Cinco pontos, um problema e cinco resoluções

António Bernardes, Cristina Loureiro, Eduardo Veloso, Florinda Costa, José Paulo Viana, Maria Dedò e Rita Bastos

Depois de nos termos divertido (o António Bernardes, a Cristina Loureiro, a Florinda Costa, a Rita Bastos e eu) a resolver um magnífico problema proposto pelo José Paulo Viana, várias vezes conversámos sobre a hipótese de transformar as diferentes resoluções num artigo para a *Educação e Matemática*. No entanto, as circunstâncias fizeram com que esse artigo fosse publicado sob a forma de um capítulo de um livro de homenagem a Paulo Abrantes, na sequência de um amável convite de Joaquim Giménez, dirigido a diversos autores portugueses. Como na altura o título do livro dizia respeito à resolução de problemas, lembrei-me de pedir a colaboração dos resolvedores desse problema, incluindo Maria Dedò, e escrevemos assim o projectado texto. Com autorização da editorial Graó, é aqui reproduzido em português. O livro de que é extraído é o seguinte:

Actividad matemática en el aula. Homenaje a Paulo Abrantes
Coordenadores: Joaquim Giménez, João Pedro da Ponte e Leonor Santos
Editorial Graó. Barcelona, Octubre 2004. Colección Biblioteca de Uno, número 209

Eduardo Veloso

No dia 13 de Setembro de 1999 recebi o seguinte *e-mail*:

Caro Eduardo

Deu-me um enorme gozo resolver este problema. Se não o conheceres (do que duvido ...) julgo que também o apreciarás.

São dados cinco pontos A, B, C, D e E. Estes pontos são os pontos médios dos lados de um pentágono PQRST desconhecido. Reconstruir o pentágono.

Um grande abraço

Zé Paulo

José Paulo Viana é professor de matemática e gosta naturalmente de encontrar problemas novos, tanto mais que é autor de uma coluna semanal de problemas num jornal diário português. Tem o bom hábito de desafiar amigos seus que sabe serem amantes de problemas, e foi o que fez com este. Por um outro *e-mail* de resposta da Cristina Loureiro para o José Paulo, de 17 de Outubro, fiquei a perceber que a Cristina e o António Bernardes já o tinham resolvido (*"Eu e o António já resolvemos o problema do pentágono. Obrigado por nos propores desafios tão estimulantes"*). Pela mesma mensagem fiquei também a saber que outro grupo o tinha resolvido (*"Sei que a Rita e a Florinda também já resolveram"*). Entretanto eu próprio tinha encontrado uma resolução do mesmo problema. Uns tempos depois, veio a Portugal Maria Dedò, professora de geometria na Universidade de Milão. Resolvi colocar-lhe também o problema, e surpreendeu-me com uma resposta imediata que se resumia a duas ou três frases curtas.

Em conversas posteriores, comunicámos uns aos outros as nossas resoluções, percebemos que seguiam, pelo menos aparentemente, caminhos diferentes e pensámos na hipótese de escrever um artigo. Mas fomos adiando, pressionados por outros afazeres. Agradecemos aos colegas espanhóis a hipótese que nos dão agora de escrever um texto sobre essa história e sobretudo de o fazer num livro de homenagem ao nosso grande amigo Paulo Abrantes. Nada mais apropriado! Paulo era um apaixonado resolvedor de problemas de matemática. Foi um *leader* e inspirador para todos nós, em muita coisa e também na resolução de problemas. Escreveu um interessantíssimo livro, *Viagem de Ida e Volta*[1], em que mostra como a mesma questão matemática lhe apareceu disfarçada em múltiplas ocasiões e problemas. Apreciaria certamente este texto que lhe dedicamos, em que diferentes estratégias e *matemáticas* são empregues para resolver o mesmo problema.

José Paulo Viana: o prazer de experimentar e descobrir ...

Quando encontrei este problema, pensei imediatamente em experimentá-lo no *Cabri Geomètre*.

Os pontos dados A, B, C, D e E são os pontos médios dos lados do pentágono.

Se conhecessemos um só vértice P do pentágono, o problema ficaria resolvido. Isto porque:

- o vértice seguinte Q é o simétrico de P em relação a A,
- o vértice R é o simétrico de Q em relação a B,
- o vértice S é o simétrico de R em relação a C,
- o vértice T é o simétrico de S em relação a D.

No final, o simétrico de T em relação a E tem de ser P.

Resolvi, usando o *Cabri*, colocar os pontos dados e escolher um ponto qualquer P para primeiro vértice. Fiz as diversas simetrias e é claro que, no fim, o simétrico de T em relação a E não foi P mas um outro ponto P' (figura 1). Teria sido uma sorte imensa ter acertado logo …

Comecei a deslocar P. A figura $PQRST$ alterava-se e o que havia a fazer era deslocar P até que P' coincidisse com ele.

Estava encontrada a solução *artesanal*. Mas como encontrar a posição exacta do primeiro vértice?

Tendo unido por um segmento os dois pontos P e P' (figura 2), verifiquei que, ao deslocar P, esse segmento se alterava mas mantinha sempre um ponto fixo, o seu ponto médio M. Pronto, era lá que tinha de colocar o vértice inicial P (figura 3).

Estava encontrada a solução.

A demonstração de que o vértice inicial tem de ficar na posição M pareceu-me pouco difícil de fazer mas, confesso, depois já não tive paciência para avançar por aí. Pareceu-me tudo tão claro e evidente … (eu sei, eu sei, não é uma atitude muito *matemática* mas que querem? Sou assim.).

