Teoria de Jogos: Jogos de Dois Jogadores de Soma Variável

Maria Cristina Peixoto Matos e Manuel Alberto Martins Ferreira

Os jogos que estudámos até agora eram de soma zero, isto é, os ganhos de um jogador equivalem às percas do seu oponente. No presente trabalho vamos analisar jogos de soma variável. Os jogos de soma variável são muito mais complicados que os jogos de soma nula e apresentam situações que não se verificam em jogos de soma nula. Na teoria dos jogos de soma nula é sempre possível encontrar uma solução óptima. No entanto, são os jogos de soma variável que melhor representam os conflitos da vida real que diariamente se encontram. Nesta classe de jogos não podemos afirmar *esta é a melhor estratégia que se deve usar* uma vez que não possuem uma solução universalmente aceite, isto é, não existe uma única estratégia óptima que é preferível a todas as outras. Os jogos de soma variável também não são estritamente competitivos, em oposição aos jogos de soma nula, porque tais jogos possuem, geralmente, elementos competitivos e cooperativos. Os jogadores que se confrontam em jogos de soma variável possuem interesses complementares e alguns interesses completamente opostos.

Nos jogos de soma variável é crucial distinguir jogos cooperativos e jogos não cooperativos. Entende-se por jogo cooperativo um jogo onde é possível o planeamento de estratégias em conjunto pelos jogadores — por exemplo o piloto de avião e um controlador de tráfego aéreo estão empenhados num jogo com um objectivo comum: conseguir uma aterragem segura. Nos jogos não cooperativos não é possível o planeamento de estratégias em conjunto — um vendedor de automóveis a negociar com um cliente, ambos desejam consumar a venda, ainda que discordem do preço. Saliente-se que, mesmo não havendo cooperação, os objectivos de cada jogador orientam o resultado do jogo para uma situação estável.

Dilema dos prisioneiros

A fronteira entre Teoria de Jogos pura e aplicada é vaga; alguns desenvolvimentos na teoria pura foram motivados por aplicações. É o caso do exemplo que A. W. Tucker apresentou numa audiência dirigida a psicólogos na Stanford University (1950) com o objectivo de ilustrar a dificuldade da análise de certo tipo de jogos. Este exemplo salienta a racionalidade exigida quando dois indivíduos se encontram numa posição onde a decisão de um depende da decisão do outro.

Dois indivíduos, supostos criminosos, Zé e Tony, são presos. O problema para a polícia é, partindo do princípio que existe envolvimento dos dois, e na ausência de provas, a necessidade de confissão. Presos em celas individuais e distantes, não havendo comunicação entre eles, a cada um são explicadas as regras deste caso:

- *Se nenhum dos dois opta por confessar ambos são acusados de um*

- *delito menor que implica uma pena simbólica de apenas um mês de prisão.*
- *Se ambos confessam assumindo a participação no crime, então, os dois são condenados a seis meses de prisão.*
- *Por fim, se um confessa e o outro não, então aquele que confessa é libertado imediatamente, e o outro é condenado à sentença máxima permitida pela lei: nove meses de cadeia (seis meses pelo crime e mais três por obstrução à justiça).*

As estratégias neste caso são: confessar ou não confessar. Os *payoffs* são as sentenças. Podemos expressar este exemplo usando a seguinte matriz de *payoffs*:

		Tony: Não confessa	Tony: Confessa
Zé	Não confessa	*(1,1)*	*(9,0)*
	Confessa	*(0,9)*	*(6,6)*

Chegados a este ponto já sabemos que Zé escolhe uma linha enquanto Tony escolhe uma coluna. Os dois números de cada célula exprimem a sentença de cada prisioneiro e correspondem ao par de estratégias por eles escolhidas. O número à esquerda corresponde ao *payoff* do prisioneiro que escolheu as linhas (Zé) enquanto que o número da direita corresponde ao *payoff* do prisioneiro que escolhe as colunas (Tony). Assim, lendo a primeira coluna no sentido descendente, se nenhum dos dois confessar, cada um é condenado a uma sentença de 1 mês, mas se Zé confessar e Tony não, Zé sai em liberdade enquanto que Tony é condenado a uma sentença de 9 meses.

