

Aplicações na Internet para a Matemática

Um recurso por explorar na sala de aula

Nisa Figueiredo e Sónia Palha

Applets do Instituto Freudenthal

Nas páginas do Instituto Freudenthal, o instituto holandês onde nasceu a corrente Matemática denominada por Matemática Realista, encontra-se uma enorme colecção de *applets* com grandes potencialidades para o ensino da Matemática. Tratam-se de pequenos programas disponíveis na Internet, de fácil compreensão e utilização, desenvolvidos nos projectos Rekennet em Wisweb deste instituto.

Neste momento existem cerca de 60 *applets* para o pré-escolar, 1º e 2º ciclos e perto de 80 para o 2º, 3º ciclos e secundário. Grande parte destes *applets* estão traduzidos em Inglês havendo também alguns em Português.

A Rã na sala de aula do 1º e 2º ciclos

A Rekenweb é a versão holandesa do website do Instituto Freudenthal com *applets* para a Matemática do pré-escolar ao 2º ciclo (www.rekenweb.nl). A versão inglesa deste website chama-se Kidskount (www.kidskount.nl). Apesar de muitos destes *applets* serem de fácil compreensão e fazerem pouco uso da língua, pensou-se que este recurso se tornaria mais acessível se houvessem pelo menos alguns destes programas em português. Um dos seis *applets* da versão portuguesa da página é a Rã.

O programa mostra uma rã (figura 1) que interage com o aluno. O objectivo é trabalhar a relação entre produ-

tos, utilizando propriedades dos números e da multiplicação. Sabendo que 5×45 é metade de 10×45 , basta calcular a metade de 450 para obter o resultado de $5 \times 45 (=225)$. Da mesma forma, é fácil calcular 9×45 a partir de 10×45 , uma vez que 9×45 é *uma vez menos* que 10×45 , basta calcular $450 - 45 = 405$. Por outro lado, sabendo $2 \times 45 = 90$ sabe-se também o resultado de 4×45 , pois $4 \times 45 = 2 \times (2 \times 45)$. É assim possível calcular, utilizando informalmente as propriedades da multiplicação, o resultado de produtos desconhecidos e mais difíceis a partir de produtos conhecidos ou de fácil cálculo. É exactamente este tipo de estratégias de cálculo que são desenvolvidas, aprofundadas ou praticadas (dependendo do nível do aluno).

O funcionamento da Rã é muito simples. A rã começa por pedir ao aluno a indicação de um produto que ele conheça e o respectivo resultado. Por exemplo, $4 \times 5 = 20$. Tendo em conta o produto introduzido pelo aluno, a rã pede um novo produto cujo resultado é possível de determinar utilizando aquele que se introduziu. Por exemplo, para o produto 4×5 , a rã gera um dos seguintes produtos:

- $5 \times 4 =$ (comutação dos factores)
- $3 \times 5 =$ (1 vez menos que 4 vezes)
- $5 \times 5 =$ (1 vez mais que 4 vezes)
- $2 \times 5 =$ (a metade de 4×5)
- $8 \times 5 =$ (o dobro de 4×5)
- $40 \times 5 =$ (10 vezes 4 vezes)
- $4 \times 50 =$ (10 vezes 5 vezes)
- $2 \times 10 =$ (a metade de 4 vezes o dobro de 5)

Uma vez que o produto pedido se relaciona com aquele que o aluno introduz, este *applet* permite que cada aluno trabalhe no seu nível. Um aluno pode introduzir um produto do tipo 4×5 , dentro da tabuada usual, mas pode também decidir introduzir um produto do tipo $40 \times 500 = 20\ 000$ ou $12 \times 12 = 144$. Desta forma, partindo do nível a que o aluno se encontra, o *applet* estimula a procura de novas relações entre produtos, alarga a rede de relações conhecidas pela criança e ajuda a desenvolver a flexibilidade de cálculo, contribuindo assim para o desenvolvimento do sentido do número e das operações.