Forinda Costa e Rita Bastos: do fim para o princípio …

Resolvemos o problema com a ajuda do *Sketchpad*. Começámos por tentar encontrar uma estratégia de resolução que tivesse em conta o conhecimento de que os pontos médios dos lados de qualquer quadrilátero são sempre os vértices de um paralelogramo. Não conseguimos! Decidimos, então, procurar descobrir relações entre um qualquer pentágono com o que se obtém tomando como vértices os pontos médios dos seus lados, isto é, seguir uma estratégia *do fim para o princípio*. Inicialmente, não descobrimos nada que pudesse servir para fazermos conjecturas que nos aproximassem de uma resolução. Até que construímos o pentágono estrelado com vértices nos pontos médios do original e ainda um outro pentágono, neste caso convexo, cujos vértices eram os pontos médios dos lados do pentágono estrelado. Este último parecia ter lados paralelos com o primeiro! (figura 4).

Com o *Sketchpad* verificámos que tinha e observámos que o pentágono menor estava *invertido* relativamente ao primeiro. Sem efectuarmos qualquer cálculo pareceu-nos que os lados do pentágono original deveriam ser o quádruplo dos seus correspondentes no pentágono *invertido*. De facto, acabámos por verificar com o GSP que os dois pentágonos são homotéticos de razão –4.

A demonstração que fizemos na altura utilizou cálculo vectorial, mas chegámos posteriormente à conclusão que basta duas aplicações sucessivas do teorema de Tales (figura 5). O segmento CD é paralelo a RT e mede metade do seu comprimento, e o segmento $T'R'$ é paralelo a CD e mede metade do seu comprimento. Como $T'R'$ tem sentido oposto a RT, concluímos que a diagonal $T'R'$ é homotética de TR e a razão é –4. O mesmo acontece com os outros pares de diagonais dos pentágonos $P'Q'R'S'T'$ e $PQRST$. Tendo em atenção que os pontos P (e P'), Q(e Q'), etc., pertencem a duas diagonais homotéticas em cada pentágono, os dois pentágonos são homotéticos de razão –4.

Quanto ao centro da homotetia, acabámos por conjecturar, já na altura em que escrevemos este texto, que esse ponto é o centro de gravidade, ou baricentro, comum aos dois pentágonos homotéticos. Ainda não encontrámos uma demonstração, mas a experimentação que fizemos com o GSP fez-nos adquirir a convicção de que a conjectura é verdadeira.

Quando resolvemos o problema através da homotetia, tentámos generalizar para polígonos com qualquer número de lados e concluímos que a situação não é a mesma para todos. Se o número de lados é um número ímpar, existe uma solução, se excluirmos as situações de colinearidade. Se o número de lados é par, só em condições particulares haverá uma

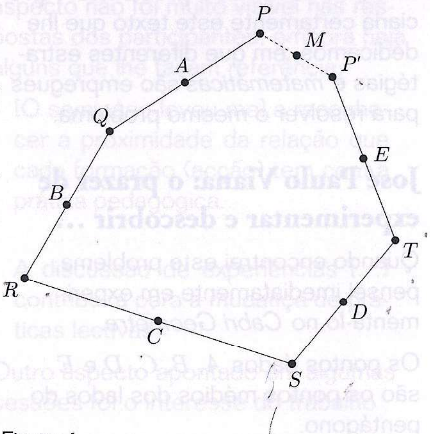


Figura 1.

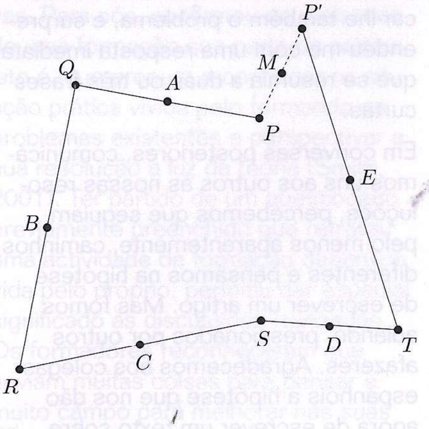


Figura 2.

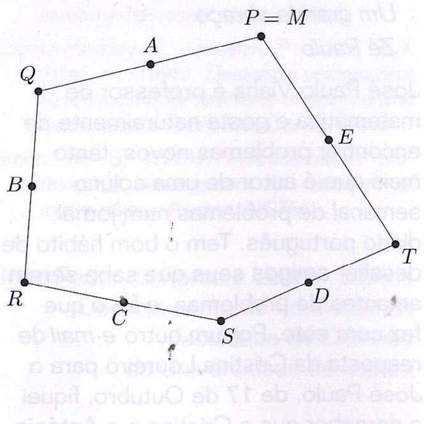


Figura 3.

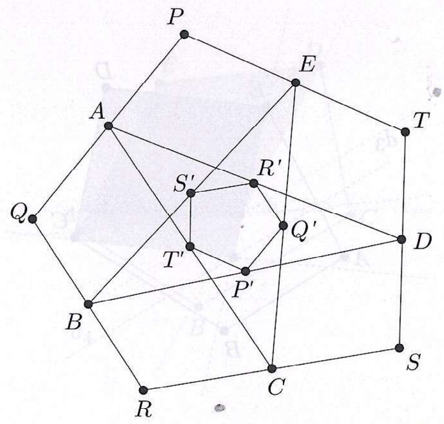


Figura 4.

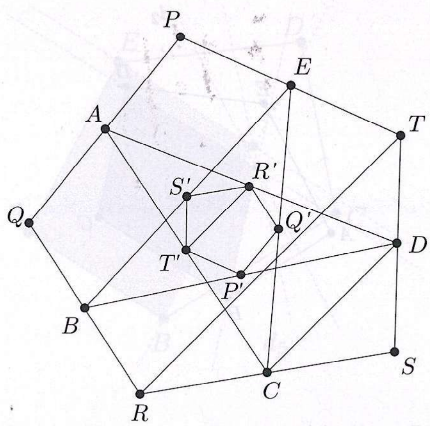


Figura 5.

