Teoria de jogos: Jogos de n-jogadores

Maria Cristina Peixoto Matos e Manuel Alberto Martins Ferreira

Todos os trabalhos até agora apresentaram considerações sobre jogos de dois jogadores. Constatámos que à medida que incluíamos mais considerações os jogadores perdiam o controlo sobre as consequências das suas decisões. E de facto, nos jogos de dois jogadores de soma zero com pontos de equilíbrio, os participantes podiam sempre conseguir o *payoff* matematicamente, se não havia equilíbrios poderiam obtê-lo como valor médio. Nos jogos de dois jogadores de soma variável estes tinham de partilhar o controlo dos *payoffs* com o seu opositor, mas em contrapartida podiam influenciar os seus *payoffs*, podendo utilizar esta dependência como uma ameaça. Vamos agora mostrar que nos jogos de n-jogadores, tudo se pode tornar mais difícil.

1. A teoria de von Neumann-Morgenstern

John von Neumann e Oskar Morgenstern foram os primeiros investigadores a definir os jogos de n-jogadores e introduziram o seu conceito de solução. Todo o trabalho desenvolvido desde então para jogos de n-jogadores está fortemente influenciado pela obra daqueles investigadores e o livro que escreveram sobre esta matéria, *The Theory of Games and Economic Behaviour* converteu-se num clássico sobre esta matéria. Vamos discutir o método de von Neumann-Morgenstern apresentando um exemplo concreto.

Suponhamos que três empresas — E_1, E_2 e E_3 — valem cada uma 1€. Imaginemos também que duas delas, ou as três, podem formar uma coligação. Se se formasse essa coligação, o grupo valeria mais 9€, ou seja, a coligação de duas empresas valeria 11€ e a de três valeria 12€: o € que valia cada empresa mais os 9€ da valorização da coligação. Suponhamos que as três empresas estão perfeitamente informadas desta situação e, para simplificar, admitamos que a valorização em termos económicos é igual à quantidade de dinheiro envolvida. Falta determinar qual a coligação que se formará, e como se repartirá o dinheiro entre os sócios. Para isto vamos fazer algumas observações sobre os jogos de n-jogadores.

2. A forma da função característica

O jogo, tal como o descrevemos, diz-se que está na *forma característica*. A cada coligação associa-se um número: o *valor da coligação*. O valor de uma coligação tem o mesmo significado do *payoff* definido nos jogos de dois jogadores, e é igual à quantia mínima que pode obter a coligação se todos os seus elementos se associam e jogam em equipa.

Para muitos jogos, a descrição mais natural é a forma da sua função característica. Por exemplo, na Assembleia da República, as decisões são tomadas pela maioria de votos e é evidente o valor da coligação. Uma coligação que engloba a maioria dos jogadores tem todo o poder; uma coligação sem maioria não tem nenhum. No caso de uma coligação entre compradores e vendedores e um mercado sem restrições, o valor da coligação não é tão evidente.

No método de Neumann-Morgenstern, estes começam com um jogo de n-jogadores na sua forma normal. As possíveis estratégias dos jogadores podem ser emitir um voto, fixar uma quantidade, fixar um preço, contratar um certo número de empregados, etc. Montado o cenário do jogo, Neumann-Morgenstern questionam o que se passaria se se formasse uma coligação de jogadores — C — e esta decide actuar em uníssono para conseguir o máximo *payoff* conjunto que permite o jogo. Quanto poderia obter C?

Este problema, de acordo com Neumann-Morgenstern, é exactamente igual ao que se depara num jogo com dois jogadores. Os elementos de C constituem, de facto, um só jogador, e assim podemos calcular o máximo *payoff* possível de C supondo que os jogadores que não fazem parte da coligação actuam hostilmente contra ela. Este *payoff* é designado por $V(C)$, é definido como o valor da coligação C, e o valor e qualquer coligação pode ser calculado da mesma forma.

Esta metodologia leva-nos a perguntar se os jogadores excluídos da coligação irão realmente minimizar os *payoffs* de C. Neumann-Morgenstern afirmam que sim desde que o jogo seja absolutamente competitivo. Por esta razão, Neumann-Morgenstern supõem que o jogo de n-jogadores é de soma zero, isto é, que se ao valor de qualquer coligação C se adicionar o valor da coligação composta pelos jogadores restantes não incluídos em C, a soma será sempre a mesma. Torna-se evidente que, no caso de mais de duas coligações, a soma dos *payoffs* a cada uma poderá diminuir, mas nunca aumentar.

