Berlindes em quatro taças

O Valter colocou quatro taças, uma em cada vértice de um quadrado, e em cada taça pôs um berlinde. Depois, carregado com um grande saco de berlindes, partiu de um dos vértices e seguiu sempre ao longo dos lados do quadrado. Só parava quando chegava a uma taça e então:

— se viesse segundo o sentido dos ponteiros do relógio, deitava na taça tantos berlindes quantos os que se encontravam na taça de onde vinha,

— se viesse em sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, retirava ou punha na taça os berlindes necessários de modo ficasse lá uma quantidade igual à da taça de onde vinha.

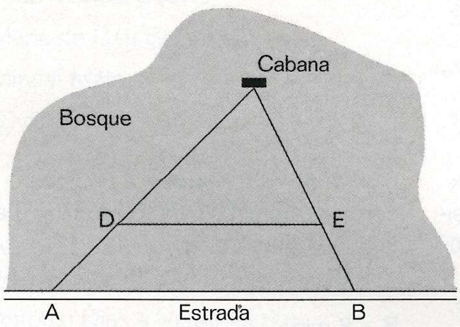
Como fez o Valter para que cada taça ficasse com 98 berlindes?

(Respostas até 28 de Fevereiro)

Caminho pelo bosque

O problema proposto no número 78 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Perto de Viana do Castelo há um belo e simpático bosque limitado por uma estrada em linha recta. De dois pontos (A e B) da estrada saem uns caminhos bem a direito que vão dar a uma cabana. Certo dia, a Teresa partiu a pé do ponto A em direcção à cabana mas, a certa altura, desistiu de ir até ao fim. Por isso, meteu a corta-mato, paralelamente à estrada, até encontrar o outro caminho (em E) e regressou à estrada por este caminho.



Curiosamente, a distância que percorreu a corta-mato foi exactamente igual ao total do que andou nos dois caminhos.

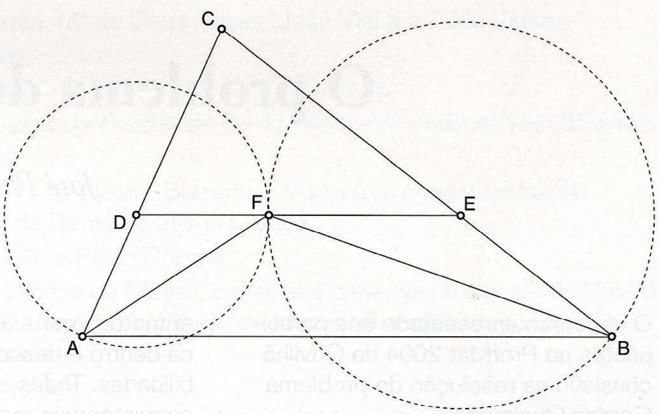
Como descobrir geometricamente o ponto D em que a Teresa abandonou o primeiro caminho?

Tivemos 9 respostas: Américo Bento (Vila Real), Ana Luísa Correia (Lisboa), António Lucas (Castelo Mendo), António Rebolho (Avelãs de Caminho), Graça Braga da Cruz, Joana Latas (Évora), João Maria de Oliveira (Cartaxo), Pedrosa Santos (Queluz) e, claro, da Teresa Pimentel (Viana do Castelo).

Quase todos estes leitores utilizaram um programa de geometria dinâmica para a investigação do problema. Depois, descobertas as relações entre o segmento DE e o triângulo inicial, trataram de fazer a demonstração do resultado. Não deixa de ser curiosa a variedade de resoluções que apareceram.

A Ana Luisa e a Teresa seguiram processos muito parecidos.

Eis como a Teresa descreve o que fez (depois de seguir



outros caminhos mais longos):

Construo as bissectrizes de dois ângulos. Depois, pelo ponto de intersecção F, faço passar uma paralela a AB obtendo D e E. Meço AD e DF, FE e EB e, maravilha!!! São iguais!!!

Logo, o processo é:

Traçar o incentro do triângulo e por ele conduzir uma paralela ao lado AB obtendo D e E por intersecção com AC e BC.

Claro, é preciso a demonstração. Eis a da Ana Luísa:

$D\hat{A}F = B\hat{A}F$ (AF é a bissectriz)

$D\hat{F}A = B\hat{A}F$ (ângulos alternos internos)

logo $D\hat{A}F = D\hat{F}A$.

