

# Sucessões e jogos

João Rino

Quando se pensa em utilizar jogos com fins didáticos nas aulas no Ensino Secundário, embora se reconheça as suas virtudes, usualmente acha-se que se *perde* muito tempo e que, além disso, as idades e programas não se ajustam muito a esse tipo de estratégia.

A situação aqui apresentada foi aplicada a turmas do 11º ano, no 3º período, aquando da leccionação da unidade das Sucessões.

A par das aulas dadas com os conteúdos explicitamente mencionados no programa, foi pedido a cada grupo de dois alunos que efectuasse um trabalho. Os trabalhos eram diferentes para cada grupo e consistiam em jogos que o par tinha de:

- Jogar, para se familiarizar com as regras
- Descobrir por tentativa e erro uma estratégia ganhadora
- Investigar uma possível lei de formação, que mais não era do que o termo geral para uma Sucessão
- Elaborar um relatório, onde se explicasse o processo e as conclusões
- Apresentar e defender o trabalho perante os outros pares

Resumidamente, os trabalhos foram:

- *Regiões num círculo*, em que se pretende saber o número máximo de regiões formadas num círculo quando se traçam  $1, 2, \dots, n$  secantes
- *Sim*, em que se pretende saber quantas cordas se podem traçar sem formar um triângulo inscrito, para  $3, 4, \dots, n$  pontos da circunferência
- *Sprout*, em que se pretende saber o número máximo de arcos (entre dois pontos e criando um terceiro) que é possível traçar, para  $2, 3, \dots, n$  pontos originais
- *Bilhar Quadriculado*, em que se pretende saber quantos percursos diferentes pode fazer uma bola saindo de um canto a  $45^\circ$ , num tabuleiro de dimensões  $2 \times 1, 2 \times 2, \dots, 2 \times n, 3 \times 1, 3 \times 2, \dots, 3 \times n, \dots, m \times n$

- *Torres de Hanói*, em que se pretende saber o número mínimo de movimentos para passar para o espigão oposto  $1, 2, \dots, n$  discos
- *Alternando Cores*, em que se pretende saber o número mínimo de movimentos com os lápis de cores de modo a ficarem alternados, para 4 de cada cor e  $2, 3, 4, n$  cores
- *Manobra*, em que se pretende saber o número mínimo de deslocamentos das *carruagens* ao trocar de estação, para  $1, 2, \dots, 5$  carruagens
- *Amontoando*, em que se pretende colocar todas as moedas o mais à direita possível, para  $1, 2, \dots, n$  moedas
- *Escadas*, em que se pretende colocar todas as moedas o mais em baixo possível, para  $1, 2, \dots, n$  moedas

Alguns dos jogos propostos são bastante conhecidos mas os quatro últimos, sendo simples e passíveis de adaptações (que foram feitas, para outros pares), permitiram bastante entusiasmo aos alunos.

Os trabalhos foram realizados extra-aula e nas aulas de Laboratório, com as turmas desdobradas, em grupos de dois. Nas aulas de Laboratório eram feitas experiências e discutidas situações, como por exemplo, o aprofundamento das sucessões por recorrência e a determinação de termos gerais por resolução de sistemas, quando a sequência descoberta *experimentalmente* estabilizava o acréscimo à segunda ou terceira.

Segundo a avaliação dos alunos, o trabalho permitiu ter uma noção mais profunda de Sucessão, das relações existentes e foi excelente descobrirem que é possível encontrar um modelo para quando se quer generalizar uma determinada evolução.

Foi um trabalho que entusiasmou, aprofundou conhecimentos, não *fez perder tempo* e levou aos alunos perspectivas novas de olharem conhecimentos matemáticos.



## Alternando cores

Número de jogadores: 1

**Material:** Lápis de cor (ou outro material, que tenha a mesma forma), 4 de cada cor, tendo pelo menos 5 cores diferentes

**Objectivo:** Alinhar os lápis, com as cores alternadas e sempre na mesma sequência.

**Descrição:**

- Colocar 4 lápis em linha de modo que haja 2 cores e os da mesma cor estejam juntos.