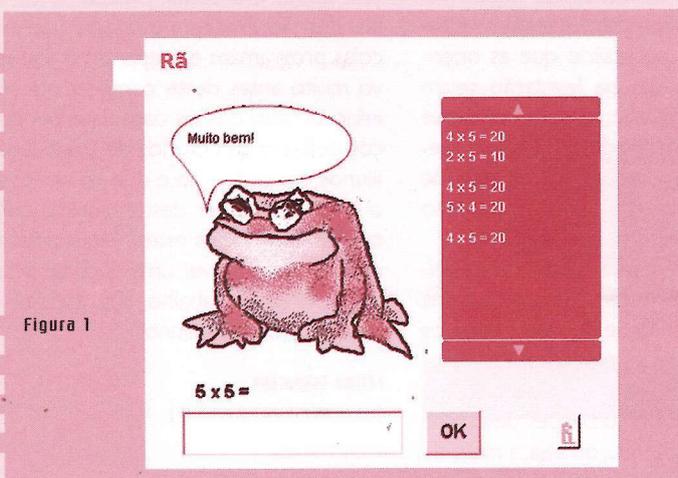


Figura 1

Para poder utilizar este recurso na sala de aula é necessário dispor de pelo menos um computador com acesso à Internet, ligar-se à página www.rekenweb.nl/pt e escolher o programa Rã. Não é necessário que todos os alunos estejam ao mesmo tempo a trabalhar com o programa. Os alunos podem trabalhar à vez, durante vários dias, até que todos tenham tido a sua oportunidade. O professor reparará que também não é necessário dar grandes explicações aos alunos, pois estes rapidamente percebem como funciona o *applet*. Os alunos podem trabalhar, por exemplo, em grupos de dois. Desta forma estimulam-se os alunos a procurarem produtos interessantes e a apoiarem-se um ao outro para encontrar o resultado do produto pedido pela rã.

O programa não possui um sistema de registo, por razões técnicas. O computador coloca os produtos aos pares numa lista, mas não a guarda. É, portanto, útil pedir que cada aluno, depois de uns 20 minutos, registre o par de produtos (o produto que introduziu e aquele que a rã perguntou) que tenha gostado mais, ou que tenha achado mais difícil. Estes registos podem ser afixados na sala de aula para que outras crianças vejam antes de serem utilizados numa aula posterior com toda a turma.

Depois de todos os alunos terem tido oportunidade de trabalhar com o programa, é importante discutir na aula as várias descobertas e estratégias dos alunos. Uma vez que o trabalho com o *applet* pode não ter sido igual para todos os alunos, a aula pode constituir um importante momento de reflexão e partilha de descobertas, contribuindo para um alargamento e aprofundamento dos conhecimentos e competências dos alunos.

Uma variante desta actividade que as crianças costumam gostar é a de escolher um aluno para fazer de rã. Os restantes alunos indicam um produto que conheçam e a rã inventa um novo produto a partir deste. Os alunos que indicaram o produto, resolvem o cálculo dado pela rã.

Applets em Português, do pré-escolar ao 2º ciclo

Para além da Rã estão disponíveis, em português, os programas descritos na figura 2 abaixo.

Imagens Rápidas

Esta aplicação pertence ao domínio dos números e operações, nomeadamente ao cálculo de adições com números até 20. A aplicação pretende estimular o aluno a fazer uso da estrutura dos números evitando a contagem 1 a 1, contribuindo para o desenvolvimento do cálculo mental e é aconselhada a partir do pré-escolar até ao 2º ano de escolaridade.

Estrela Interactiva

Esta é uma aplicação aconselhada a partir do 3º ou 4º ano de escolaridade, do domínio dos *Números e Operações* e da *Geometria*, uma vez que trabalha com figuras geométricas relacionando-as com os divisores de 60. O aluno é levado a explorar os divisores do $n^\circ 60$ baseando-se no modelo do relógio.

Espelho

Esta é uma aplicação do domínio da geometria, nomeadamente para o trabalho da simetria axial e é aconselhada a partir do 1º ano de escolaridade.

Livro Mágico

Esta é uma aplicação aconselhada a partir do 3º ano de escolaridade e trata-se de uma variante do conhecido *Jogo do 24*.

Abre o Cofre

Esta é uma aplicação aconselhada a partir do 4º ano de escolaridade e que trabalha os divisores de diferentes números no contexto da descoberta do código que abre um determinado cofre.

Declive de uma recta — Shooting Balls — na aula do 3º ciclo e secundário

Wisweb é o sítio do website do Instituto Freudenthal onde é possível encontrar *applets* para o terceiro ciclo e ensino secundário. Neste momento existe uma versão portuguesa da página contendo 10 *applets* e uma versão inglesa onde estão disponíveis cerca de 70 *applets*.

Um *applet* bastante popular é o jogo *shooting ball* (figura 3). Num referencial cartesiano estão dispostas de forma aleatória bolas de várias cores e uma flecha. O jogador pode mover a extremidade inicial desta flecha apenas ao longo do eixo vertical. O objectivo é acertar nas bolas com um tiro de flecha. Quanto mais bolas se acerta mais pontos se ganha. A trajectória da flecha perfaz uma linha recta cujo declive e valor inicial (origem da trajectória) tem de ser definido pelo jogador.

