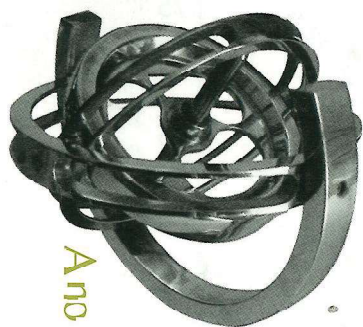


2005



Ano Internacional da Física

O contínuo [espaço — tempo relativo] e o discreto [quântico], o caos e a ordem

M. Mercês Ramos e J. Sousa Ramos

2005, ano mundial da Física! Comemora-se igualmente os 100 anos da relatividade restrita e as interpretações do efeito fotoelétrico e do movimento browniano apresentados em 1905 por Einstein, numa série de seis artigos. No primeiro artigo, Einstein explica o efeito fotoelétrico como uma consequência da natureza quântica da luz, introduzindo o fóton (quantum de energia que se move sem se dividir, sendo produzido e absorvido como uma unidade). No terceiro e sexto trata o efeito browniano. O quarto, o famoso artigo *On the Electrodynamics of Moving Bodies* e o quinto dizem respeito à relatividade restrita. Neste último Einstein deduziu a célebre fórmula

$$E = mc^2.$$

A fórmula mais importante dos 100 anos que se comemoram.

A concepção que temos hoje de espaço-tempo foram estabelecidas, há um século, por Poincaré, Lorentz e Einstein,

ao descobrirem a estrutura do grupo das transformações geométricas que caracterizam as transformações de coordenadas das medidas das posições e dos instantes (designados hoje por grupo de Lorentz e grupo de Poincaré).

Einstein ao interpretar aqueles grupos de transformações quebrou a ideia de espaço e tempo absolutos paradigma estabelecido (séc. XVII) e aceite desde Newton. Cria, assim, a teoria da relatividade restrita. Contudo, nesta teoria mantém-se a ideia do contínuo espaço-temporal. Porém, o mesmo Einstein, ainda em 1905, como dito atrás, para interpretar os resultados experimentais da emissão de electrões por metais somente quando iluminados por radiação de determinada frequência, considera que a luz não pode ser apenas como uma onda, mas composta de quanta de energia independentes — a ideia de quanta de energia fora introduzida por Planck em 1900 no estudo do radiamento térmico do corpo negro. Assim, ao exigir a existência de trocas discretas

