

Depois do encontro CabriWorld 2004, a que me referi no número passado, entrei em contacto com o professor John Mason propondo-lhe a escrita de um artigo para esta secção. A minha ideia inicial foi propor um artigo sobre o assunto abordado na plenária em Roma, porque me pareceu que seria mais viável o meu pedido ser aceite, por questões de disponibilidade e de tempo do professor.

Muito amavelmente John Mason não só acedeu imediatamente ao meu pedido, como escreveu um artigo especialmente para esta secção sobre um assunto completamente diferente e cujo tema está relacionado com o seu trabalho actual.

Usando ecrãs mentais e electrónicos

John Mason

Introdução

Estou muito interessado na interacção entre ecrãs mentais por um lado e electrónicos ou e-ecrãs por outro. À primeira vista os e-ecrãs parecem ser tão poderosos. Podem ser usados para representar imagens que são muito complexas para serem construídas ou fixadas pela nossa mente, ou até para serem representadas em papel. Os e-ecrãs também permitem movimento dinâmico com toda a generalidade que lhe está implícita. Além disso podem ser usados para fazer cálculos complicados e transformações e para justapor e manipular imagens e símbolos. Como já referi há algum tempo atrás (Mason 1985), os e-ecrãs são efémeros: quando se desliga a máquina, há um pequeno momento antes de obtermos as imagens mentais e durante este tempo é muito fácil perder-se a ideia do que se estava a passar no e-ecrã. Isto mostra a necessidade de desenvolver métodos de trabalho que levem os alunos a fazer uma boa utilização dos e-ecrãs desenvolvendo o controlo dos seus ecrãs mentais.

Como professor e profissional de Matemática reconheço a importância de ser capaz de trabalhar com o que está no meu pensamento, portanto tenho todo o interesse em que os alunos também desenvolvam esses poderes mentais.

Uma das coisas mais importantes a saber fazer com um e-ecrã é desligá-lo!!! Antes de o desligar, é conveniente fazer uma pausa e descrever o que vê e o significado para si e para os outros, porque uma vez desligado, geralmente é muito tarde: outras coisas começam a atrair a sua atenção.

Vou usar um problema interessante que me foi apresentado por John Mack (em comunicação privada) para ilustrar o que quero dizer. Embora o problema em si seja interessante, o que interessa não é o problema nem a sua resolução, mas sim aquilo que observa na sua atitude e o modo como usa as suas capacidades. Isto porque as suas escolhas quando trabalhar com os alunos no futuro irão ser influenciadas pelas observações a que foi sensível. (Mason 2002)

Problema

É muito mais eficaz se alguém der as instruções seguintes em voz alta para um grupo do que simplesmente cada um ler para si. Seja como for, perca algum tempo!

Imagine uma circunferência (por favor fique no plano ... eu não sou responsável pelo que possa acontecer se tentar ir para o espaço!).

Movimente a circunferência no plano e modifique-a de todas as formas possíveis, desde que permaneça uma circunferência: pode mudar de posição através duma translação; pode modificar o raio; a rotação não acrescenta nada; não pode, por exemplo, modificar a espessura pois um circunferência não tem espessura.

A sua circunferência tem uma grande liberdade de movimento, portanto vamos fazer uma restrição.

Concentre-se na circunferência por um momento!

Imagine também um ponto fixo no plano. Agora pense na distância entre o ponto e a circunferência. (NÃO a distância entre o ponto e o centro da circunferência!)

Modifique a circunferência (raio e posição), pense na distância considerada e no modo como ela varia.

Se está familiarizado com o Cabri ou qualquer outro software de geometria dinâmica, então já pensou em fazer a simulação num e-ecrã. Peço-lhe que resista mais um pouco. Peço-lhe mesmo que resista à tentação de desenhar num papel, pelo menos neste momento!

Uma vez que a liberdade ainda é muita e é difícil medir o grau de liberdade para uma circunferência que pode variar o raio e a posição, vamos considerar o centro, e observar as diferentes posições que pode ocupar sob certas restrições. Isto dá-nos uma ideia da liberdade de que dispomos para a circunferência.

Problema um

Concentre-se na circunferência e no ponto fixo. Onde pode estar o centro para que se mantenha a distância inicial do ponto à circunferência?

À partida pode parecer difícil. Pode tentar um caso especial, tal como o da distância ser zero (nesse caso que relação tem o ponto com a circunferência?) Ver casos particulares é uma capacidade fundamental que os seres humanos possuem para poderem fazer generalizações e é um instrumento matemático poderoso (Polya 1962, Mason *et al* 1982, Mason 1992). Mas a finalidade de particularizar é ganhar confiança e perspicácia para voltar a generalizar. Então, tendo observado o que acontece quando a distância entre o ponto fixo c e a circunferência é zero, tente outros valores. Lembre-se que o que quer saber é onde se pode posicionar o centro para que a distância se mantenha constante.