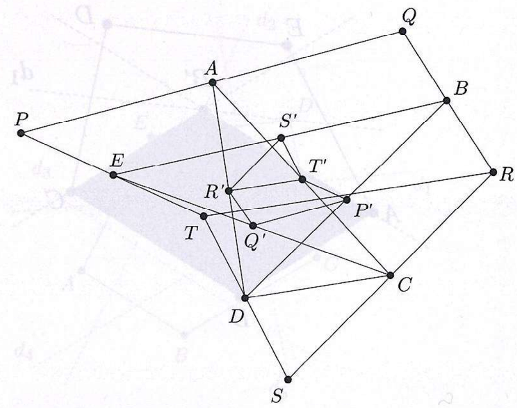


Figura 6.

solução. Por exemplo, para um quadrilátero será necessário que os pontos dados sejam os vértices de um paralelogramo.

Embora na altura não nos tenhamos preocupado com esse aspecto, pensámos agora, ao escrever este texto, que a existência de solução pode estar relacionada com a existência do polígono estrelado definido pelos pontos médios alternados –1°, 3°, 5°, etc. De facto só existe esse polígono estrelado quando o número de vértices é ímpar.

Em conclusão, um algoritmo que nos conduz à solução, de acordo com a nossa resolução, será (figura 4):

São dados cinco pontos A, B, C, D e E e pretende-se determinar o pentágono $PQRST$, sendo A o ponto médio do lado PQ, B o ponto médio do lado QR e assim sucessivamente.

Determinam-se os pontos médios dos lados do pentágono estrelado $ACEBD$, respectivamente T', Q', S', P' e R'.

Sendo A' e B' os pontos médios de $P'Q'$ e de $Q'R'$, o ponto de intersecção dos segmentos AA' e BB' dá-nos o centro de homotetia O.

Depois, é só determinar o pentágono $PQRST$, homotético de $P'Q'R'S'T'$, relativamente ao centro O e à razão –4.

Nota: embora as figuras 4 e 5 mostrem pentágonos $ABCDE$ e $PQRST$ convexos (e de lados que não se intersectam), as considerações que fazemos aplicam-se a quaisquer 5 pontos dados $ABCDE$ (ver exemplo na figura 6).

António Bernardes e Cristina Loureiro: dividir para conquistar ...

Como não estávamos a ver nenhum processo que nos conduzisse à solução, resolvemos construir no *Sketchpad* dois pentágonos convexos quaisquer tais que os vértices de um deles fossem os pontos médios dos lados do outro e começámos a fazer algumas experiências no sentido de tentar descobrir relações entre os dois polígonos. E a certa altura reparámos que a solução podia ser encontrada usando um resultado bem nosso conhecido.

Traçando por exemplo o segmento PS, uma das diagonais do pentágono $PQRST$, este fica dividido em dois polígonos, o quadrilátero $PQRS$ e o triângulo PST (figuras 7 e 8).

O triângulo PST é semelhante ao triângulo EDT e o segmento PS é paralelo ao segmento ED.[2]

Se traçarmos uma recta paralela a BC passando por A e uma outra paralela a AB passando por C obtemos o paralelogramo ABCB' em que B' é o ponto médio da diagonal PS[3] (figura 9).

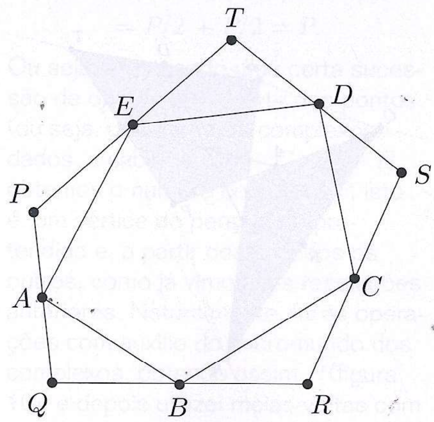


Figura 7.

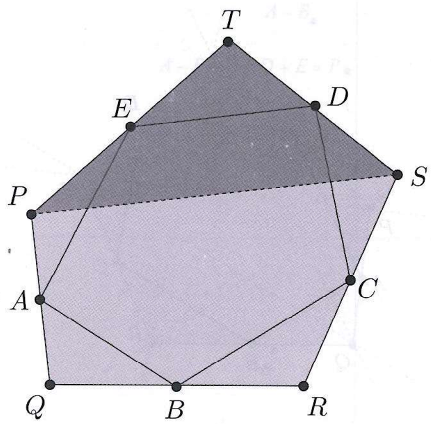


Figura 8.

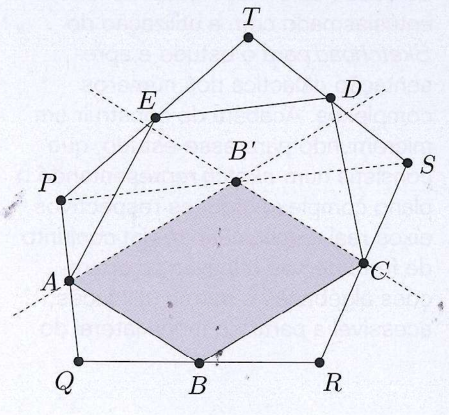


Figura 9.

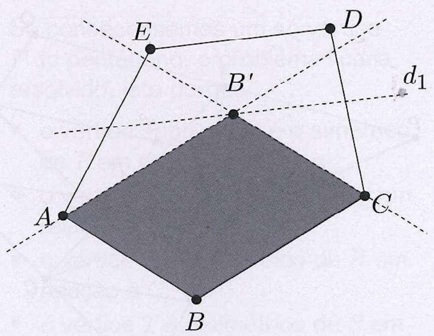


Figura 10.

