Investigando com cálculos repetidos

Celina Pereira

Cálculos repetidos (1)

Quando se coloca um cálculo simples no computador ou na calculadora e em seguida se faz a repetição do mesmo cálculo várias vezes, podem acontecer coisas aparentemente estranhas. Vais investigar algumas delas recorrendo à calculadora.

1. Escolhe um número e insere-o na calculadora. Regista-o no caderno.
2. Pressiona a tecla ENTER
3. Pressiona:
   + (verifica que surgiu ANS+)
   2
   x
   3
   ENTER
4. Continua a pressionar ENTER
5. Regista os novos números. Descobre uma lei de formação.
6. Faz variar o valor que introduziste inicialmente e repete o processo. Confirma se a tua lei de formação continua válida e se constitui um bom processo para calcular um termo de qualquer ordem.

Cálculos repetidos (2)

Modificar levemente as coisas pode fazer uma grande diferença no que acontece. Esta experiência utiliza os mesmos números e sinais, mas a ordem é diferente. O que é que achas que acontecerá desta vez? Pensa antes de fazeres.

1. Escolhe um número e insere-o na calculadora. Regista-o.
2. Pressiona a tecla [ENTER]
3. Pressiona:
   * (verifica que surgiu ANS*)
   3
   +
   2
   [ENTER]
4. Continua a pressionar [ENTER]. Se continuasses a pressionar [ENTER] durante muito tempo o que é que achas que aconteceria?
5. Faz variar o valor inicial que introduziste e repete o processo. Confirma-se a tua previsão anterior ou não?
6. Cada um dos novos números que te aparecem é um termo de uma sucessão. Regista, de uma forma organizada, o processo de geração de números feito pela calculadora (Sugestão: Se indicares as operações sem efectuar os cálculos perceberás melhor o processo de geração).
7. Compara os teus resultados com os dos teus colegas. São semelhantes ou diferentes? Em quê? Porquê?

Cálculos repetidos (3)

Os matemáticos querem sempre descobrir mais acerca da matemática. Por isso, continuam a mudar as coisas para descobrir o que acontecerá. Desta vez fez-se outra alteração.

Sê como um verdadeiro matemático.

Experimenta, olha, pensa.

1. Escolhe um número e insere-o na calculadora. Regista-o no caderno.
2. Pressiona [ENTER]
3. Pressiona:
   / (verifica que surgiu ANS /)
   2
   +
   3
   [ENTER]
4. Continua a pressionar [ENTER]
5. Faz variar o valor inicial que introduziste e repete o processo. És capaz de fazer uma conjectura para o que aconteceu?
6. Experimenta com outros números. Confirma-se a tua conjectura?
7. Discute os resultados com os teus colegas.

Contextualizando a tarefa

No ano lectivo 2003/04, leccionei Matemática a três turmas do 11° ano. No início de Maio, quando me preparava para iniciar o último tema do programa, Sucessões, decidi realizar com os alunos uma tarefa de investigação que me tinha cativado desde o primeiro momento — foi mesmo amor à primeira vista.

Em traços gerais, trata-se de efectuar, com a calculadora uma determinada sequência de cálculos, repetir as vezes que for necessário e observar e analisar os números obtidos. Esses números constituem sequências ou sucessões que podem ser analisadas de forma diferente quando se conhecem e dominam os conceitos relacionados. Mas eu decidi propor a tarefa aos alunos antes de iniciar o novo tema. Penso que nessa altura os seus raciocínios não estão *viciados* em novos conceitos e procedimentos e, daí, a minha curiosidade em relação à forma e à linguagem com que os resultados iriam ser apresentados.