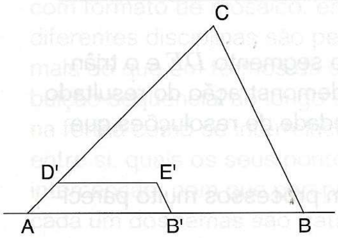
Então, o triângulo DAF é isósceles e $\overline{AD} = \overline{DF}$.

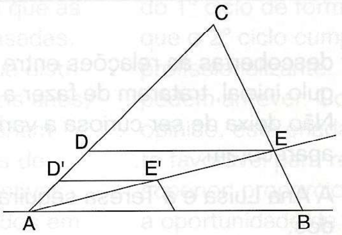
De modo semelhante se mostra que $\overline{BE} = \overline{EF}$.

O António Lucas chegou às mesmas conclusões mas por uma via mais longa.

A Joana constata experimentalmente, com um programa de geometria dinâmica, que a distância AD é um terço da distância AC e que BE é um terço de BC. Assim sendo, o segmento DE passa pelo incentro do triângulo.

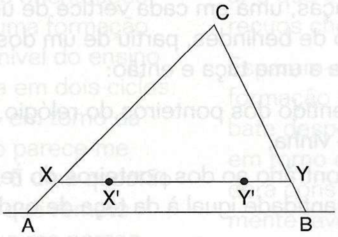
A Graça começa por desenhar o trapézio $AD'E'B'$ nas condições do problema, excepto que o lado $E'B'$ não está sobre o caminho BC. A intersecção da recta AE' com o lado BC é o ponto E procurado. A demonstração resulta do facto dos trapézios $AD'E'B'$ e $ADEB$ serem semelhantes.

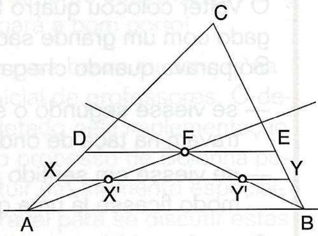




O processo do Américo foi:

Traçar uma paralela XY a AB e nela marcar os pontos X' e Y' de modo que $\overline{XX'} = \overline{AX}$ e $\overline{YY'} = \overline{BY}$. Traçar as semirectas AX' e BY'. O segmento DE passa no ponto de intersecção F destas semirectas.





O Pedrosa e o António Rebolho descobriram processos correctos e diferentes dos anteriores mas, como diz o primeiro, "não necessariamente os mais expeditos."

O problema do ProfMat 2004

José Paulo Viana

O concurso apresentado aos participantes no ProfMat 2004 da Covilhã consistiu na resolução do problema Cordas Queimadas:

> *Temos duas cordas. Se lhes deitarmos fogo numa das pontas, a primeira demora exactamente 10 minutos a arder enquanto que a segunda demora 8 minutos.*
>
> *As cordas são de fabrico muito artesanal pelo que se, por exemplo, dividíssemos a primeira ao meio, nada garantiria que cada metade ardesse em cinco minutos.*
>
> *Usando apenas estas duas cordas, quais são os tempos que seria possível medir com exactidão?*

Quando se começa a pensar neste problema, parece que não são possíveis mais do que quatro tempos. No entanto, a certa altura faz-se um click cá dentro e descobrem-se mais possibilidades. Todos os concorrentes conseguiram pelo menos doze tempos.

Os doze tempos são obtidos usando, na definição da Iva e do Nuno, duas técnicas:

Técnica simples — deitar fogo a uma ponta da corda.

Técnica dupla — pegar simultaneamente fogo às duas pontas da corda. Assim, a corda vai ardendo irregularmente a partir dos dois lados mas, garantidamente, irá demorar metade do tempo a arder completamente. A equipa dos dois Josés e a do António e do Valter incluíram mesmo a demonstração matemática deste resultado.

Com a *técnica simples*, a primeira corda demora 10 minutos a arder e a segunda demora 8:

A = 10 minutos

B = 8 min

Nota: como diz, e muito bem, a equipa da Maria de Deus, *"o símbolo* min *significa minutos, de acordo com o Sistema Internacional de Unidades e a legislação em vigor (Decreto-Lei nº 238/94 de 19 de Setembro ...".*

Com a *técnica dupla*, a primeira corda arde em 5 minutos e a segunda em 4: A/2 = 5 min, B/2 = 4 min.

Se deixarmos arder uma corda e depois outra e contarmos os tempos desde início, as possibilidades são:

A + B = 18 min