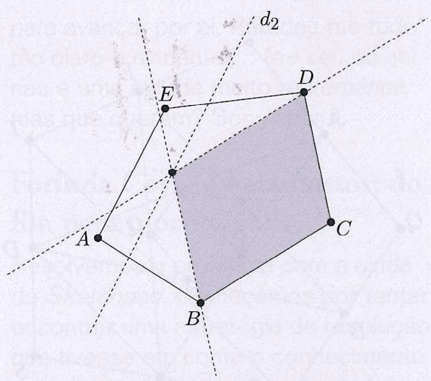


Figura 11(a).

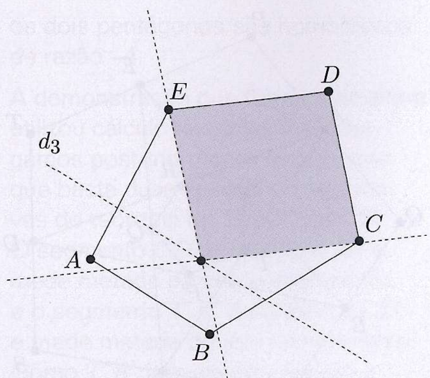


Figura 11(b).

E pronto, estava descoberto o caminho ...

Considerando o pentágono $ABCDE$ e traçando as rectas que passam em A e C e paralelas respectivamente a BC e AB obtemos o ponto B', ponto médio de uma das diagonais do pentágono que pretendemos descobrir. A recta d_1 passando por B' e paralela a ED, contém dois dos vértices desse pentágono (figura 10).

Repetindo este processo vamos obter as cinco rectas que contêm as cinco diagonais do pentágono pretendido (figura 11 e 12).

As intersecções das diagonais duas a duas definem os vértices do pentágono pretendido (figura 13). Esta resolução funciona também para pentágonos não convexos (figura 14).

Eduardo Veloso: o poder geométrico dos números complexos ...

Na época em que recebi o *e-mail* do José Paulo Viana andava muito entusiasmado com a utilização do *Sketchpad* para o estudo e apresentação didáctica dos números complexos. Acabara de construir um micromundo para esse estudo, que consistia num *sketch* representando o plano complexo, com os respectivos eixos real e imaginário, e um conjunto de ferramentas relativas às operações algébricas e outras utilidades, acessível a partir do menu lateral do programa. Na figura 15, mostra-se o espaço de trabalho deste micromundo. No exemplo, a ferramenta escolhida foi a adição de complexos, e são dados os complexos z e w.

Clicando sucessivamente nestes complexos, o programa constrói automaticamente o complexo soma dos dois, $z+w$.

Neste micromundo, podemos dar largas á nossa imaginação e explorar as relações interessantíssimas entre a geometria e os números complexos. De resto, a própria apresentação dos números complexos pode ser feita geometricamente, procurando perceber como poderíamos estender numericamente a recta real para o plano euclidiano, atribuindo um *carácter numérico* aos pontos do plano.

Surgem assim naturalmente os números complexos e a sua estrutura de corpo. Posteriormente, pode ser dada uma *interpretação algébrica a esses novos números* (como classes de equivalência de pares de números reais). Subvertemos assim a rotina habitual.

Munido deste micromundo, nada mais natural do que procurar utilizá-lo para resolver o problema do pentágono. O carácter intrinsecamente geométrico dos números complexos faz com que eles sejam ao mesmo tempo, pontos do plano e números. Utilizamos em cada momento a interpretação mais conveniente. Se são dados os pontos A, B, C, D e E, posso marcá-los no plano como pontos, mas posso também imediatamente pensar neles como números (que podem ser

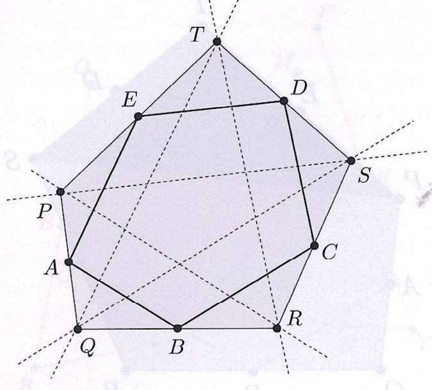


Figura 13.

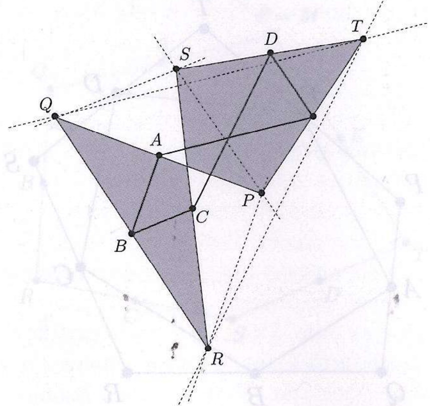


Figura 14.

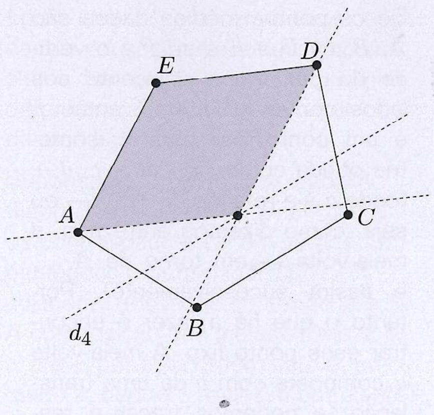


Figura 11(c).