3. Superaditividade

Dada a existência de muitas classes diferentes de jogos de n-jogadores, os valores associados às coligações podem adaptar-se a quase qualquer modelo. Existe uma relação fundamental entre os valores de certas coligações, que é consequência da forma como são definidos estes valores.

Suponhamos C_1 e C_2 duas coligações sem jogadores comuns. Imaginemos que se forma uma nova coligação composta por todos os participantes que estavam em C_1 e C_2, esta nova coligação designa-se por $C_1 \cup C_2$. É evidente que o valor da nova coligação deve ser pelo menos igual à soma dos valores de C_1 e C_2. Os elementos de C_1 podem adoptar a estratégia que lhes assegure $V(C_1)$, e os de C_2 a que lhes garante $V(C_2)$. Desta forma, $C_1 \cup C_2$ pode obter como mínimo $V(C_1) + V(C_2)$. Este requisito, que deve ser satisfeito pela função característica chama-se *superaditividade*. Doutra forma, uma coligação característica é superaditiva se para quaisquer duas coligações C_1 e C_2 que não têm jogadores comuns, $V(C_1) + V(C_2) \leq V(C_1 \cup C_2)$.

Voltemos ao problema original. Uma possibilidade plausível é que os três jogadores se unam. Neste caso, a simetria sugere que cada jogador receba um *payoff* de 4€. Designemos este *payoff* por (4, 4, 4), no qual os montantes indicam, respectivamente, o valor recebido pela empresa E_1, E_2 e E_3. Outra possibilidade é a coligação entre apenas duas empresas, por exemplo E_2 e E_3, e que repartem equitativamente os 11€ deixando o remanescente para a empresa E_1. Neste caso o *payoff* seria (1, 5.5, 5.5), pois E_1 apenas obteria o seu valor inicial de 1€. Por último, existe também a possibilidade das empresas não chegarem a acordo quanto a uma coligação. Neste caso o resultado seria um *payoff* de 1€ para cada empresa, isto é, o resultado seria (1, 1, 1). Para ver se algum destes resultados, ou outro qualquer, é provável que se concretize, imaginemos como poderiam desenvolver-se as negociações.

Suponhamos que alguém começa por propor uma solução de (4, 4, 4). Isto parece o mais justo. No entanto, uma empresa mais ambiciosa, por exemplo E_1, dá-se conta de que pode fazer melhor se se associar apenas a uma das outras duas empresas, suponhamos E_2, e propõe-lhe distribuir equitativamente o benefício extra. O *payoff* seria (5.5, 5.5, 1). Esta alteração será uma proposta muito mais aliciante. Ambas as empresas ganhariam mais se a coligação fosse formada por elas apenas. Claro que a empresa E_3 não iria gostar muito da ideia apesar de pouco ou nada poder fazer para contrariar esta situação, pelo menos directamente. Mas E_3 pode fazer uma contra oferta. Pode conversar com E_2 e propor-lhe um payoff de 6€ se abandonar E_1 enquanto ela se contentaria com um *payoff* de 5€. O resultado seria (1, 6, 5). Se E_2 aceitar a contra oferta de E_3, será agora E_1 que deverá voltar às negociações para conquistar um melhor *payoff*.

Intuitivamente estamos já antever um processo de negociações longo e instável, para cada payoff existem sempre dois jogadores que podem obter conjuntamente mais de 8€ e unindo-se podem levar até aos 11€. Logo este processo não serve.

4. Os resultados possíveis e a racionalidade individual

Quando nos deparamos pela primeira vez com um jogo de n-jogadores, o primeiro impulso consiste em procurar a melhor estratégia para cada jogador e encontrar o *payoff* que poderia esperar-se que obtivesse um grupo e jogadores inteligentes. Isto é, tentar-se-ia adaptar a teoria que se aplica aos jogos de 2 jogadores. Quando se começa a desenvolver o jogo constata-se que isto é um objectivo demasiado ambicioso. Até os jogos mais simples são muito complexos para permitir um só *payoff*. Além disso se se estabelecesse tal teoria ela não reflectiria a realidade pois geralmente existe sempre uma grande variedade e resultados possíveis quando se joga na vida real. O que se passa é que há demasiadas variações relevantes para se poderem introduzir todas dentro de uma teoria formal como por exemplo a capacidade de negociação, as pressões sociais, a habilidade de cada jogador, etc.