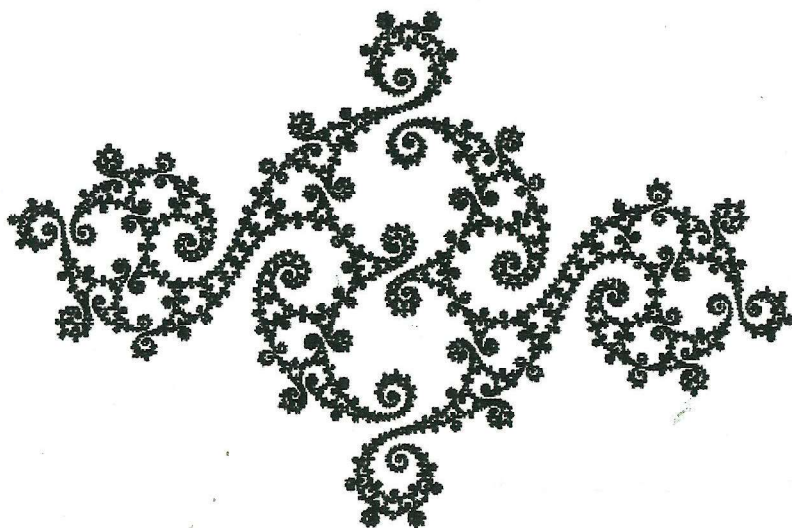


Figura 1. Conjunto limite de um grupo discreto de Lorentz

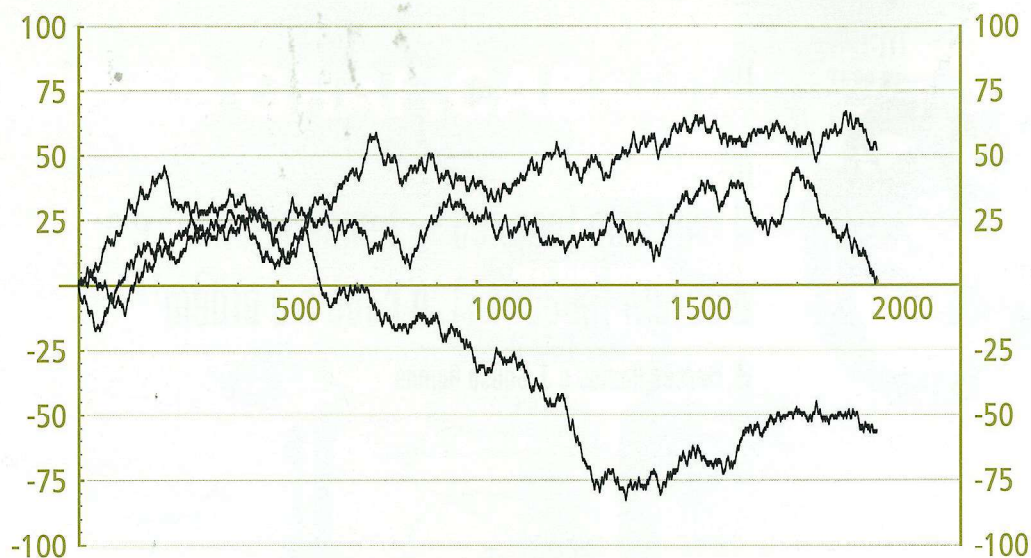


Figura 2. Três caminhos aleatórios, começando na mesma posição inicial

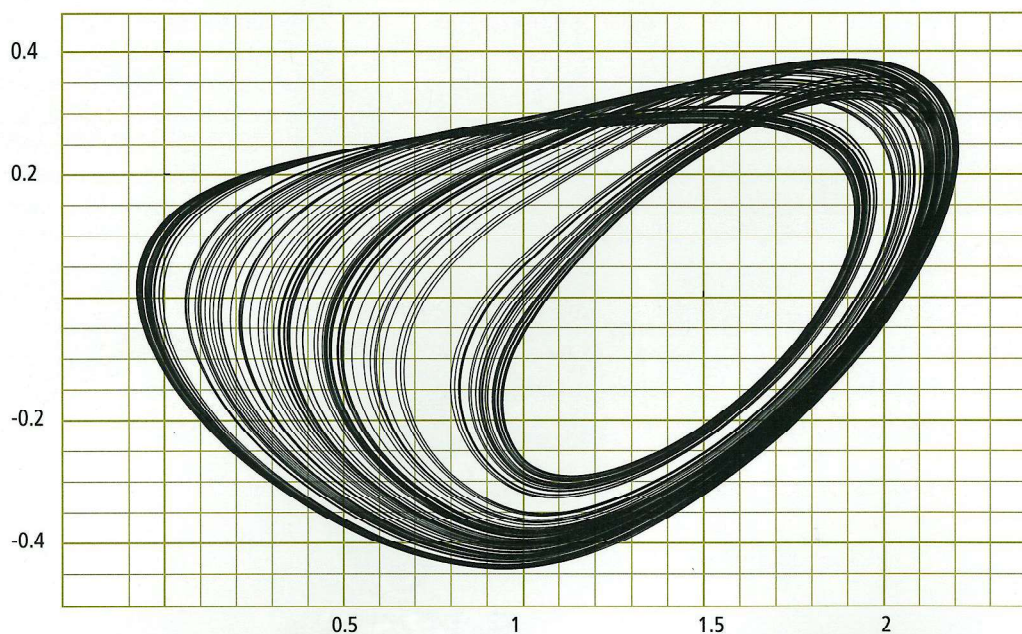


Figura 3. Atrator estranho de Chua

de energia — os quanta, os fótons, explica o fenómeno que se denominou efeito fotoelétrico.

A dialéctica entre o contínuo espaço-temporal e o discreto nas trocas de energia é estabelecida e os anos seguintes com Bohr 1913, De Broglie 1923, Heisenberg 1925, Schrödinger 1926, Dirac 1927, aprofundam esta dialéctica, entre o contínuo e o discreto, nas teorias quânticas, mas também entre o determinismo (teorias clássicas — Newton, Laplace, ...) e o (aparente) indeterminismo (teorias quânticas).