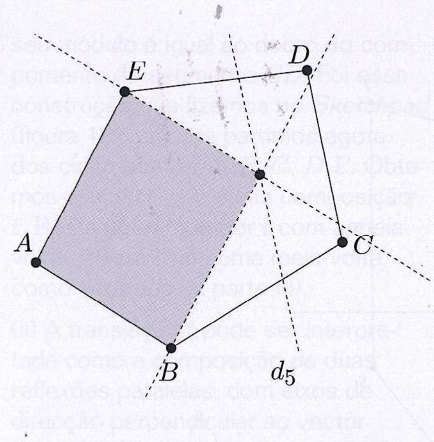


Figura 11(d).

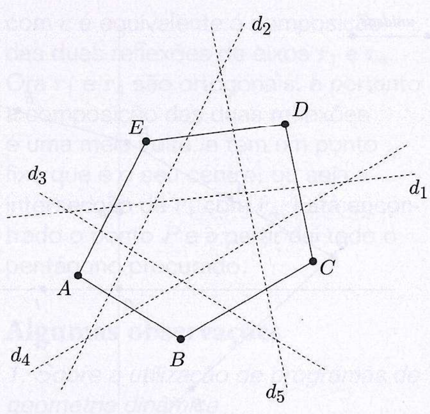


Figura 12.

somados, subraídos, etc.). Em particular, se $PQRST$ é o pentágono cujos lados têm por pontos médios A, B, C, D e E (A ponto médio de PQ, e assim sucessivamente), dado que o ponto médio do segmento PQ — em termos de números complexos — quer dizer média (numérica) dos números complexos P e Q, teremos sucessivamente

$$A = (P+Q)/2,\ B = (Q+R)/2,$$
$$C = (R+S)/2,\ D = (S+T)/2$$
$$\text{e } E = (T+P)/2$$

Mas como temos agora a nosso favor a força visual da geometria e o poder operatório da álgebra, a intuição algébrica sugere-nos que, nestas 5 equações a 5 incógnitas, subtraindo e somando alternadamente os pontos A, B, C, D e E eliminamos 4 incógnitas e ficamos com o valor da quinta ... na realidade, teremos

$$\begin{aligned} A - B + C - D + E &= P/2 + \\ &+ Q/2 - Q/2 - R/2 + R/2 + \\ &+ S/2 - S/2 - T/2 + T/2 + P/2 = \\ &= P/2 + P/2 = P. \end{aligned}$$

Ou seja, efectuando uma certa sucessão de operações a partir dos pontos (ou seja, dos números complexos) dados, a saber $A - B + C - D + E$, obtemos o número complexo P, isto é, um vértice do pentágono pretendido e, a partir deste, todos os outros, como já vimos nas resoluções anteriores. Naturalmente, fiz as operações com auxílio do micromundo dos complexos, obtendo assim P (figura 16), e depois utilizei meias-voltas com

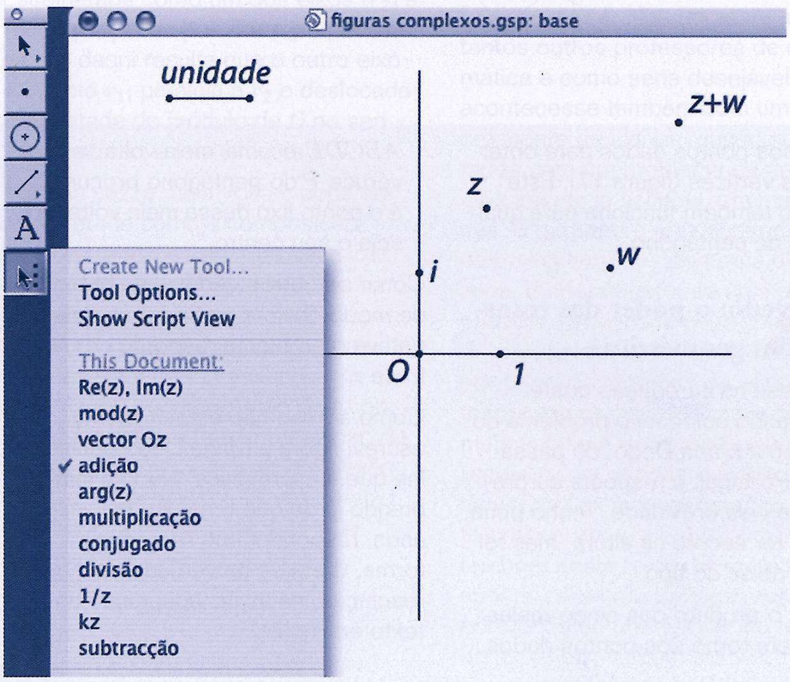


Figura 15.

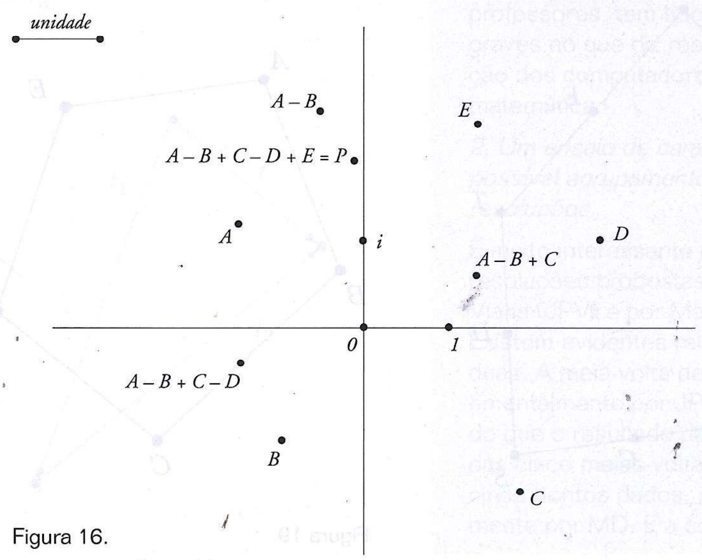


Figura 16.