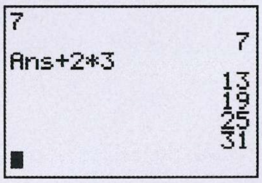
A tarefa foi realizada numa aula de 45 minutos, em grupos de 3 ou 4 alunos, com indicação para todos registarem as notas que julgassem convenientes, pois na aula seguinte deviam entregar-me os correspondentes relatórios individuais, podendo, por isso, continuar as investigações em casa, se assim o entendessem. Por condicionantes de horários, numa das turmas, os ditos 45 minutos eram a primeira parte de um bloco de 90. Como já estávamos em contagem decrescente para o final das aulas e havia um tema inteiro para leccionar, aproveitei a segunda parte desse bloco para introduzir alguns conceitos relativos às Sucessões. Como era de esperar, alguns alunos incorporaram no seu relatório alguns desses conceitos. Na totalidade das outras duas turmas, apenas uma aluna apresentou alguma notação específica das sucessões (ainda não apresentada na aula) após consulta efectuada ao manual escolar, o que, aliás, é seu hábito.

Durante a realização da tarefa não surgiram dificuldades na interpretação das instruções contidas no enunciado. Foi gratificante observar as reacções de satisfação dos alunos quando faziam alguma descoberta significativa, me solicitavam no sentido de se assegurarem de que iam no bom caminho e eu os incentivava a continuar, colocando, eventualmente, questões que os ajudassem a prosseguir.

Os relatórios

A sequência obtida na primeira exploração consistia num conjunto de termos de uma progressão aritmética de razão 6 (2x3).

A maioria dos alunos referiram que se



iam obtendo números de 6 em 6 e, como lei de formação, indicaram, simplesmente, $x+6$ ou $y=x+6$. Houve, no entanto, respostas mais completas:

- $z=y+x(2\times 3)$, em que y é o número escolhido e x o número de vezes que a operação foi repetida *(Jóni, 11°C)*

- $y = x + 6 \times n \Leftrightarrow y = x + 6n$
  Em que:
  x: é o número escolhido
  y: é o resultado obtido quando se repete o processo
  n: nº de vezes que se repete o processo *(Ana Isabel, 11ºB)*
- *"qualquer que seja o número, é igual ao seu anterior adicionado de 6 unidades" (Inês Prata, 11ºF) (João Nobre, 11ºC)*

$$\begin{cases} t_1 = b & \text{(sendo } b \text{ um número qualquer);} \\ t_n = t_{n-1} + 6 & n > 1. \end{cases}$$

Em relação à segunda investigação dos cálculos repetidos, a maioria dos alunos registou a lei de formação de forma correcta.

Eis alguns exemplos:

```
13
                13
Ans*3+2
                41
               125
               377
              1133
```

"A lei é o número anterior multiplicado por A (neste caso é 3) e só depois lhe é somado B (neste caso 2)" *(João Nuno, 11ºB)*

"... tendo um número qualquer na operação inicial, o resultado do número seguinte vai ser sempre a sua multiplicação por x mais a soma de y" *(Ana Moita, 11ºB)*

"... os resultados obtidos servem de ponto de partida para a repetição do processo, o qual pode ser traduzido pela expressão $x \times 3 + 2$, onde x representa um termo qualquer da sucessão, ao qual é aplicada aquela operação" *(Diana, 11ºB)*

"... o modo de formação é multiplicando o resultado anterior por 3 e somando 2, pelo que se pode concluir uma definição por recorrência $t_n = (t_{n-1} \times 3) + 2, n > 1$, em que $t_1 = x$." *(Pedro Silva, 11ºC)*

Quanto à conclusão relativa às sequências obtidas, a maioria dos alunos referiu que se obtinham

```
      1807962281
      5423886845
 1.627166054E10
 4.881498161E10
 1.464449448E11
 4.393348345E11
 1.318004504E12
```

"números cada vez maiores", mas também houve quem concluísse que não era bem assim:

"... para números iniciais positivos, os resultados obtidos são sempre superiores ao resultado anterior e que para números iniciais negativos, os resultados obtidos são sempre inferiores ao resultado anterior" *(Ana Fajardo, 11ºC)*

