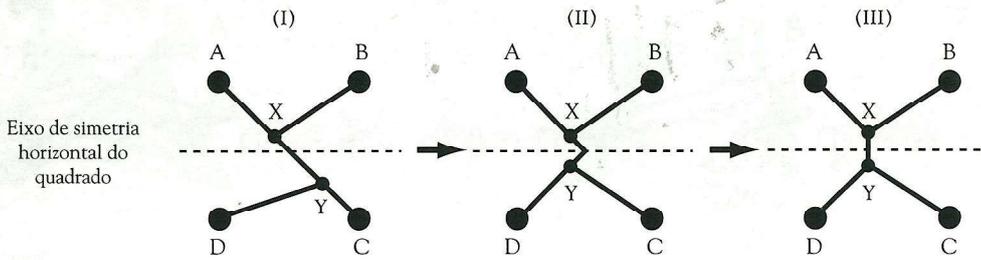
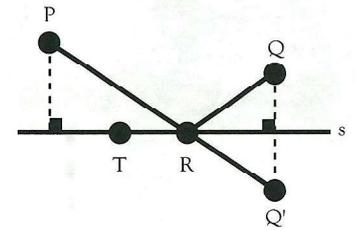


Figura 8.



Para ilustrar tal processo, vamos admitir a malha (I) da figura 7, onde  $\overline{AX} \neq \overline{DY}$  e  $\overline{BX} \neq \overline{CY}$ , e verificar como ela pode ser substituída por uma malha mais curta onde  $\overline{AX} = \overline{DY}$  e  $\overline{BX} = \overline{CY}$ .

Partindo de (I) na figura 7, dividimos a malha em duas partes pelo eixo de simetria horizontal do quadrado, fazendo em seguida uma reflexão da metade menor da malha sobre a maior, como em (II). O comprimento da malha (II) pode ser reduzido ainda mais com a substituição da ligação entre os dois pontos de Steiner por uma linha recta, como em (III). Observe que em (III) temos uma malha total mais curta do que em (I), e com  $\overline{AX} = \overline{DY}$  e  $\overline{BX} = \overline{CY}$ .

Processo semelhante poderia ser feito, com outras malhas, utilizando o eixo de simetria vertical do quadrado; neste caso a malha resultante teria  $\overline{AY} = \overline{BX}$  e  $\overline{DY} = \overline{CX}$ .

Até este momento sabemos que:

- i. A configuração que resolve o problema possui dois pontos de Steiner ( $X$  e  $Y$ );
- ii. Os cinco segmentos definidos por um diagrama com dois pontos de Steiner devem ser linhas rectas;
- iii. A configuração da malha mínima ligando os vértices  $A, B, C$  e  $D$  do quadrado deverá ter  $\overline{AX} = \overline{DY}$  e  $\overline{BX} = \overline{CY}$  (ou  $\overline{AY} = \overline{BX}$  e  $\overline{DY} = \overline{CX}$ ).

Para demonstrar que a configuração apresentada na figura 2 representa a solução do problema do caminho mínimo, precisamos provar que as três linhas que partem dos pontos  $X$  e  $Y$  formam, em torno de  $X$  e de  $Y$ , três ângulos de  $120^\circ$ . Para isso usaremos o seguinte teorema:

*Se  $P$  e  $Q$  são dois pontos de um lado da recta  $s$ , e  $R$  é um ponto de  $s$  tal que a soma  $PR + RQ$  seja mínima, então os ângulos formados entre  $PR$  e  $s$ , e  $RQ$  e  $s$  são congruentes.*

Demonstração:

Inicialmente marcamos o ponto  $Q'$ , resultado da reflexão de  $Q$  sobre  $s$ , conforme mostra a figura 8.

Sendo  $T$  um ponto móvel sobre  $s$ , todos os possíveis triângulos  $TQQ'$  serão isósceles com  $\overline{TQ} = \overline{TQ'}$ , o que implica dizer que  $\overline{PT} + \overline{TQ}$  é igual a  $\overline{PT} + \overline{TQ'}$ .

Segue que o menor valor possível para  $\overline{PT} + \overline{TQ'}$  ocorrerá quando os pontos  $P, T$  e  $Q'$  estiverem alinhados, ou seja, quando o ponto móvel  $T$  coincidir com o ponto  $R$ , garantindo assim que os ângulos formados entre  $PR$  e  $s$ , e  $RQ$  e  $s$  sejam congruentes.

Partindo agora de um diagrama que atenda as condições i, ii e iii, como por exemplo a malha (I) da figura 6; e assumindo que neste diagrama a medida  $\overline{AX} = r$  seja a exacta medida de  $\overline{AX} = r$  no diagrama da mais curta malha total possível, traçaremos um círculo de raio  $r$  e centro

Figura 9.

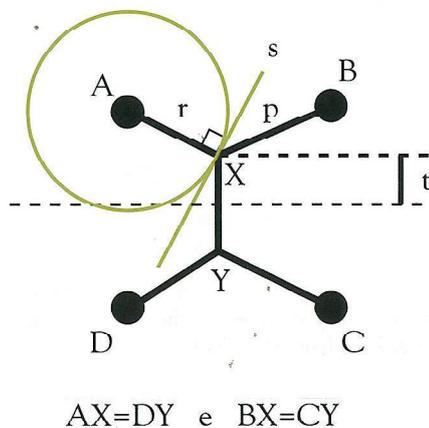
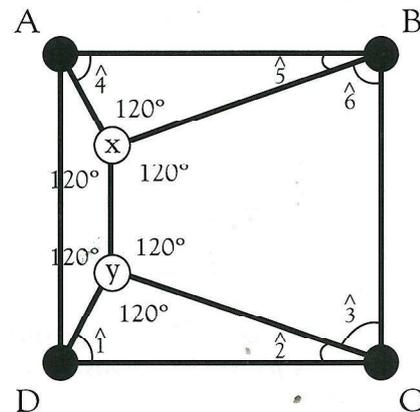


Figura 10.