No entanto, o que podemos fazer é limitar o número de resultados possíveis eliminando aqueles que claramente não se verificam na prática. Isto é o que fazem Neumann-Morgenstern em primeiro lugar. A teoria de Neumann-Morgenstern supõe que o *payoff* final será um *óptimo de Pareto — não existe nenhum outro payoff para o qual algum jogador possa melhorar o seu resultado sem piorar o resultado dos outros jogadores*. Aparentemente isto parece razoável. Voltando ao nosso problema original podemos colocar a questão: porquê as empresas se contentam em receber um *payoff* de (1, 1, 1) contra um *payoff* de (4, 4, 4)? Neumann-Morgenstern supõem também que o *payoff* final tem de ser *individualmente racional — cada jogador tem que obter com o payoff final pelo menos o que conseguiria obter quando estava sozinho*. No nosso exemplo isto significa que cada jogador deveria obter pelo menos 1€.

5. Racionalidade da coligação e núcleo do jogo

Quando se tem que decidir quais os resultados plausíveis é necessário verificar se os resultados são colateralmente racionais. Isto é, os elementos de cada coligação recebem um *payoff* total pelo menos igual ao que obteriam quando estavam incluídos noutra coligação mais restrita. Por que formariam uma coligação os jogadores se poderiam obter um melhor resultado se se mantivessem numa outra coligação anterior?

O problema consiste na possibilidade de não acontecer um *payoff* racional para a coligação ampliada. Se (a, b, c) fosse uma coligação com racionalidade, então $e_1 + e_2 > 11$, $e_1 + e_3 > 11$ e $e_2 + e_3 > 11$; somando ambos os lados da inequação, e dividindo ambos os membros por 2 obteríamos que $e_1 + e_2 + e_3 > 16.5$, que é impossível pois o valor da coligação das três empresas é 12€.

Os *payoffs* colateralmente racionais, considerados em conjunto, constituem o *núcleo*, o centro de gravidade do jogo. Se um jogo não tem núcleo será instável no sentido de que qualquer que seja o *payoff*, existe outra coligação que tem mais poder, e motivações suficientes, para alterá-lo e procurar outro resultado mais vantajoso. Se no exemplo que estamos a analisar, o valor da coligação das três empresas fosse de 20€ em vez de 12€, um *payoff* final estaria no núcleo do jogo se cada jogador recebesse pelo menos 1€, cada par obtivesse um mínimo de 11€, e claro o *payoff* total das três empresas fosse 20€.

6. Coligação dominante e conjunto efectivo

Voltemos ao nosso exemplo mas supondo que as propostas dignas de consideração são as individualmente racionais, isto é, os *payoffs* que são óptimos de Pareto. Formulando-se uma proposta (coligação e *payoff* associado) sob que condições poderá esta ser ultrapassada por outra proposta alternativa?

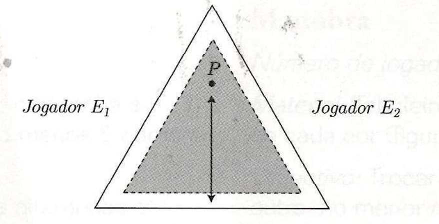
O primeiro requisito é que exista um grupo de jogadores suficientemente forte para poder esboçar uma oferta alternativa. Além disso, os jogadores que fazem a nova proposta devem estar convenientemente motivados para isso, o que significa, em última análise, que cada um deles passará a estar em melhores condições do que na coligação anterior. Nestas condições dizemos que a nova coligação *domina* a anterior, e chamaremos a esta nova coligação *conjunto efectivo*.

Para vermos como funciona tudo isto no nosso exemplo, suponhamos que a coligação original é composta pelos três jogadores com o *payoff* (5, 4, 3). O payoff alternativo (3, 5, 4) é preferido por E_2 e E_3, uma vez que cada um receberia mais 1€. Dado que E_2 e E_3 podem chegar até aos 11€ se actuarem em conjunto, podem impor um novo *payoff*. Então (3, 5, 4) domina (5, 4, 3) com E_2 e E_3 como conjunto efectivo. Por outro lado, se (1, 8, 3) fosse o *payoff* alternativo a (5, 4, 3), não seria aceite pois ainda que quaisquer dois dos jogadores possam propor esse *payoff*, não existem dois jogadores que, simultaneamente, estejam incentivados para o fazer. Tanto E_1 como E_3 prefeririam o anterior e E_2, que é o jogador verdadeiramente interessado neste resultado, não tem força suficiente por si só para o fazer. O *payoff* (6, 6, 0) seria um resultado preferível ao original por E_1 e E_3 simultaneamente, mas para obter um *payoff* de 12€ os três jogadores têm de estar em acordo, e evidentemente E_2 não estará.