"Ao pressionarmos continuamente a tecla Enter, o número tornar-se-á cada vez maior (...), pois ao fim de algum tempo começam a ser escritos sob a forma de potência. Se o número inicial for negativo, o resultado é exactamente ao contrário, uma vez que quanto mais pressionarmos a tecla Enter, o resultado será um número cada vez mais pequeno." *(Nádia, 11ºF)*

A terceira investigação era a mais desafiante. E as relações descobertas pelos alunos foram também as que mais me surpreenderam.

```
50
               50
Ans/2+3
               28
               17
             11.5
             8.75
```

Os alunos descreveram, com mais ou menos pormenores o que observaram:

"Ao variarmos o valor de x, concluímos que o resultado continuava a tender para 6. Ex.: $\pi/2 + 3 \times 6$; $5/2 + 3 \times 6$; $10/2 + 3 \times 6$.

```
             8.75
            7.375
           6.6875
          6.34375
         6.171875
        6.0859375
       6.04296875
▮
```

Contudo, observámos uma pequena diferença, quando estudámos pormenorizadamente os números 5 e 10. Quando $x > 6$, o resultado inicial maior que 6. Ao longo das vezes que pressionámos no Enter, esse número diminuía e tendia para 6. Por outro lado, quando $x < 6$, acontecia o oposto, isto é, o resultado começava menor que 6, até que tendia para este valor. *(Ana Marguerita, 11ºC)*

```
       6.00000002
       6.00000001
      6.000000005
      6.000000003
      6.000000001
      6.000000001
                6
▮
```

Quando a aluna escreve, por exemplo, $5/2 + 3 \times 6$, quer dizer que ao considerar 5 o número inicial, dividindo-o por 2 e adicionando 3 ao quociente e repetindo o processo algumas vezes, obtém-se uma sequência de números que tendem para 6.

"Tal facto acontece apenas quando o número pelo qual se divide não é 1, pois, deste modo, estaríamos apenas a adicionar o número que lhe seguia, nunca obtendo um número que não mudasse mais" *(Sandra, 11ºB)*

Ou

"Quando $a = 1$, a sequência nunca atinge um valor constante, pois a operação é reduzida a uma simples adição" *(Diana, 11ºB)*

Os alunos formularam conjecturas e testaram-nas:

"Basta agora determinar uma maneira de chegar a esse número, estudando a sua origem. Será que o 6 provém de 2×3? Ao experimentar com outros números concluí que não." *(Ana Isabel, 11ºB)*

Uns tentaram compreender o que acontecia:

"Ora, aqui veio uma surpresa. Aparentemente, qualquer que seja o valor de x, quanto mais se avança na sucessão, mais esta se aproxima de 6. Porquê? Para descobrir isso, constatámos que 6 era o número que não se alterava aplicando a operação, pelo que o tomámos como referência. Se o número inicial fosse maior que a referência, dividi-lo por 2 faria com que se *cortasse* mais que 3, metade da referência, pelo que ao somar 3 isto iria criar uma aproximação a 6 que deixaria o resultado mais próximo de 6 que antes, repetindo-se o processo. Se o valor inicial fosse menor que a referência, dividi-lo por 2 iria *cortar* menos que 3, pelo que ao adicionar 3 o resultado se aproximaria de 6 e por aí adiante" *(Pedro Silva, 11ºC)*

Alguns dos alunos que encontraram uma expressão para o valor do limite da sucessão, justificam-na como resultado de v rias tentativas. Essa expressão assumiu diferentes formas (equivalentes):

$$\frac{y \times z}{y-1} \text{ ou } \frac{y}{x-1} + y$$

Mas houve quem pormenorizasse essas tentativas:

Outro padrão encontrado foi o modo como se obtêm os números para que o resultado tende. (...) No caso do 2 a dividir, foi fácil perceber a relação: era sempre a multiplicar: $2 \times 3 = 6$, $2 \times 4 = 8$, $2 \times 5 = 10$, etc. Nos outros foi mais difícil pois obtínhamos os números na forma decimal e não encontrávamos padrão. Só aquando de uma dica da professora para pormos os números em fracção é que reparámos que o modo era igual, era também a multiplicar. No entanto, era só para o numerador. Todos os resultados em fracção davam para o denominador o mesmo número. Esse número com o 3 a dividir era sempre 2, para o 4 era 3, para o 5, era 4 (...) sempre um número abaixo do número que estava a dividir na expressão inicial. Uma fórmula para descobrirmos o número para o qual vai tender o resultado é: (tendo em conta que o x é o número que está a dividir e y o que está a somar) $x * y/(x-1)$." *(Ana Moita, 11ºB)*

Depois das tentativas iniciais houve quem encontrasse um raciocínio lógico que justificasse o limite obtido em cada caso:

"... depois de pressionarmos o Enter várias vezes, o resultado ia-se aproximando cada vez mais de um número, até chegar a ele e não passava de lá. Assim, cheguei à conclusão que podíamos obter esse número

$$\frac{x}{A} + B = x$$

com a fórmula , pois havia um número que dividido por A e somado B iria dar a ele próprio" *(João Nuno, 11ºB)*

Diferentes relações foram descobertas por alguns grupos:

"... os resultados seguintes iriam findar em apenas um número, com a expressão inicial foi o número 6. Assim experimentámos com outros números, por exemplo $2 + 4$ e por aí adiante (com o 2 a dividir) com o fim de descobrir uma sequência. E no final descobrimos. O número para que tende era sempre par e sempre mais 2 que o anterior. Resolvemos experimentar com outros números a dividir: 3, 4, 5, ... e continuámos a achar uma sequência, no entanto sempre diferente de número para número, com o 3 a diferença entre os números para que tende o resultado era de 1,5 (3/2) para o 4 era de 1,33333... (4/3) e para o 5 era de 1,25 (5/4). Como é visível, o resultado vai diminuindo (...): 2/1, 3/2, 4/3, 5/4. (...) Se quiséssemos arranjar uma fórmula para este padrão (a diferença entre os números para o qual tende o resultado), poderíamos considerar x o numerador que vai dividir, esta seria assim: $x/x-1$. *(Ana Moita, 11ºB)*

De todos os relatórios que analisei (66, no total), o que mais me surpreendeu foi o da Nádia, do 11º F. É uma aluna de nível suficiente com alguns deslizes a níveis negativos, que acabou o ano com 12 a Matemática quando começou com 9. O grupo com que trabalhou não fez nenhuma descoberta relevante durante a aula, mas ela, em casa, continuou a investigação e fez algumas generalizações importantes, ainda que parcelares:

"Ao dividirmos um número por 2 e somando outro número z, a sucessão tenderia a aproximar-se de número $2z$.

600/2+3=303
=154,5
=80,25
=43,125
...
=6

600/2+4=304
=156
=82
=45
...
=8

600/2+5=305
=157,5
=83,75
=46,875
...
=10

Se substituirmos a expressão $y = x/2 + 3$ por $y = x/z + 2$, em que z é um número positivo ímpar, maior ou igual a 3, o y tende a aproximar-se sempre de z/k, em que k é o número de ordem de z, relativamente à sua posição na sequência dos números ímpares positivos, maiores ou iguais a 3. Assim, o número 3 corresponde ao 1, o número 5 ao 2, o número 7 ao 3 e assim sucessivamente.