Como se pode verificar este jogo não é um jogo de soma zero. Os *payoffs* dependem da estratégia escolhida por cada prisioneiro. Por esta razão o *Teorema Minimax* não se aplica. Então, como vamos resolver este jogo: *"Quais serão as estratégias racionais de forma que cada um dos criminosos minimize o tempo que irá passar na prisão?"*. Uma forma de abordar o problema, que anteriormente nos deu bons resultados, consiste em contemplar o jogo do ponto de vista de um dos jogadores.

Analisando o jogo do ponto de vista do Tony, duas coisas podem acontecer: Zé confessa ou Zé não confessa. Ora, se Zé confessa, temos:

Zé confessa	Tony não confessa	Tony é condenado com uma pena de 9 meses de prisão
	Tony confessa	Tony é condenado a uma pena de 6 meses de prisão

Por outro lado, se Zé não confessa, vem:

Zé não confessa	Tony não confessa	Tony é condenado com uma pena de 1 mês de prisão
	Tony confessa	Tony sai em liberdade

Observando as duas tabelas anteriores, concluímos que, em ambos os casos, o melhor para Tony é confessar.

Invertendo os papéis de Zé e Tony, também será melhor para Zé confessar. A solução do jogo implica pois que os dois prisioneiros confessem o crime, a racionalidade dos dois prisioneiros faz com que os mesmos escolham a estratégia de confessarem o crime.

Esta situação deve-se ao facto dos dois criminosos se encontrarem perante uma *estratégia de equilíbrio dominante*; independentemente das combinações de estratégias que cada um dos criminosos faz, a melhor escolha é sempre a mesma, *confessar* e por isso se chama *estratégia dominante*. Como os dois jogadores *jogam* a estratégia dominante, *caem* na *estratégia de equilíbrio dominante*. Desta forma, podemos pois concluir que todo o jogo no qual um jogador tem uma estratégia dominante tem uma única solução que consiste em jogar essa estratégia dominante.

Competição de preços

Como vimos anteriormente, se num jogo um jogador possui uma estratégia dominante a sua solução implica que essa estratégia seja a escolhida para se encontrar a solução do jogo. Mas, e no caso de jogos que não possuem estratégias dominantes? Como encontramos a respectiva solução?

Tomemos o seguinte exemplo de duopólio, basedo em W. Nutter.

Duas empresas, *VILEC* e *HIPEREL*, vendem *peças* pelo preço de 1€, 2€ ou 3€ por *peça*. Pressupõe-se que:

- *Os payoffs são os lucros, retirados todos os custos fixos; a companhia que praticar preços mais baixos tem mais clientes; a companhia que praticar preços mais baixos receberá mais lucros, com limites, que a companhia que praticar o preço mais elevado.*

A *matriz de payoffs* associada a este exemplo é:

		VILEC: 1€	VILEC: 2€	VILEC: 3€
HIPEREL	1€	*(0,0)*	*(50,−10)*	*(40,−20)*
	2€	*(−10,50)*	*(20,20)*	*(90,10)*
	3€	*(−20,40)*	*(10,90)*	*(50,50)*

Como se pode verificar este jogo não é um jogo de soma zero. Os lucros poderão ser de 100€, 40€, 20€ ou 0€, dependendo da estratégia escolhida por cada empresa. Por outro lado, podemos verificar que não existe nenhuma estratégia dominante atendendo ao seguinte raciocínio: *se VILEC escolhe um preço de 3€, então para HIPEREL o melhor preço é 2€, mas, para este preço de HIPEREL, 1€ será o melhor preço para VILEC.*

Uma vez explorados os conceitos de equilíbrio estudados até agora podemos constatar que nenhum nos soluciona o problema. De facto torna-se necessário definir um novo conceito de equilíbrio para solucionarmos este tipo de jogos — *Equilíbrio de Nash* — conjunto de estratégias tal que nenhum jogador pode melhorar o seu *payoff* através de uma mudança unilateral da sua estratégia.

Apliquemos esta definição ao nosso jogo. Examinando, por exemplo, a estratégia relativa à escolha de preço de 3€ para cada uma das empresas, concluímos que cada empresa pode beneficiar reduzindo o preço desde que a sua concorrente mantenha a sua estratégia inalterada. Considerando agora a estratégia correspondente ao preço de 3€ para *HIPEREL* e 2€ para *VILEC*, pode fazer-se um raciocínio análogo ao anterior: *HIPEREL* pode beneficiar reduzindo o seu preço para 1€. Continuando esta análise eliminamos todas as estratégias excepto o par em que ambas as empresas colocam o preço em 1€.