Este *applet* pode, pois, ser utilizado na aula de matemática, como base para o estudo das funções lineares ou da equação da recta e ser usado para explorar características de gráficos lineares, relações entre fórmula e gráfico, declive positivo e negativo de uma recta, etc.



Figura 2

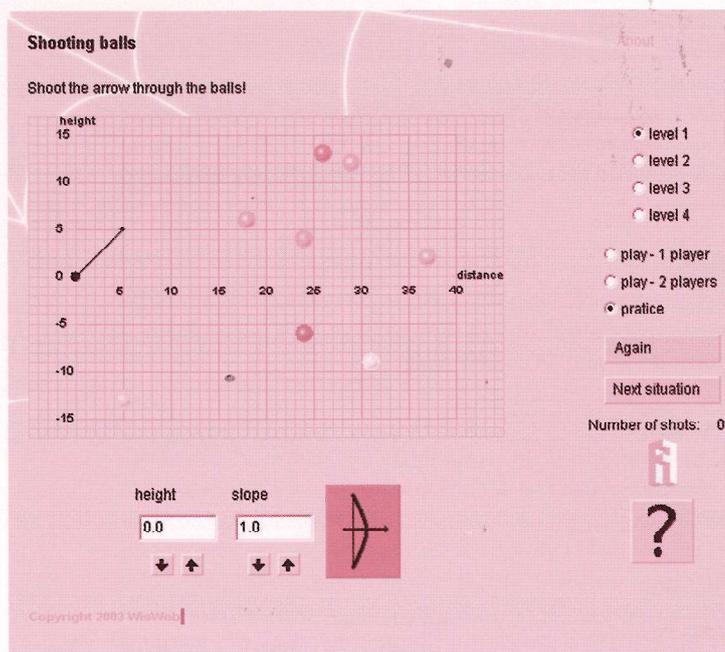


Figura 3

Podem participar no jogo um ou dois jogadores que devem escolher um dos 4 níveis de dificuldade:

- nível 1, o aluno vê a flecha e pode posicioná-la com o rato. Nos outros níveis isto não é possível.
- Desde o nível dois ao nível quatro o aluno tem de inserir os valores para a origem e declive da trajectória da flecha. A diferença entre estes três níveis está na presença da flecha.
 - no nível 2, vê-se a flecha. O aluno insere valores para a origem e declive da trajectória e a flecha movimenta-se de acordo com os valores inseridos.
 - no nível 3, vê-se apenas a extremidade inicial da flecha, ou seja, neste nível o aluno vê um ponto que assinala a origem da trajectória mas tem de imaginar o declive da trajectória.
 - no nível 4, este ponto desaparece. O aluno insere os valores para a origem e declive e, sem ver a posição da flecha, tem de disparar o tiro! Este é o nível onde se ganha mais pontos. Deste modo, motiva-se o aluno a jogar no nível mais difícil!

A utilização deste *applet* na sala de aula foi observada (Reeuwijk, 2001) numa turma do oitavo ano do St. Michael College (uma escola do 3º ciclo e secundário holandesa), no estudo das funções lineares, nomeadamente na exploração do conceito de declive e ordenada na origem de uma recta. Por forma a estruturar mais o trabalho dos alunos, o professor apresentou a seguinte actividade à turma:

- Explora as possibilidades do *applet* e verifica como funciona. (cerca de 15 minutos)

- Em grupos de dois, procura atingir o número máximo de pontos possível, utilizando apenas 12 tiros.

- Se depois ainda tiveres tempo, joga com o teu colega. Depois do trabalho dos alunos em pares, seguiu-se uma discussão com a turma onde foram expostas e comparadas as estratégias utilizadas. Por exemplo:

- Os alunos escolhem a ordenada na origem um pouco a olho e a partir desse valor *anda-se na direcção do alvo em passos de comprimento igual para a direita e de passos de comprimento igual entre si para cima*. O declive da trajectória é igual ao *número de quadradinhos que é preciso andar para cima a dividir pelo número de quadradinhos que se anda para o lado*. Alguns alunos contam os quadradinhos pequeninos, outros utilizam os quadrados grandes como unidades. Importante é que os alunos percebam que quando se tem uma recta tanto faz, por exemplo, andar uma só vez três passos para o lado e seis para cima como uma vez para o lado e dois para cima.

- os alunos escolhem duas bolas que querem atingir e lêem as coordenadas dos pontos onde as bolas se encontram. De seguida, calculam o declive da recta que passa pelos dois pontos. Agora só falta encontrar a origem! Os alunos contam o número de *passos* necessários para perfazer a distância entre uma das bolas e o eixo vertical (figura 4).