200/3+2=68,667
=24,889
=10,296
...
=3 (3/1)

400/3+2=135,333
=47,111
=17,703
...
=3 (3/1)

600/3+2=193,667
=66,556
=24,185
...
=3 (3/1)

172/5+2=36,4
=9,28
=3,856
...
=2,5 (5/2)

236/5+2=49,2
=11,84
=4,368
...
=2,5 (5/2)

423/5+2=86,6
=19,32
=5,864
...
=2,5 (5/2)

78/7+2 =13,1428
=3,8775
=2,5539
...
=2,33 (7/3)

314/7+2=46,8571
=8,6938
=3,2419
...
=2,33 (7/3)

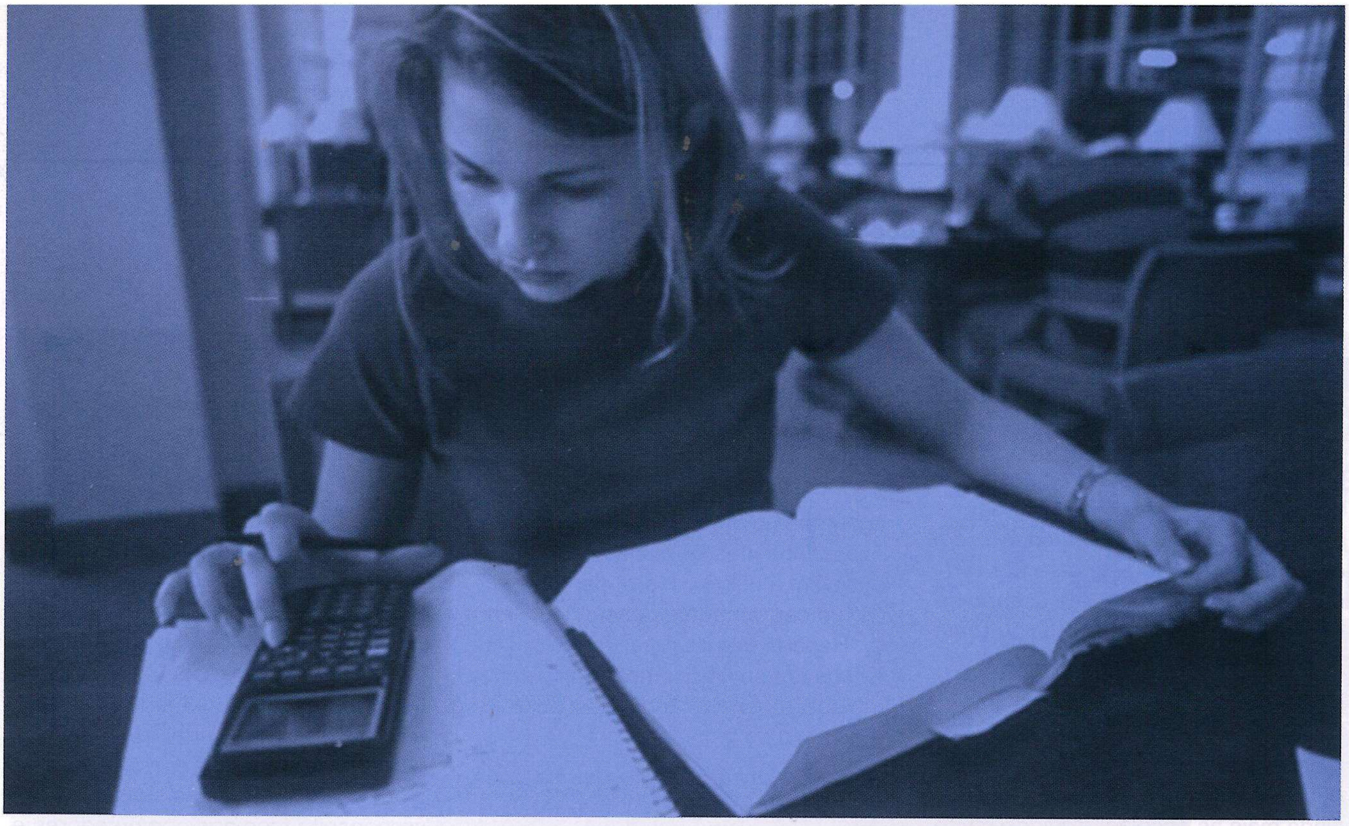
507/7+2=74,4285
=12,6326
=3,8046
...
=2,33 (7/3)

x/9+2= (...), 2,25 (7/3)

x/11+2= (...), 2,22 (11/5)

(Nádia, 11ºF)

Para completar esta exploração



apenas faltaram duas situações: considerar z um número par qualquer e z ímpar mas k qualquer, em $y = x/z + k$.