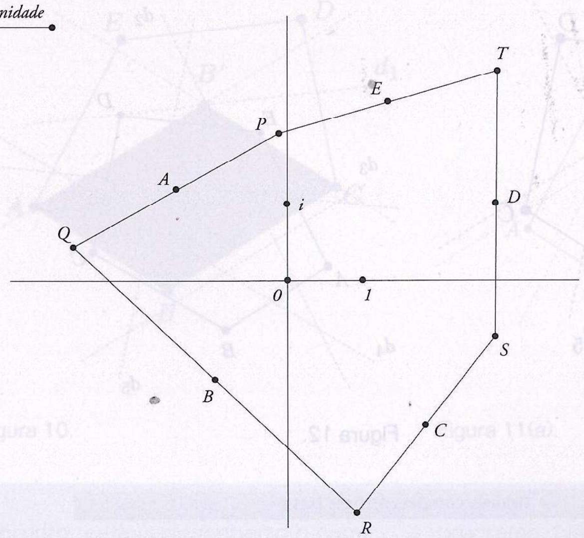


Figura 17.

centros nos pontos dados para obter os outros vértices (figura 17). Esta resolução também funciona para qualquer tipo de pentágono.

Maria Dedò: o poder das transformações geométricas ...

Como disse na introdução deste texto, quando coloquei o problema do pentágono a Maria Dedò, de passagem em Portugal, a resposta surpreendeu-me pela brevidade. Tenho pena de não a ter escrito na altura, mas foi qualquer coisa do tipo:

"Bom, o produto das cinco meias voltas em torno dos pontos dados $ABCDE$ é uma meia-volta, e um vértice P do pentágono procurado é o ponto fixo dessa meia-volta, ou seja o seu centro."

Como os outros vértices se obtêm de modo óbvio a partir de um deles, estava o problema resolvido com esta frase ...

Como a frase não estava escrita, escrevi agora a Maria Dedò pedindo-lhe que a escrevesse. Não se lembrando já do que teria dito há cinco anos, respondeu-me da seguinte forma, (trata-se na verdade da mesma resolução, na minha adaptação do seu texto em inglês):

Se os pontos médios dados são A, B, C, D e E e se P é o vértice do pentágono adjacente aos lados contendo A e E, então P é um ponto fixo para a isometria obtida compondo a, b, c, d, e (onde a é a rotação de 180° — ou seja, como dizemos entre nós, a meia-volta — em torno de A, ... e assim sucessivamente). Portanto o que há a fazer é encontrar esse ponto fixo. A meia-volta a composta com b dá uma translação (e podemos traçar o respectivo vector). O mesmo acontece com as duas meias-voltas seguintes, c e d, ou seja, as primeiras quatro meias-voltas resultam numa translação t. Portanto temos que compor t com a meia-volta e. O resultado é ainda uma meia-volta e podemos obter o seu centro (que será o vértice P procurado) por intersecção de duas rectas (ver explicação mais abaixo).

A razão da surpresa de muitos de nós perante esta resolução deriva do facto de Maria Dedò estar aqui a utilizar resultados relativos às transformações geométricas que infelizmente não são conhecidos de grande parte dos professores portugueses, apenas porque, inacreditavelmente, têm estado ausentes da sua prática — dado que as transformações são apenas tocadas ao de leve no ensino básico e completamente ignoradas no ensino secundário — e também não

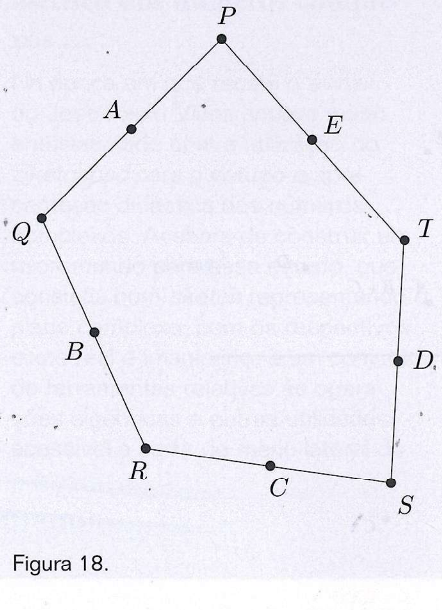


Figura 18.

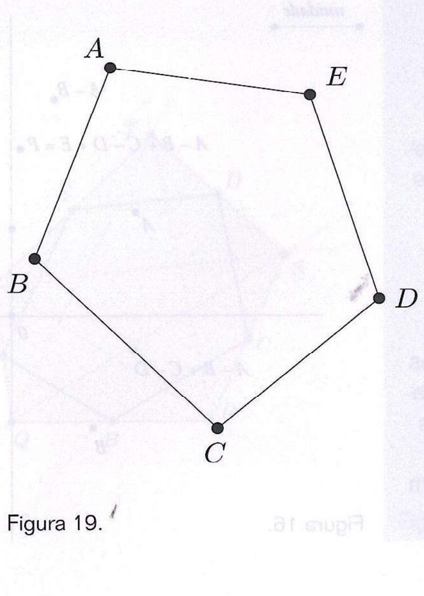
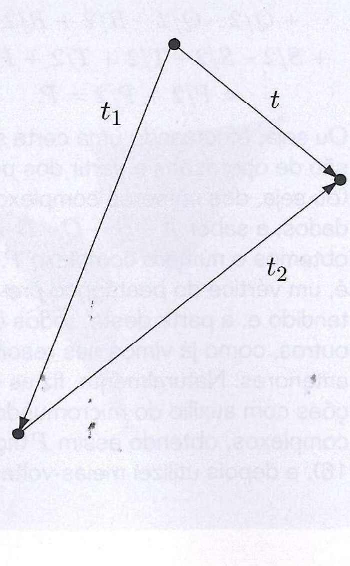


Figura 19.



fazem sequer parte, em muitos casos, da sua educação matemática universitária. Isto justifica também que nos detenhamos um pouco na explicitação da resolução de Maria Dedò.