As potencialidades destes applets

Este tipo de recursos permite trabalhar os conceitos matemáticos de uma forma diferente, estimulante para os alunos, possibilitando a diferenciação na sala de aula.

De facto, o carácter interactivo destes *applets*, aliado a um contexto de resolução de problemas, onde não é o professor mas o computador, ou o próprio aluno com ajuda do computador, a validar as respostas, cria um ambiente onde o aluno se sente à vontade para arriscar, experimentar e explorar, sendo convidado a analisar as suas tentativas.

Alguns *applets* têm ainda um factor de estímulo extra, pois com a utilização da pontuação para premiar o trabalho dos alunos, estes têm a tendência para escolher um nível de dificuldade superior para assim ganharem mais pontos. De facto, na aula onde se usou o *shooting balls* os alunos afirmaram que “mais vale arriscar a um nível superior do que ter a certeza e jogar a um nível mais baixo”.

Desta forma, é possível que todos os alunos estejam a trabalhar com o mesmo conceito embora cada aluno a seu nível. Partindo daquilo que sabem e são capazes, os alunos são estimulados a desenvolver novas relações e entendimentos dos conceitos.

As actividades baseadas neste tipo de recursos evidenciam, o papel importante do professor no processo de aprendizagem. Dado o carácter experimental destas actividades e a diferenciação que elas permitem, e tendo em conta o facto do professor perder desta forma um pouco a visão

global do trabalho que os alunos desenvolveram, é extremamente importante que uma aula envolvendo os *applets* seja finalizada com um momento de reflexão e discussão com toda a turma. Este é um momento em que cada aluno tem oportunidade de reflectir, não só sobre aquilo que fez e descobriu, mas também sobre o trabalho feito pelos colegas. Desta forma é estimulado o estabelecimento de relações entre as diferentes descobertas o que leva à consolidação e generalização dos conceitos. Para o professor é também um momento importante para perceber o trabalho que cada um fez, bem como o nível de conhecimento que a turma adquiriu sobre aquele assunto.

Finalmente, o entusiasmo com que os alunos trabalham estes recursos, posteriormente, faz com que seja suficiente a referência a este trabalho para que se lembrem do que se trata, constituindo o trabalho com o *applet* uma base de referência para aulas seguintes.

A facilidade de compreensão destes *applets* que apelam fundamentalmente ao conhecimento informal dos alunos torna possível tratar os conceitos de uma forma natural e intuitiva, constituindo, desta forma, uma base sólida para um trabalho, posterior, mais formal. Na verdade, como vimos, utilizando o *applet shooting balls*, o aluno consegue trabalhar com o programa sem ter aprendido a definição de declive, desenvolvendo assim primeiro um conhecimento informal sobre este conceito. Mais tarde, quando a noção de *declive* for formalmente introduzida, o aluno possui em princípio uma série de conhecimentos que lhe permite compreender de uma forma mais rápida e sólida esta noção.

Applets em Português para o 3º ciclo e secundário

Para além do *shooting ball* estão disponíveis, em português, os programas descritos na figura 5.

Adivinha a vista

O objectivo é ajudar o aluno a visualizar e construir vistas (frente, cima, lados) de figuras no espaço.

Algebra com pontos e Problemas com pontos

O aluno procura regularidades em sequências de figuras, assim como expressões que descrevam as regularidades encontradas.

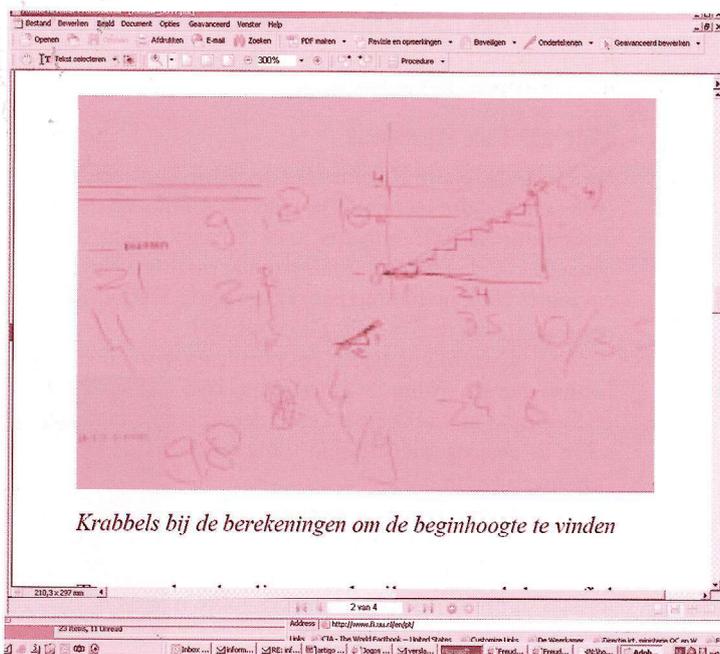


Figura 4 E assim calculam os alunos o declive: 'para cima' a dividir por 'para o lado.'