As geometrias aprofundam o contínuo, as álgebras o discreto. Por fim a geometria e a álgebra fundem-se, na ge-

ometria não-comutativa (Connes 1982). A geometria não-comutativa associa um espaço geométrico a toda a álgebra, comutativa ou não (no caso da álgebra comutativa, que pode ser interpretada como uma álgebra de funções sobre um espaço topológico, temos os espaços habituais). Mas o século não acaba assim na harmonia geometria-álgebra, do clássico e do quântico, numa interpretação não comutativa do universo.

O movimento Browniano, descoberto um século antes, é interpretado por Einstein combinando a teoria cinética dos gases e a hidrodinâmica clássica e deriva a equa-

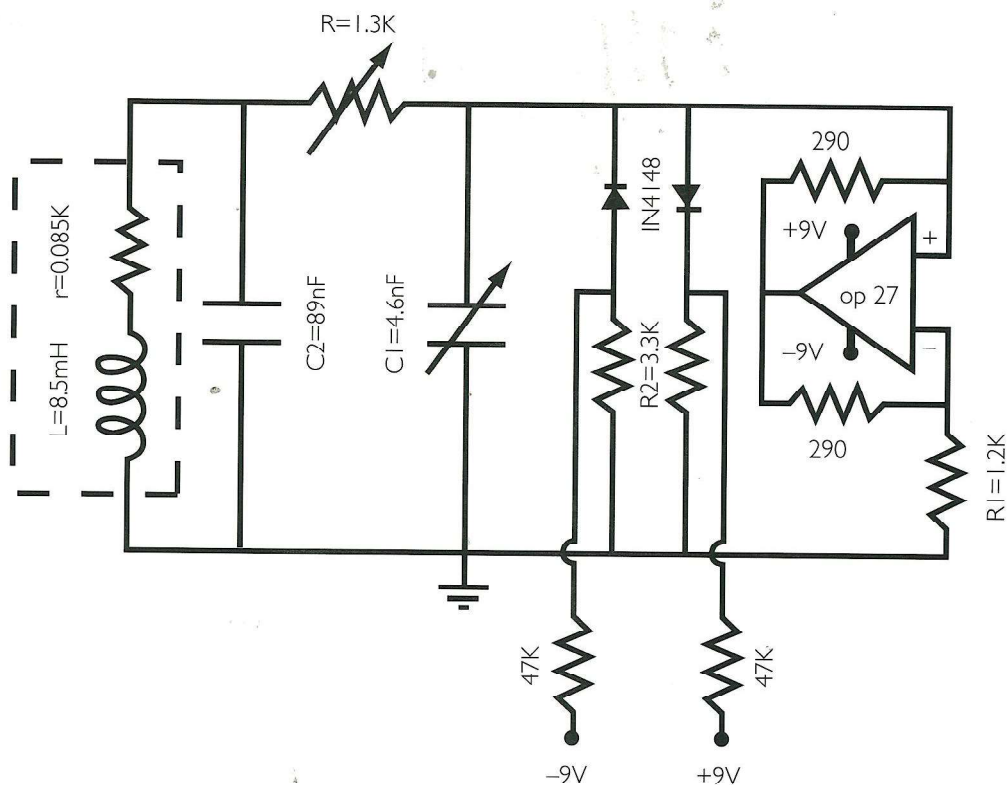


Figura 4. Sistema dinâmico não-linear circuito de Chua

ção para o deslocamento das partículas Brownianas. Assim, a interpretação do movimento browniano fornece o meio de reconciliação entre duas grandes contribuições da física, na altura, a termodinâmica (que estuda os processos irreversíveis) e a teoria cinética dos gases (isto é a mecânica de Newton na qual os fenómenos são reversíveis). Desta forma, abre-se uma nova perspectiva para a interpretação dos fenómenos físicos. As características aparentemente aleatórias do comportamento das partículas entusiasmaram Einstein. Aquele estudo, continuado nos resultados sobre caminhos aleatórios (random walks) atravessa a teoria moderna do caos (ver figura 2).