Durante a realização do trabalho de grupo, foi necessário explicar a alguns alunos que aquilo que a calculadora nos mostra nem sempre está correcto. Quando, após sucessivos Enter, aparece no visor o número 6, num primeiro impulso todos os alunos aceitaram esse valor como um valor exacto dado pela expressão com que trabalhavam. Foi uma oportunidade para lhes lembrar que a calculadora faz arredondamentos e que esse 6 não era mais que isso, devido ao número de algarismos significativos que a máquina usa nos resultados que apresenta no écran principal.

A avaliação dos relatórios

E quanto à avaliação? Como avaliar um trabalho deste tipo? É óbvio que não tenho uma resposta única, perfeita, que seja a mais justa.

Há alguns anos atrás, quando comecei a pedir aos alunos trabalhos que envolvessem redacção (composições, relatórios, …), senti algum desconforto em relação à sua avaliação. Na altura, eu e outras colegas com quem trabalhava em conjunto e que pediam os mesmos trabalhos, começávamos por fazer uma leitura de todos os trabalhos e depois classificávamo-los qualitativamente, usando a comparação como aspecto importante na atribuição da classificação. Com o decorrer do tempo e após alguma experiência, comecei a definir critérios mais específicos, de modo a obter uma classificação quantitativa. Foi o que fiz com esta tarefa de investigação. Tentei que não fossem muito penalizadores, de modo a permitir que um aluno fraco ou médio que descrevesse alguns aspectos com um mínimo de clareza e correcção obtivesse classificação positiva.

Assim, num total de 200 pontos, reservei 140 para a apresentação dos resultados obtidos nas investigações: 40 para os cálculos repetidos (1), outros 40 para os (2) e 60 para os (3). Os restantes 60 pontos dividi-os, 30 para os aspectos matemáticos envolvidos e 30 para os aspectos linguísticos e a organização da exposição. Depois de classificados os trabalhos, ao analisá-los e às respectivas classificações, não senti que destes critérios tivessem resultado injustiças. Mas claro que os resultados poderiam ter sido outros se os critérios tivessem sido diferentes.

Apesar deste processo de classificação destes trabalhos ter sido algo penoso pelas horas que me levou (foram 66 relatórios, que tinham entre 1 e 6 páginas cada um), foi um processo enriquecedor, valeu a pena. Foi interessante descobrir o que os alunos são capazes de descobrir e perceber as formas que usam para comunicar os resultados. O facto da investigação ter sido feita em grupo pouco condicionou os relatórios individuais, apenas no que diz respeito aos processos utilizados e às descobertas feitas em conjunto. Pude, também, aperceber-me da forma de funcionamento dos grupos. Houve dois grupos em que aquele ou aqueles que descobriram algumas relações, nomeadamente na terceira investigação, não conseguiram que todos os restantes elementos do grupo as compreendessem. Suspeitei disso durante a realização da tarefa e constatei-o ao ler os respectivos relatórios.

A concluir

Com esta tarefa de investigação, os alunos fizeram, de facto, matemática. Formularam hipóteses e previram resultados, estabeleceram e validaram conjecturas. Ao apresentarem conceitos e raciocínios por escrito, usando linguagem corrente, vocabulário ou simbologia específica da Matemática, desenvolveram a capacidade de comunicar. E também é importante referir que na realização desta tarefa estiveram presentes dois aspectos que considero indispensáveis no ensino da Matemática: o trabalho em pequenos grupos e a utilização da tecnologia.

Celina Pereira
Esc. Sec. Eng. Calazans Duarte