Algebra geométrica

Utilizando conhecimentos sobre áreas de rectângulos e quadrados é possível resolver equações, tirar parêntesis e decompor um produto em factores.

Árvores Algébricas

Uma árvore é uma expressão algébrica. A construção de árvores apela de forma interactiva aos conhecimentos sobre prioridade de operações e propriedades de operações algébricas. Outros temas a ser explorados: conceito de variável e função, gráficos e tabelas de funções, resolução de equações com uma variável.

Tiras com etiquetas

Tiras são sucessões de números naturais; *etiqueta* corresponde à expressão analítica destas sucessões. Com este *applet* é possível criar e combinar sucessões de números (*tiras*). Também é possível controlar se a expressão (*etiqueta*) correspondente a uma sucessão está ou não correcta.



Figura 5

Calculadora avariada, Fabrica de números e o Jogo do 24

Jogos interactivos para desenvolver e aplicar conhecimentos sobre operações aritméticas.

Conte-nos a sua experiência

Na Holanda, o site Rekenweb é bastante conhecido entre professores e alunos, tendo já mais de 4 milhões de visitas desde Julho de 2001, entre as quais (uma gota neste oceano) cerca de 700 de Portugal. Mais popular no nosso país é o site em inglês com, no mesmo período, mais de 3700 visitas portuguesas (cerca de 5% do total de visitas).

Quanto aos *applets* em português, para além de sahermos que são utilizados em algumas ESE's nacionais tanto na formação inicial como na complementar, pouco sabemos sobre as pessoas que utilizam estes recursos e a finalidade com que o fazem.

Para nós seria importante saber a opinião dos professores em Portugal sobre a utilização destes recursos. Gostaríamos assim de apelar a que os leitores nos façam chegar as suas opiniões e/ou informações sobre a sua experiência com a utilização destes *applets*.

Referências

Reeuwijk, M. van (2001). Bollen schieten. Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, vol 20(3), pp. 4-7.

Outras referências

Applets para o pré-escolar, 1º e 2º ciclos:

www.rekenweb.nl/pt — em português

www.kidskount.nl — em inglês

www.fi.uu.nl/rekenweb/rekenmaar/leerlingen/index.html — em holandês

Applets para o 3º ciclo e secundário:

www.fi.uu.nl/en/pt — em português

www.fi.uu.nl/wisweb/en — em inglês

www.fi.uu.nl/wisweb/ — em holandês

Boon, P. & Drijvers, P.H.M. (in press). Chaining operations to get insight in expressions and functions. Paper submitted to the CERME4 conference, February 2005, 7 pp.

Jonker, V., & Galen, F. v. (2004, 10-7-2004). KidsKount. Mathematics games for realistic mathematics education in primary school. Paper presented at the 10th International Conference on Mathematics Education (ICME), Copenhagen, Denmark.

Palha, S. (2003). *Applets* as didactical tools for the learning of algebra. 55th Conference of the international commission for the study and improvement of mathematics education — CIEAEM, Plock, Poland.

Reeuwijk, M. van & Meyer, M.R. (2004). Dot Patterns and Number Strips. Investigating regularity with *applets*. Paper presented at ICME10, Copenhagen, Denmark.

Reeuwijk, M. van (2004). School Algebra Struggle, what about algebra computer games?. Paper presented at ICME10, Copenhagen, Denmark.

Nisa Figueiredo e Sónia Palha
Instituto Freudenthal, Holanda

Materiais para a aula de Matemática

A actividade *Os produtos da Rã* tem como objectivo trabalhar a relação entre produtos, utilizando de forma informal as propriedades dos números e da multiplicação. A actividade tem por base um dos *applets* disponibilizados, em português, no local da Internet do Instituto Freudenthal e foi elaborada a partir do artigo *Aplicações na Internet para a Matemática* da autoria de Nisa Figueiredo e Sónia Palha, publicado nesta revista.

É muito importante que esta actividade seja concluída com uma discussão com toda a turma centrada nas descobertas feitas pelos diversos grupos de alunos. As fichas de trabalho poderão ser expostas na sala algum tempo antes e servir de ponto de partida para esta reflexão. De resto aconselhamos a leitura do referido artigo antes da experimentação da actividade em sala de aula.