Já antes, Poincaré em 1890, numa área do conhecimento físico completamente diferente, apontara para esta nova perspectiva ao estabelecer as bases dinâmicas do estudo da complexidade. Ao estudar o problema de três corpos (Sol, Terra e Lua) encontrou pontos homoclínicos, e órbitas de extrema complexidade. Quando variava os parâmetros de, que o sistema dependia, sucediam-se mudanças no tipo de órbitas e identificou algumas dessas mudanças ou bifurcações (primeiro suporte para os desenvolvimentos da teoria do caos que ocorrem actualmente).

A dialéctica entre o determinismo e o indeterminismo atravessam todo o século passado e a vida científica de Einstein, sobretudo nas discussões sobre os fundamentos da mecânica quântica. A física estatística para a qual contribuiu com vários trabalhos (lembramos por exemplo a estatística de Bose-Einstein, que é usada na descrição do comporta-

mento colectivo de partículas como o fóton) não causou tanta discussão.

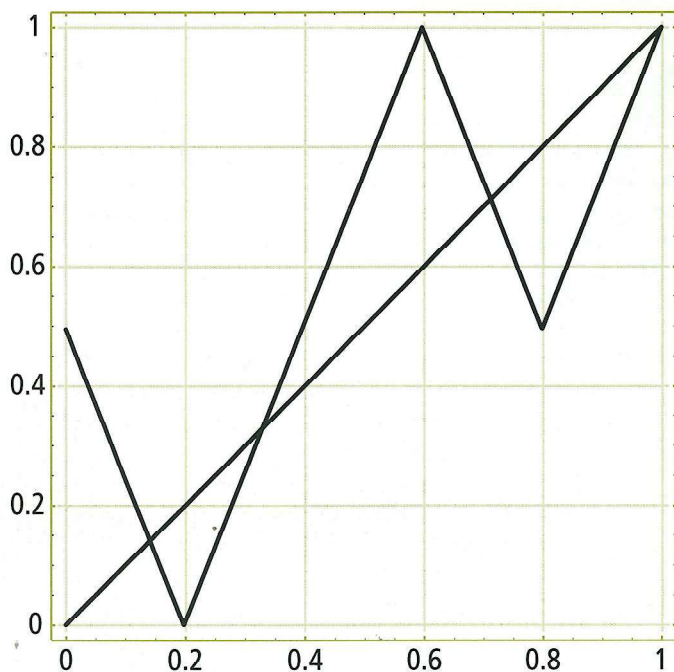
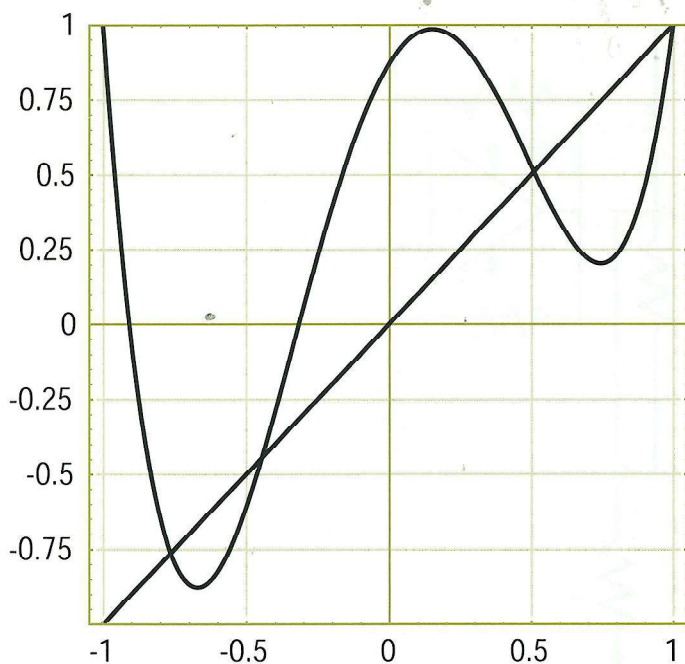
Os germes lançados por Poincaré com o estudo da dinâmica não linear acabaram por germinar. Emergem especialmente a partir dos anos 60 do séc. XX e estendem-se progressivamente à generalidade das ciências. Para esse desenvolvimento contribuíram também os trabalhos, que na continuidade da perspectiva de Laplace, procuravam uma compreensão determinista do universo. São de referir os inúmeros trabalhos realizados por Whitney, Birkoff, van der Pol, Andronov, Thom, Kolmogorov, Anosov, Arnold, Sharkovsky, Smale, Sinai, Lorenz, Takens, Ruelle, ... e que conduziram ao estudo de soluções tipo atractor estranho (ver figura 3).