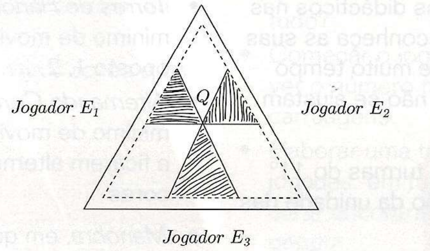
Uma forma de ilustrar este raciocínio baseia-se na seguinte propriedade geométrica:

Propriedade: Num triângulo equilátero a soma das distâncias de qualquer ponto interior aos três lados é a mesma.

No nosso exemplo um *payoff* é um resultado plausível se todos os jogadores recebem pelo menos 1€, e a soma os resultados obtidos é igual a 12€. Todas as combinações possíveis que cumprem estas condições podem representar-se graficamente pelos pontos interiores de um triângulo equilátero que estejam separados um ponto no mínimo de cada lado. Na figura seguinte, os resultados admissíveis estão representados pelos pontos situados no interior da zona sombreada, e o ponto P indica o *payoff* (2, 2, 8). (Figura 1)



Na figura seguinte, o ponto Q representa o *payoff* (3, 4, 5). Na área raiada horizontalmente encontram-se todos os resultados possíveis que dominam Q pelo conjunto efectivo E_2 e E_3. Tanto E_2 como E_3 conseguiriam mais com qualquer resultado incluído na área raiada horizontalmente com o *payoff* representado por Q. (Figura 2)



As zonas raiadas vertical e diagonalmente, representam os resultados com os quais os conjuntos efectivos E_1 e E_3 e E_1 e E_2 dominam Q, respectivamente. As zonas sem raiado são as soluções dominadas por Q, e as linhas de traços descontínuos nem dominam nem são dominadas por Q.

7. O conceito de solução de von Neumann-Morgenstern

Se nos pedissem para escolher um único *payoff* como o resultado previsto de um jogo, o candidato mais atractivo seria aquele que não fosse dominado por nenhum outro. No entanto, podemo-nos deparar com a existência de vários *payoffs* nestas condições ou, pode ser que não exista nenhum *payoff* nessas condições. Como vimos no nosso exemplo, cada *payoff* era dominado por muitos outros. De facto, a relação de domínio é o que nós matemáticos chamamos intransitiva. O *payoff* P pode dominar Q que, por sua vez pode dominar um outro R, por sua vez R pode dominar P. Esta é a razão pela qual as negociações podem ser eternas.

Von Neumann-Morgenstern recusaram encontrar um *payoff* que resultasse como solução única para todos os jogos de n-jogadores. Para estes investigadores uma solução consiste numa ou mais imputações que têm em conjunto uma certa consistência interna. Por outras palavras, uma solução S. É um conjunto de restrições que tem propriedades essenciais:

- *Nenhuma restrição que esteja compreendida na solução pode estar dominada por outra restrição que também esteja dentro da solução;*
- *Qualquer restrição que não esteja compreendida na solução, está dominada por outra restrição que esteja dentro da solução.*

8. Conclusão

Actualmente o dinamismo da Teoria de Jogos é maior do que nunca, contudo, muito há ainda por fazer, apesar das amplas aplicações desta disciplina ela possui limitações próprias. Os pressupostos impõem restrições que guiam a acção dos jogadores envolvidos, sem nenhuma consideração sobre a personalidade dos mesmos; mas quando o jogo é jogado são os agentes que definem o que é considerado como objectivo desejável.

Sem intenção de trazer descrédito às técnicas e análises estudadas, como é óbvio, as suas limitações são apontadas com o objectivo de permitirem ao leitor adquirir uma consciência clara das limitações dos métodos analíticos que se estudam, pois sem isso "podemos tornar-nos seus escravos ao invés de seus senhores".

Bibliografia

[1] Dresher, Melvin, *Games of strategy: Theory and Applications*, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1961.

[2] Gibbons, Robert; *Game Theory for Applied Economist*; Princeton University Press, 1992.

[3] Neumann, J. von; Morgenstern, O.; *Theory Of Games and Economic Behaviour*, John Wiley & Sons, Inc; New York, 1967.

[4] Osborne, Martin J.; *An Introduction to Game Theory*, Oxford University Press, 2000.

Maria Cristina Peixoto Matos
Instituto Politécnico de Viseu
Escola Superior de Tecnologia de Viseu

Manuel Alberto Martins Ferreira
Instituto Superior de Ciências do Trabalho e da Empresa