Exemplo:

trocar                    v v a a

de modo que fique    v a v a

- Considera-se uma troca quando um lápis troca com o que lhe está encostado
- Em cada jogada, um lápis apenas pode trocar com um que lhe está junto
- Colocar 6 lápis em linha de modo que haja 3 cores e os da mesma cor estejam juntos.

Exemplo:

trocar

    v v a a b b

de modo que fique

    v a b v a b

- Continuar a lógica acrescentando 2 de cada cor
- Iniciar, mas com 3 de cada cor

**Questão:** Elaborar uma tabela com o número mínimo possível de jogadas, em função do número de cores iniciais e do número de lápis de cada cor, e procurar encontrar o termo geral das sucessões que lhe dão origem.

## Manobra

Número de jogadores: 2

**Material:** Tabuleiro próprio; Dez peças (carruagens), cinco de cada cor (figura 1).

**Objectivo:** Trocar todas as peças de uma cor com as de outra, no menor número de jogadas possível.

**Descrição:**

- Em cada jogada só se pode jogar uma peça e uma só casa
- As peças podem deslocar-se em qualquer direcção, ao longo do carril
- Não se podem saltar peças
- Em cada casa (estação) só pode estar uma só peça

**Questões:**

- Qual o número mínimo de jogadas possível para trocar tudo?
- Começar o jogo só com uma carruagem de cada lado e ver o número mínimo de jogadas, e aumentar para duas carruagens.
- Elaborar uma tabela com o número mínimo possível de jogadas, em função do número de carruagens, e procurar encontrar o termo geral da sucessão que lhe dá origem.

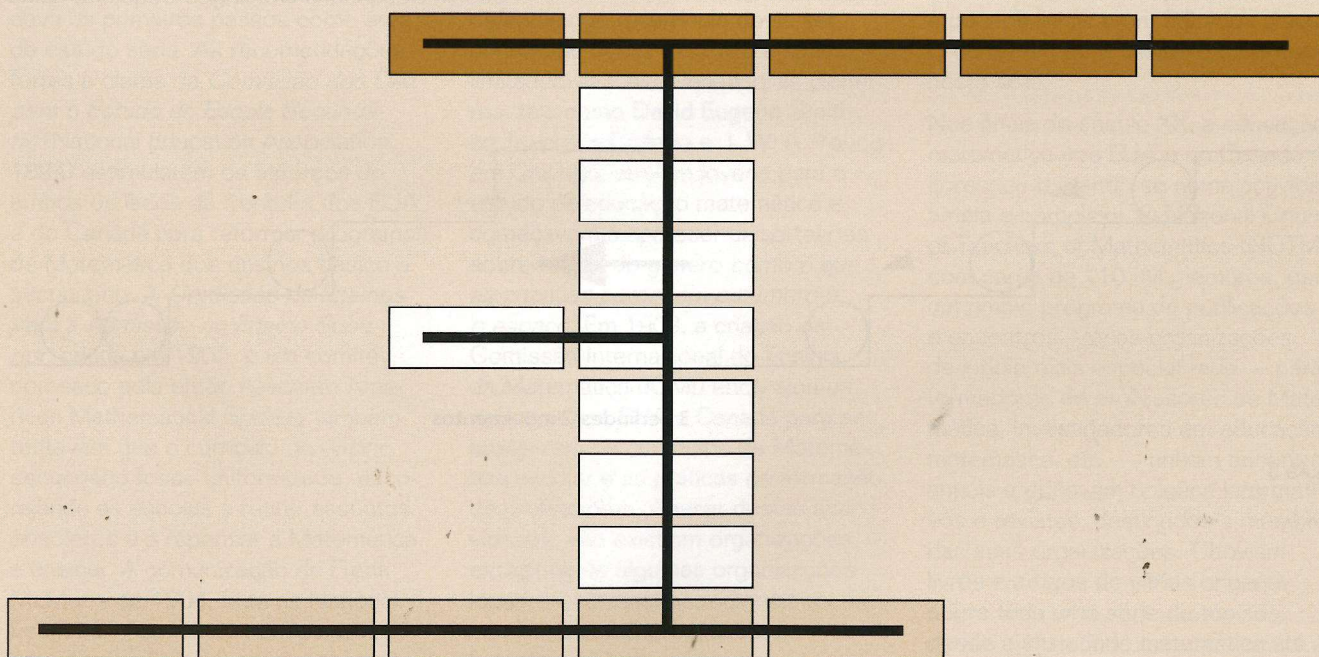


Figura 1



## Amontoando

Número de jogadores: 2

Material: Tabuleiro próprio, quadrados numa tira; 5 moedas (figura 2).