Assim conclui-se que o *equilíbrio de Nash* neste jogo corresponde ao par de estratégias de menor preço.

É difícil jogar jogos que representam a vida real

Um dos elementos mais importantes do jogo é a personalidade dos participantes, e é evidente que duas pessoas não reagem sempre da mesma maneira perante uma situação idêntica. Portanto, se queremos ter uma probabilidade de acertar nas nossas predições, para além de analisarmos as regras formais de um jogo, é necessário que estudemos as atitudes dos jogadores. Esta é, de facto, uma tarefa realmente complicada.

Olhando de novo o Dilema do prisioneiro, por exemplo, constatamos que a solução a que chegamos pode não ser a mesma se não partirmos do pressuposto que os jogadores agem racionalmente ou se supusermos que os prisioneiros podem comunicar entre si. Por esta razão, nesta classe de jogos não podemos afirmar *esta é a melhor estratégia que se deve usar* uma vez que não existe uma estratégia que seja claramente preferível às outras, nem existe um resultado único, definido e previsível.

O modo útil de pensar em jogos de soma variável é entendê-los como alegorias. As alegorias são úteis na medida em que nos ensinam a aplicar o que aprendemos numa situação simples a situações mais complicadas como as que encontramos na vida real.

Qual das caixas fortes assaltar? — Solução

O vigilante deve dirigir-se 90 vezes em cada 100 vezes à caixa forte que contém 90.000€ (que é a mais apetecível para o ladrão), mas o ladrão tentará roubar 90 vezes em cada 100 vezes a caixa forte que contém os 10.000€ (que é a que supõe menos vigiada). Logo *payoff esperado* para o assaltante será 9.000€.

Bibliografia

[1] Bicchieri, Cristina; Jeffrey, Richard; Skyrms, Brian; *The Logic of Strategy*, Oxford University Press, Inc., 1999.

[2] Davis, Morton D.; *Introducción a la Teoría de Juegos*; Tradução espanhola por José Carlos Gómez Borrero; Ciencia e Tecnología, Alianza Editorial, Madrid, 1986.

[3] Dresher, Melvin, *Games of strategy: Theory and Applications*, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1961.

[4] Fudenberg, Drew; Tirole, Jean; *Game Theory*; Cambridge, Mass: Mit. Press, 1991.

[5] Gibbons, Robert; *Game Theory for Applied Economist*; Princeton University Press, 1992.

[6] Luce, Ducan R.; Raiffa, Howard, *Games and Decisions*, New York, John Wiley and Soons, 1957.

[7] Neumann, J. von; Morgenstern, O.; *Theory Of Games and Economic Behaviour*; John Wiley & Sons, Inc; New York, 1967.

[8] Osborne, Martin J.; *An Introduction to Game Theory*; Oxford University Press, 2000.

Maria Cristina Peixoto Matos
Instituto Politécnico de Viseu, Escola Superior de Tecnologia de Viseu

Manuel Alberto Martins Ferreira
Instituto Superior de Ciências do Trabalho e da Empresa

Materiais para a aula de Matemática

Métodos de apoio à decisão — Plinio, *o Jovem*

A actividade apresentada faz parte do conjunto de materiais utilizados nos Círculos de Estudo realizados no âmbito do *Acompanhamento do Programa Ajustado de Matemática do Ensino Secundário*, para apoiar a implementação do programa da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS).

Foi construída por um grupo de acompanhantes e adaptada de: Steen, L. A. (coord). *For all Practical Proposes — Introdutions to Contemporary Mathematics*. COMAP. W. H. Freeman and Company. New York. 1991.

Esta proposta está formulada para alunos, como actividade possível de ser trabalhada em sala de aula. Não foi ainda experimentada. A mesma situação pode originar tarefas diferentes. Por exemplo, pode ser interessante explorar as seguintes questões:

1a. Que aconteceria se as três hipóteses fossem votadas em simultâneo?

1b. E se as três situações fossem voadas duas a duas? Que poderia acontecer?

2. O que seria de esperar que acontecesse se houvesse uma primeira votação *inocente vs culpado*, eventualmente seguida de outra para decidir qual a pena a aplicar?

3. Se se optasse por votar preliminarmente qual a pena a aplicar no caso de culpa, que seria de esperar para o réu?

4. Que comentário te sugere este conjunto de cenários e suas consequências?

Ana Vieira Lopes e Otília Moreirinha