Suponhamos o problema resolvido (figura 18), e sejam A, B, C, D e E os pontos dados e P é o vértice (do pentágono a determinar $PQRST$) adjacente aos lados contendo A e E. A composição das meias-voltas a, b, c, d e e, por esta ordem (isto é, primeiro a, depois b, e assim por diante) transforma P em si próprio (P é transformado em Q, depois em R, depois em S, depois em T e finalmente de novo em P). Ou seja, P é um ponto fixo para a composição das 5 meias-voltas.

A partir daqui, a resolução de Maria Dedò consiste em (i) determinar a isometria composição das cinco meias-voltas e depois em (ii) determinar P como ponto fixo dessa isometria.

(i) Que tipo de isometria será essa composição? A composição de duas meias-voltas é uma translação, e portanto temos duas translações (t_1, composição de a com b e t_2, composição de c com d). Logo, a composição das quatro meias-voltas, a, b, c, d é a translação composta de t_1 com t_2. Note-se que o vector da translação t_1 é paralelo a AB e o seu módulo é igual ao dobro do comprimento do segmento AB e o vector da translação t_2 é paralelo a CD e o seu módulo é igual ao dobro do comprimento do segmento CD. Foi essa construção que fizemos no *Sketchpad* (figura 19), em que partimos agora dos cinco pontos A, B, C, D,E. Obtemos assim t_1, t_2 e a sua composição t. Resta agora compor t com a meia-volta e. Será ainda uma meia-volta, como veremos na parte (ii).

(ii) A translação t pode ser interpretada como a composição de duas reflexões paralelas, com eixos de direcção perpendicular ao vector de translação e distando metade do módulo do vector da translação. Escolhemos como um dos eixos (r_2) a recta que passa por E e é perpendicular a t, daqui resulta que o outro eixo é a recta r_1, paralela a r_2 e deslocada (de metade do módulo de t) no sentido contrário ao de t (figura 20).

Por sua vez, a meia-volta e pode ser interpretada como a composição de duas reflexões em que os eixos r_3 e r_4 passam pelo ponto E e são ortogonais. Escolhemos para r_3 uma recta coincidente com r_2 e daí resulta que r_4 será a recta passando por E e paralela a t. A composição de t com e é então equivalente à composição de quatro reflexões, primeiro a reflexão de eixo r_1, depois a reflexão de eixo r_2, depois a reflexão de eixo r_3 e finalmente a reflexão de eixo r_4.

Como r_2 e r_3 são coincidentes, a sua composição é a identidade, e portanto concluímos que a composição de t com e é equivalente à composição das duas reflexões de eixos r_1 e r_4. Ora r_1 e r_4 são ortogonais, e portanto a composição das duas reflexões é uma meia-volta, e tem um ponto fixo que é o seu centro, ou seja a intersecção de r_1 com r_4. Está encontrado o ponto P e a partir daí todo o pentágono procurado.

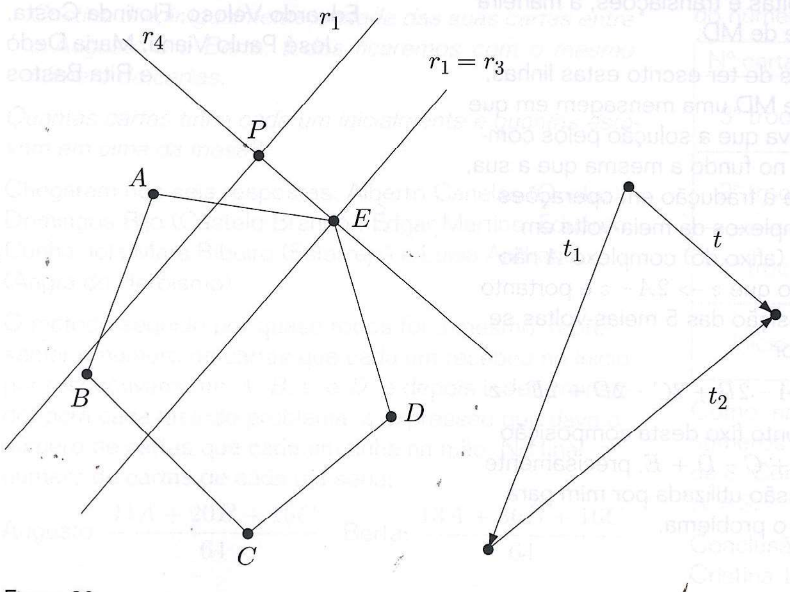


Figura 20.

Algumas observações

1. Sobre a utilização de programas de geometria dinâmica

Em quatro destas cinco resoluções o recurso ao *Cabri* ou ao *Sketchpad* foi importante. Naturalmente, como tantos outros professores de matemática e como seria desejável que acontecesse também com um número crescente de alunos, quando confrontados com um problema de geometria uma atitude já habitual, em muitos de nós, é partir para uma experimentação num ambiente de geometria dinâmica. Sinceramente, só uma atitude primária, provocada pela ignorância ou pelo preconceito, pode recusar por princípio este tipo de utilização da tecnologia na aprendizagem da matemática. Não é necessário estar aqui a repetir o que está demonstrado abundantemente em investigações e escritos recentes, e que é exemplificado também neste texto. Remetemos apenas para uma tradução recente em português de um repositório notável de experiências com software de geometria dinâmica[4]. Aquela atitude primária, infelizmente ainda presente em muitos matemáticos das nossas universidades que preparam futuros professores, tem tido consequências graves no que diz respeito à introdução dos computadores no ensino da matemática.