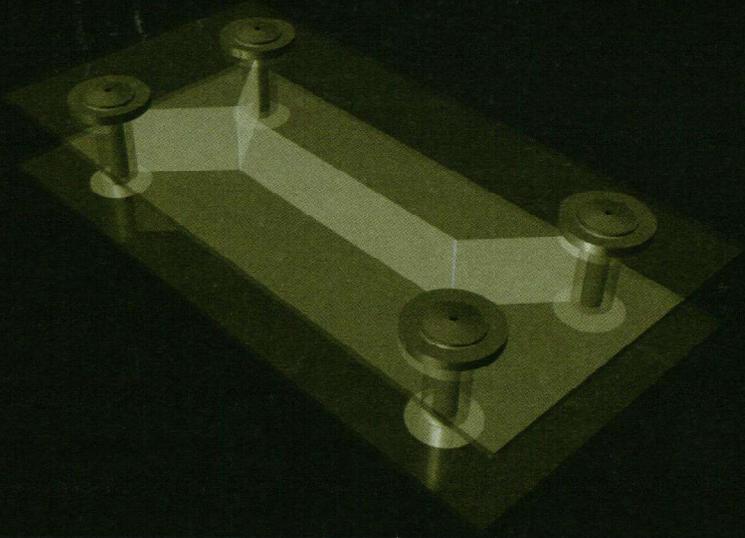
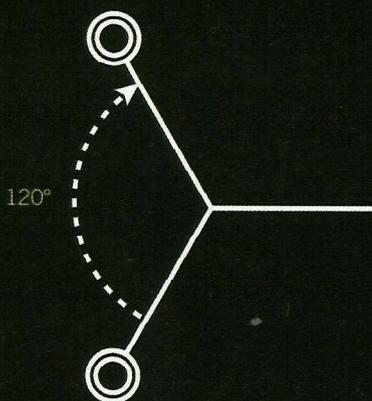


Figura 11.

$A$ , e uma recta  $s$  tangente à circunferência no ponto  $X$  (figura 9).

Para que o diagrama represente a malha total mínima, ou seja, a menor soma  $2r + 2p + 2t$ , com  $r$  dado, devemos encontrar a menor soma  $2p + 2t$ , o que é equivalente a procurar uma configuração de malha com a menor soma  $p + t$ . Pelo teorema demonstrado, se  $p + t$  é mínimo, então o ângulo formado entre  $p$  e  $s$  é congruente ao ângulo formado entre  $t$  e  $s$ , o que implica dizer que

$$\angle AXY = \angle BXA = \angle BXY = 120^\circ$$

na situação da malha de comprimento mínimo. Com auxílio de um círculo de centro  $D$  e raio  $DY = r$ , resultado análogo pode ser obtido para os ângulos em torno de  $Y$ .

Se provarmos agora que  $r = p$  (ou seja, que  $\overline{AX} = \overline{DY} = \overline{BX} = \overline{CY}$ ), concluiremos que a configuração apresentada na figura 2 representa a malha do menor comprimento possível.

Supondo inicialmente  $r < p$ , como mostra a figura 10, teremos  $\hat{1} > 30^\circ$  e  $\hat{2} < 30^\circ$ , implicando  $\hat{3} > 60^\circ$ ; e  $\hat{4} > 30^\circ$  e  $\hat{5} < 30^\circ$ , implicando  $\hat{6} > 60^\circ$ , o que caracteriza uma contradição, já que a soma dos ângulos internos do quadrilátero  $BCXY$  deve ser  $360^\circ$ .

Por raciocínio análogo também não poderemos ter  $r > p$ , o que garante  $r = p$  e resolve definitivamente o problema da malha mínima.

### Uma demonstração experimental da solução

O problema que acabamos de resolver matematicamente pode também ser solucionado com auxílio de uma experiência com bolhas de sabão. Se mergulharmos em uma solução com água e sabão um dispositivo com duas chapas paralelas fixadas por quatro pinos de comprimento  $h$  formando um quadrado, ao retirarmos o dispositivo da água, a bolha de sabão formada terá superfície mínima (devido ao equilíbrio termodinâmico), o que equivale no plano bidimensional a solução do problema que acabamos de resolver (figura 11):

### Bibliografia recomendada

- [1] Courant, R., Robbins H. *O que é matemática?* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000 (pág. 467–480).
- [2] Eves, H. *Introdução à história da matemática.* Campinas: Editora da Unicamp, 1995 (pág. 593).
- [3] Gardner, M. *As últimas recreações.* Lisboa: Gradiva, 2002 (pág. 291–304).
- [4] Isenberg, C. *The science of soap films and soap bubbles.* New York: Dover, 1992 (pág. 53–59).
- [5] Tanton, J. S. *Solve This: Math Activities for Students and Clubs.* Washington: The Mathematical Association of America, 2001 (pág. 169–171)

José Luiz Pastore Mello  
Colégio Santa Cruz (São Paulo, Brasil)