Há duas coisas importantes a observar aqui. A primeira é: a noção de invariância é um tema importante na matemática. Muitos teoremas e muitas técnicas são pensados com base no que permanece invariante em condições de mudança. A invariância não faz sentido sem mudança e a mudança é impossível sem alguma relativa invariância para que possa ser observada. Por exemplo, deslocamo-nos no espaço a uma grande velocidade, mas não nos apercebemos disso porque tudo à nossa volta vai à mesma velocidade. Só notamos pequenas variações locais em velocidades relativas.

A segunda coisa a observar é: quando alguém se *encrava* num problema (e se não fica *encravado* então não é um verdadeiro problema), muitas vezes é útil parar e perguntar “O que é que eu sei?” e “O que quero descobrir ou mostrar?” (Mason *et al* 1982). Muitas vezes escrever uma resposta abre uma possível linha de acção. Responder à primeira questão raramente demora mais do que uns breves segundos!!

Algumas vezes as pessoas avançam para o que pensam ser uma resposta mas que na realidade é apenas uma conjectura, mas então não têm em atenção o aviso de Polya *não creias na tua conjectura!* O que é que lhe escapou? Para o problema em questão, as pessoas estão tão habituadas a ver a circunferência como o lugar geométrico de pontos colocados a uma distância fixa de outro ponto que se convencem que a resposta é uma circunferência. Outros observam que a circunferência pode ter um raio tão grande quando se queira desde que se mantenha a uma distância fixa do ponto, então conjecturam um anel. Mas outros são mais cautelosos e continuam a mover a circunferência e descobrem que há mais alguma coisa!

Parece que a circunferência ainda tem muita liberdade. Considerou um circunferência de raio zero ou infinito? Embora sejam casos especiais é matematicamente interessante incluí-los quando se fazem conjecturas e teoremas. São também casos particulares muito úteis para testar conjecturas.

Problema dois

Considere outro ponto fixo distinto do primeiro.

Onde colocar o centro do circunferência para que a distância aos dois pontos seja a mesma?

Como o problema anterior envolveu uma distância fixa, as pessoas por vezes tendem a não dar atenção a este segundo problema. Mas tudo o que se requer (o que é que quer?) é que a circunferência esteja à mesma distância dos dois pontos, sem qualquer restrição quanto à distância.

Lembre-se do aviso feito no problema anterior: não acredite na sua primeira conjectura!

Este problema permite ganhar mais experiência na movimentação da circunferência e na observação das distâncias, na particularização e generalização e no aprender a concentrar-se e a fixar-se numa imagem mental. Nesta altura já deve ter recorrido ao desenho de diagramas, mas quanto mais tempo trabalhar apenas mentalmente mais desenvolve o seu poder de visualização mental e mais controlo terá no futuro.

É capaz de ficar um pouco surpreendido ao constatar que o grau de liberdade da circunferência é muito maior do que pensou inicialmente: muitas pessoas fazem conjecturas que têm a ver com mediatrizes, mas os pensadores matemáticos não acreditam nas suas conjecturas iniciais e procuram desafios e/ou justificações.

Problema três

Considere um terceiro ponto distinto dos anteriores.

O problema em si, agora será evidente.

Deve querer usar o que aprendeu com o problema dois, nomeadamente que as mediatrizes podem vir a ser objectos úteis para o resolver.

Problema quatro

Agora vem uma experiência importante. Provavelmente sabe qual vai ser o quarto problema! Se não, volte aos três primeiros e veja o que fica invariante e o que se modificou. Até onde podemos continuar?

Uma vez fixada a circunferência com um número finito de possibilidades, é altura de olhar e ver o que poderá variar. Por exemplo, que propriedades terão que ter os quatro pontos para haver mais do que quatro lugares para os centros das circunferências que estão à mesma distância dos quatro pontos?

É sempre importante parar e interrogar-se sobre o que pode ser mudado enquanto outra característica é conservada. Por exemplo, sempre que uma pessoa *termina* uma tarefa pode interrogar-se sobre *que outras questões deste tipo conduzem exactamente à mesma resposta?* e *quais são as possíveis respostas para questões deste tipo?* É claro que isto pede a pergunta *Como será uma questão deste tipo?* Ivar os alunos a pensar acerca do *tipo* de problema é um passo no sentido de observar a generalidade exemplificada pela particularidade. Levar os alunos a ver o geral através do particular e ver o particular dentro do geral é um grande avanço para o seu pensamento matemático. A aprendizagem de novos tópicos pode ser feita de um modo muito mais eficaz quando os alunos espontaneamente particularizam e generalizam, conjecturam e convencem (a outros e a eles próprios).