Objectivo: Colocar todas as moedas o mais à direita possível. Ganha o último a jogar.

Descrição:

- Colocam-se as moedas casa sim casa não, deixando a 1ª da direita livre
- Em cada jogada só se pode jogar uma peça e uma só casa
- Joga-se alternadamente qualquer peça
- As peças só podem deslocar-se para a direita
- Não se pode saltar peças, somente ir até uma casa que já tenha peças
- Em cada casa podem estar várias peças

Questões:

- Qual o número mínimo de jogadas possível para 1, 2, 3, 4, 5 moedas?
- É possível saber quem ganha, dado um certo número de moedas?
- Começar o jogo com uma, duas, três, ... até cinco moedas e ver o número mínimo de jogadas para cada.
- Elaborar uma tabela com o número mínimo possível de jogadas, em função do número de moedas, e procurar encontrar o termo geral da sucessão que lhe dá origem.

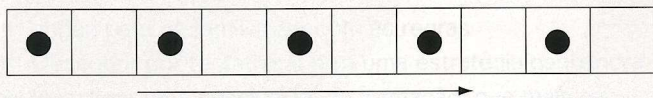


Figura 2

## Escadas

Número de jogadores: 2

Material: Tabuleiro próprio, imitando um escada; Berlindes (ou moedas iguais)

Objectivo: Colocar todas as moedas o mais à direita e baixo possível, no fundo das escadas. Ganha o último a jogar (figura 3).

Descrição:

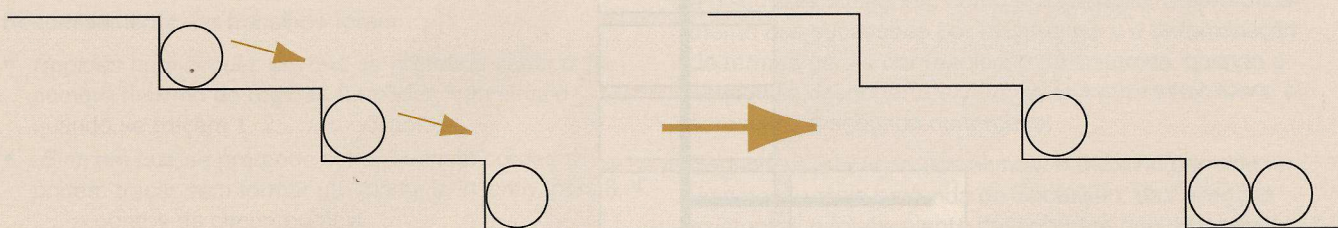
- Colocam-se as moedas, uma em cada degrau
- Colocam-se primeiro 2 moedas e em seguida vai-se acrescentado uma a cada jogo
- Em cada jogada (cada movimento) só se pode jogar uma moeda e descer um só degrau
- Joga-se alternadamente qualquer moeda
- As moedas só podem descer
- Em cada degrau só podem estar duas moedas, no máximo
- O jogo acaba quando nenhuma moeda se puder mover

Questões:

- Qual o número mínimo de jogadas possível para 2, 3, 4, 5, ... moedas?
- É possível saber quem ganha, dado um certo número de moedas?
- Começar o jogo com 1, 2, 3, ... e ver o número mínimo de jogadas para cada.
- Elaborar uma tabela com o número mínimo possível de jogadas, em função do número de moedas, e procurar encontrar o termo geral da sucessão que lhe dá origem (procurar para um número par e para um número ímpar de moedas).

João Rino

Escola Secundária Domingos Sequeira, Leiria



3 berlindas, 2 movimentos

Figura 3