Soluções não periódicas de sistemas dinâmicos, mas que escondem a existência de infinitas órbitas periódicas. Mas, a principal novidade surge com Sharkovsky em 1962, a ordem do caos. A existência de um certo tipo de órbita, numa dinâmica, força a existência de outras em número finito ou infinito, numa ordem universal, que se designa por ordem de Sharkovsky:

$$\begin{aligned}
 &1 \prec 2 \prec 2^2 \prec \dots \prec 2^k \prec \dots \prec 2^\infty \prec \dots \prec \\
 &7 \prec 2^k \prec 5 \prec 2^k \prec 3 \prec 2^k \prec \dots \prec 7 \prec 2^2 \prec \\
 &\prec 5 \prec 2^2 \prec 3 \prec 2^2 \prec \dots \prec 7 \prec 5 \prec 3.
 \end{aligned}$$

O desassossego (dialéctica) instala-se de novo como há um século entre o espaço-tempo absolutos (clássico) e o

Figura 5. Aplicações equivalentes — a sua iteração determina o mesmo tipo de caos



relativístico, o contínuo e o discreto (quântico), o comutativo (clássico) e o não comutativo (quântico), agora está presente na dialéctica entre a ordem e o caos. O absoluto e o relativo, o contínuo e o discreto, o clássico e o quântico, a geometria e a álgebra, já não estão em contradição, pois são integrados de modo coerente e não contraditório nos conceitos e técnicas da teoria do caos e da geometria fractal, recorrendo a técnicas e conceitos da matemática discreta. Tecnologicamente é a realização e o êxito do digital.

A dinâmica caótica é o comportamento, a realização temporal da complexidade; os fractais são a realização espacial. Num sistema dinâmico ou num conjunto fractal, é sempre possível passar de um comportamento caótico para um conjunto fractal e de um fractal para um comportamento caótico. Tal como o espaço-tempo o fractal-caos são dois aspectos de uma só realidade.

O estudo das dinâmicas não lineares de espaços contínuos e tempo discreto, introduzidos pela iteração de aplicações do intervalo (repetição da composição de uma função com ela própria), do círculo ou da recta real, é transferido para os sistemas discretos, cadeias de Markov topológicas, ou subshifts de tipo finito, recorrendo a técnicas da dinâmica simbólica, muito bem estabelecidas, que tiveram a sua origem aproximadamente há um século (Koebe, Hadamard 1886, Morse 1921, Hedlund 1935, Bowen 1972, ...).

Hoje as geometrias finitas, a combinatória, a teoria dos semigrupos são ferramentas essenciais no estudo da dinâmica não linear, na teoria do caos e na geometria fractal. As geometrias discretas e os sistemas algébricos interpenetram-se quebrando as barreiras entre as matemáticas tradicionais e as classificações rígidas. As contradições entre o comutativo e o não comutativo, entre o clássico e o quântico esvaem-se numa complementaridade natural e compreensível.

O que resta então de aparentemente contraditório é o facto do caos ser ordem. Da complexidade ser compreensível, classificável, mensurável. Sentimento este muito característico de Einstein. Aí de novo o Homem se encontra consigo próprio, tal como na origem da ciência grega. O complexo está no DNA, na dinâmica dos neurónios, nos sistemas económicos e sociais, no clima, na rede internet. Mas a questão sem resposta permanece: Por onde irá passar a evolução? Pela rede é hoje uma possibilidade.

Mas onde está o Einstein do nosso século, capaz de como ele perceber o fundamental? Em três conjuntos de trabalhos realizados em 1905, há 100 anos, conseguiu marcar as três linhas principais da física e da matemática do século XX: a relatividade, a mecânica quântica e a teoria do caos. Acreditemos que essa nova personagem pode ser um dos nossos alunos que estão saindo das nossas escolas.

M. Mercês Ramos
ESELx, Politécnico de Lisboa

J. Sousa Ramos
Dep de Matemática, Instituto Superior Técnico