Levar os alunos a construir os seus próprios exemplos de objectos, especialmente (mas não exclusivamente)

questões, tende a enriquecer o seu espaço de exemplos que podem usar no futuro, aprofundando o seu conhecimento de conceitos e técnicas (Watson e Mason 2002, and in press)

E-ecrãs

Acredita num artigo sobre pontos e circunferências sem nenhuma figura? Pense por um momento que efeito teria se eu tivesse apresentado figuras com estes problemas: o seu olhar seria atraído para as figuras mesmo antes de dar por isso, o que teria influenciado as suas imagens pessoais e consequentemente acabado com a oportunidade de desenvolver o controle sobre o que se pretende atingir.

Se resistiu até agora a usar um e-ecrã, então deve querer fazê-lo agora. Pode facilmente construir uma macro que tenha como objectos iniciais um ponto e uma circunferência e cujo resultado seja um segmento definido pelo ponto e pelo ponto da circunferência que se encontra mais próximo, usando uma recta que passe pelo centro da circunferência. Mas repare no raciocínio matemático envolvido. Pensar no modo de representar a distância de um ponto a uma circunferência envolve o tipo de trabalho que teve que fazer mentalmente para responder ao primeiro problema. Há muito que aprender acerca do papel das ferramentas, quanto à sua adequação ao objectivo em causa e ainda se ajudam ou bloqueiam o desenvolvimento das aptidões naturais dos alunos. Claro que a sua construção pode não lhe dar sempre a mais curta distância mas ajuda a ver o que está a acontecer.

Nos problemas pergunta-se onde podem estar os centros das circunferências. A experiência de pensar mentalmente mostrou que há muitas circunferências (pelo menos para começar), portanto pode ajudar se começar pelo centro, depois ajustar o raio até que pareça que as distâncias em causa sejam as mesmas. Isto é quase uma consequência natural do modo como o software de geometria dinâmica trabalha: oferece circunferências a partir de centros e de raios.

Se se usa um ponto, o centro duma circunferência e a própria circunferência e se a movimentamos, pode ver-se como a distância entre o ponto e a circunferência muda. É perfeitamente natural tentar fazer a circunferência com um raio muito grande e tentar descobrir o que acontece se o ponto estiver no seu interior: Como purista resisto a usar o teorema do valor intermédio: muitos alunos usá-lo-ão como um *teorema em acção* como Gérard Vergnaud (1981) o descreveu, pois sabem intuitivamente que se numa dada posição um comprimento é maior que outro e noutra posição é ao contrário, deve haver uma posição intermédia onde são iguais. O que é importante é não *ensinar* aos alunos os factos antecipadamente mas sim, que a partir da experiência a sua intuição se revele.

Se usar dois ou três pontos, rapidamente se apercebe onde o centro da circunferência deve estar; para conservar a igualdade das distâncias entre a circunferência e os dois pontos fixos. Para três ou mais pontos é natural construir as mediatrizes e aperceber-se do papel que elas têm, mas agora de uma maneira de algum modo nova, através do uso do teorema do valor intermédio.

Quando move a circunferência, pode ter a tentação, como eu tive, de mostrar a mais alguém. As imagens no ecrã revelam muito acerca da liberdade da circunferência e das possíveis posições do seu centro. Mas ver outra pessoa movimentar os objectos não é a mesma coisa que ser você a fazê-lo. Usando um ficheiro que outro construiu não é tão motivador como fazer a sua própria construção. Embora muitas vezes possa ser útil ver como outra pessoa movimenta os objectos e explora relações, especialmente se vão trocando opiniões acerca do que está a ser feito (mais fácil quando se tem esse hábito do que num caso esporádico!)

Como matemáticos o nosso desejo de explicar contribuiu para um desejo de controlar o que os outros estão a descobrir: Mary Boule chamou *teacher lust* (Tahat 1972) a este desejo de explicar: O que interessa NÃO é que os alunos *cheguem a uma resposta*, mas que desenvolvam as suas próprias aptidões matemáticas e a sua identidade psico-social através do que ganham em auto-estima, auto-confiança e no maior controlo sobre a sua atenção.

Gavriel Salomon (1979) focou a importância das imagens na aprendizagem da Matemática, querendo ele dizer com isso, imagens que foram absorvidas de diagramas e e-ecrãs, que podem enriquecer no futuro as imagens mentais. Mas não basta simplesmente estar exposto a imagens para ter acesso a elas apropriadamente no futuro. É geralmente necessário ter feito algum trabalho com elas. Por exemplo pode ser muito útil deixar no ecrã uma imagem estática enquanto mentalmente se imagina o movimento. Então pode testar as suas conjecturas e ver o que realmente se passa. Os alunos que prevêem o que vai acontecer e fazem conjecturas são muito mais capazes de no futuro fazerem e testarem conjecturas do que aqueles que ficam simplesmente à espera que lhes digam o que procurar e o que aconteceu, ou era suposto acontecer.