2. Um ensaio de caracterização e possível agrupamento das diferentes resoluções

É muito interessante comparar as resoluções propostas por José Paulo Viana (JPV) e por Maria Dedò (MD). Existem evidentes relações entre as duas. A meia-volta descoberta experimentalmente por JPV não é mais do que o resultado da composição das cinco meias-voltas, em torno dos cinco pontos dados, prevista teoricamente por MD. E a conclusão, óbvia

— com razão — para JPV, de que o ponto médio do segmento PP' seria a solução (na determinação de um vértice do pentágono pedido) corresponde à afirmação de que o vértice *P* a encontrar seria *um* (mais tarde se veria que era *o*) ponto fixo da isometria resultante dessa composição. No fundo, estamos a ver aqui em jogo duas intuições, a intuição geométrica resultante da visualização e da experimentação frequentes num contexto de geometria dinâmica — no caso de JPV — e a intuição de quem tem uma experiência prolongada no estudo das isometrias e da álgebra das suas composições, ou seja a intuição (do que é habitual acontecer) no domínio específico das transformações geométricas — no caso de MD. Podemos dizer que as duas resoluções mostram um caminho didáctico no ensino das transformações geométricas — o nível de conhecimento estrutural revelado pela resolução de MD exige a passagem anterior por experiências e aquisição de intuições do tipo revelado pela resolução de JPV.

Também, num certo sentido, é possível associar as resoluções de Florinda Costa e de Rita Bastos (F+R) e de António Bernardes e Cristina Loureiro (A+C). Em ambas é possível encontrar uma estratégia velha de séculos, senão de milénios, na resolução de problemas de geometria: *supor o problema resolvido e procurar relações entre os vários objectos geométricos*, esperando-se que daí resultem indicações para a resolução do problema posto. Essa estratégia resultou em ambos os casos, e é evidente como a utilização inteligente de um programa de geometria dinâmica contribuiu para isso. No entanto, os caminhos e as resoluções são diferentes, e é pedagógico ver em quê. F+R procuraram, e encontraram, um padrão na passagem de um pentágono para outro pentágono (no caso estrelado) em que os vértices são os pontos médios dos lados do primeiro. A matemática como ciência dos padrões ... Por seu lado, a dissecção do pentágono num triângulo e num quadrilátero, feita por A+C, pode sugerir que, conscientemente ou não, recorreram a uma ideia cara a Polya (*"conheces algum problema relacionado com este?"*) e se lembraram do paralelogramo que resulta sempre da consideração dos pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer. *Dividiram o pentágono para o conquistar*....

No que diz respeito à resolução que utiliza a aritmética dos números complexos, ela parece afastar-se, por essa razão, das outras. No entanto, essa distinção é mais aparente do que real, como se poderia esperar numa ciência como a matemática, com uma unidade tão profunda. Em particular, a tradução em termos de operações com números complexos das isometrias do plano euclidiano é extraordinariamente simples. Por exemplo, se pensarmos na isometria meia-volta, de centro na origem O, a sua tradução, em termos de números complexos, é o produto por -1! Isto é, se z é um número complexo, o transformado de z pela meia-volta de centro na origem é simplesmente $-z$. Se o centro não é a origem mas um ponto qualquer U, o transformado obtém-se com uma espécie de *sanduiche* de transformações (primeiro deslocamos z para *perto da origem* por meio da translação UO, depois multiplicamos por -1, e depois desfazemos a deslocação inicial por meio da translação OU). Isto é, embora não tenha feito ainda esse trabalho, é minha profunda convicção que a aritmética dos complexos que resolveu o problema poderia ser inteiramente traduzida em termos de meias-voltas e translações, à maneira de JPV e de MD.

Já depois de ter escrito estas linhas, recebi de MD uma mensagem em que comentava que a solução pelos complexos é no fundo a mesma que a sua, dado que a tradução em operações com complexos da meia-volta em torno do (afixo do) complexo A não é mais do que $z \to 2A - z$ e portanto a composição das 5 meias-voltas se traduz por

$$z \to 2A - 2B + 2C - 2D + 2E - z.$$

Ora o ponto fixo desta composição é $A - B + C - D + E$, precisamente a expressão utilizada por mim para resolver o problema.

3. Possíveis extensões

Como é referido por F+R, e também por MD na mensagem que me enviou, o facto de ser um pentágono (sobretudo de ser um polígono com um número ímpar de vértices) tem influência decisiva no facto de podermos encontrar sempre uma solução. Acrescenta MD, numa mensagem mais recente, que na solução F+R a condição para existência de solução é o facto de existir o pentágono estrelado intermédio, e isso depende do facto de se tratar de um número ímpar de lados no polígono pedido. Ora isso também relaciona a solução F+R com a de MD, dado que os lados do pentágono estrelado não são mais do que os vectores das translações que resultam das composições das meias-voltas. O leitor que ficou *apanhado* por este problema poderá investigar o que aconteceria às resoluções descritas aqui no caso do polígono não ser um pentágono.

Notas

1 Abrantes, Paulo. *Viagem de ida e Volta*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 1987.

2 Os dois triângulos têm um ângulo comum e os lados que o formam proporcionais já que E e D são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos PT e TS.

3 Os pontos médios de um quadrilátero qualquer definem um paralelogramo.

4 APM. *Geometria Dinâmica*. Selecção de textos do livro *Geometry Turned On*, ed. James R. King e Doris Schattschneider, MAA. Lisboa: APM, 2003.

António Bernardes, Cristina Loureiro,
Eduardo Veloso, Florinda Costa,
José Paulo Viana, Maria Dedò
e Rita Bastos