José Paulo Viana

Pedras através do aro

Quatro miúdos inventaram um jogo. Penduraram um velho aro metálico bem alto num ramo de árvore. Todos têm igual número de pedras e vão atirá-las uma a uma, tentando fazê-las passar através do aro. O sistema de pontuação é o seguinte:

- Se a pedra passar pelo interior do aro sem lhe tocar: 2 pontos.
- Se passar pelo interior mas tocar no aro: 1 ponto.
- Se não passar pelo interior do aro mas lhe tocar: 0 pontos.
- Se passar por fora do aro sem lhe tocar: desconta 1 ponto.

Feito o jogo, a classificação final foi a seguinte: 1º Daniel; 2º Joana; 3º Francisco; 4º Catarina

Reparei que, se o que contasse fosse apenas a pedra atravessar o aro sem lhe tocar, não marcando nem descontando nada nos outros casos, a classificação teria sido precisamente a inversa. E mais: isto seria impossível de acontecer se eles tivessem menos pedras. No total, 12 pedras bateram no aro. Que pontuação tiveram os quatro amigos e como foram os lançamentos de cada um?

(Respostas até 31 de Dezembro)

As cartas mal distribuídas

O problema proposto no número 77 de *Educação e Matemática* foi adaptado de um, muito mais simples, publicado no número de Abril de 2003 da revista *Mathematics Teacher*. Era o seguinte:

O Augusto pegou num baralho de 52 cartas. Entregou um montinho delas à Berta, outro à Cristina, mais um ao Domingos, ficou com algumas para ele e deixou as restantes em cima da mesa.

— Não temos todos o mesmo número de cartas — reclamou a Berta.

— Não faz mal — retorquiu o Domingos. — Se o Augusto dividir igualmente metade das suas cartas entre a Berta e a Cristina, depois a Berta fizer o mesmo com a Cristina e o Augusto e, finalmente, também a Cristina dividir igualmente metade das suas cartas entre o Augusto e a Berta, todos ficaremos com o mesmo número de cartas.

Quantas cartas tinha cada um inicialmente e quantas estavam em cima da mesa?

Chegaram-nos seis respostas: Alberto Canelas (Queluz), Domingos Rijo (Castelo Branco), Edgar Martins, Eduardo Cunha, Iola Mara Ribeiro (Estarreja) e Luisa Andrade (Angra do Heroísmo).

O método seguido por quase todos foi o mesmo: representar o número de cartas que cada um recebeu no início por respectivamente A, B, C e D, e depois ir determinando, para cada fase do problema, a expressão que dava o número de cartas que cada um tinha na mão. No final, o número de cartas de cada um seria:

Augusto: $\dfrac{41A + 20B + 16C}{64}$ Berta: $\dfrac{13A + 36B + 16C}{64}$

Cristina: $\dfrac{5A + 4B + 16C}{32}$ Domingos: D

Estes quatro valores são todos iguais, pelo que obtemos um sistema de 3 equações a quatro incógnitas, com a restrição de ser $A + B + C + D < 52$

Resolvendo-se o sistema de modo a obter três das incógnitas em função de uma delas e fazendo algumas tentativas, rapidamente se chegava à solução.

No entanto, a Iola e o Alberto (este, numa segunda abordagem), usam o processo, muito mais simples e menos trabalhoso, de partir do fim para o princípio. Veja-se como eles fizeram.

Seja N o número de cartas com que todos ficam no fim. Como o baralho tem 52 cartas, terá de ser:

$$4N < 52 \text{ ou } N < 13$$

Façamos agora uma tabela com a evolução, a partir do fim, do número de cartas de cada um.

Nº cartas:	Augusto	Berta	Cristina	Domingos
3ª troca	N	N	N	N
2ª troca	$\frac{N}{2}$	$\frac{N}{2}$	$2N$	N
1ª troca	$\frac{N}{4}$	N	$\frac{7N}{4}$	N
Início	$\frac{N}{2}$	$\frac{7N}{8}$	$\frac{13N}{8}$	N

Como, na última linha, todas as expressões têm de dar números inteiros, N tem obrigatoriamente de ser múltiplo de 8. Como vimos que $N < 13$, a única hipótese é ser $N = 8$.

Conclusão: o Augusto recebeu 4 cartas, a Berta 7, a Cristina 13 e o Domingos 8.

Em cima da mesa ficaram as restantes cartas: 20.