Reflexão

Antes que se apresse a contar a outros o que descobriu, pode melhorar mais efectivamente a sua prática futura se parar por um momento e rever os altos e baixos que teve ao trabalhar os problemas. O que notou quando ficou *encravado*, quando continuou, quando fez conjecturas sem acreditar muito nelas, e quando usou os seus diversos conhecimentos? Que analogias pode haver com a atitude dos alunos nas suas aulas? Como pode oferecer tarefas e interagir com os alunos para levá-los a usar e desenvolver as suas aptidões mentais de sentido matemático?

Bibliografia

- Mason, J. & Burton L. & Stacey K. (1982). *Thinking Mathematically*, London: Addison Wesley.
- Mason, J. 1985, What Do You Do When You Turn Off The Machine?, preparatory paper for ICMI conference March, *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching*. Inst. de Reserche Sur L'Enseignement des Mathématiques, Strasbourg, pp. 251–256.

- Mason, J. (1998, 2nd edition). *Learning & Doing Mathematics*. York: QED.
- Mason, J. (2002). *Researching Your Own Practice: the discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.
- Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving* (combined edition). Wiley, New York.
- Salomon, G., (1979). *Interaction of Media, Cognition and Learning*, London: Jossey-Bass.
- Tahta, D. (1972). *A Boolean Anthology: selected writings of Mary Boole on mathematics education*. Derby: Association of Teachers of Mathematics.
- Vergnaud, G. (1981). Quelques Orientations Théoriques et Méthodologiques des Recherches Françaises en Didactique des Mathématiques. *Actes du Vième Colloque de PME*. vol 2 pp. 7–17, Grenoble: Edition IMAG.
- Watson A. & Mason, J. (2002). Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 2 (2) 237–249.
- Watson, A. & Mason, J. (in press). *Mathematics as a Constructive Activity: the role of learner-generated examples*. Mahwah USA: Erlbaum.

Nota biográfica

John Mason é professor de educação matemática na Open University. Ensinou matemática durante 45 anos, desenvolvendo métodos de trabalho para apoiar pessoas cuja área de trabalho é o pensamento matemático dos alunos.

Os seus interesses centram-se no papel que as imagens mentais têm no ensino e na aprendizagem da matemática; no uso de ferramentas electrónicas, e não só, no ensino e na aprendizagem; no papel que têm a especialização e a generalização em particular; o desenho e o uso de tarefas pedagogicamente relevantes; o papel dos exemplos nas aulas de matemática e o papel desempenhado pela estrutura da atenção. Relacionou os dois aspectos do que chamou *Discipline of Noticing*: como uma contribuição para a pesquisa educacional e como um método para os professores pesquisarem sobre a sua própria prática.

John Mason
Open University, UK

Estatuto Editorial da Educação e Matemática

A *Educação e Matemática* (EM) é uma publicação da Associação de Professores de Matemática (APM). É uma publicação periódica, sai cinco vezes por ano e um dos seus números anuais é temático. A revista aborda questões relacionadas com o ensino e aprendizagem da Matemática. Dirige-se aos professores de Matemática, de todos os níveis de ensino, em especial aos sócios da APM, constituindo um meio de comunicação privilegiado da Associação, em Portugal e no estrangeiro.

Os principais objectivos da *Educação e Matemática* são:

- Promover a troca de ideias e experiências entre professores;
- Estimular a reflexão sobre problemas e desafios da educação matemática;
- Discutir temas actuais e importantes da educação matemática e da educação em geral;
- Fornecer elementos de trabalho para as práticas dos professores;
- Divulgar informação relevante para os professores.

A *Educação e Matemática* publica textos de natureza diversa. Vive muito da contribuição dos sócios, que são autores da maior parte dos artigos. Estas contribuições passam por ideias, pontos de vista, comentários, relatos de experiências, artigos de opinião, resenhas de livros, resolução de problemas, notícias ... A EM tem um conjunto de secções de natureza diversificada, algumas das quais com carácter permanente.

A revista tem uma equipa redactorial a quem compete desenvolver todo o trabalho de recepção e revisão de artigos, bem como organizar a própria revista.

À semelhança das outras revistas informativas, a *Educação e Matemática* assegura o respeito pelos princípios deontológicos e pela ética profissional dos jornalistas, assim como pela boa fé dos leitores.

A Directora da Educação e Matemática