Função quadrática e movimento de projécteis

Margarida Cristina Silva, Escola Secundária D. Pedro V

O presente artigo refere uma experiência de trabalho extra-aula, realizada com um grupo de alunos do 9.º ano de escolaridade.

Pretendia-se estudar o movimento de foguetões no campo gravítico terrestre e relacionar este estudo com um assunto de natureza puramente matemática: a função quadrática.

Foi utilizado o computador com dois programas de características diferentes: uma simulação construída para o efeito (''Nave'') e um programa utilitário (folha de cálculo). Não se pretendia dirigir as actividades dos alunos para a aprendizagem de qualquer tópico específico, mas sim criar situações abertas, com bastante «espaço de manobra».

Descrição do programa «Nave»

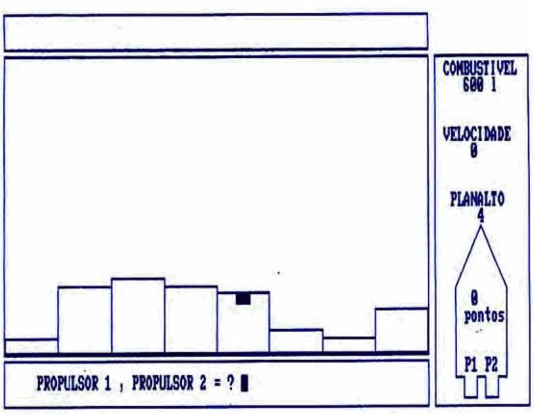
O programa «Nave» simula graficamente o movimento de um foguetão no campo gravítico terrestre, sobre uma zona de oito planaltos de altura gerada aleatoriamente.

O foguetão tem de descolar do planalto onde se encontra e aterrar noutro planalto sem provocar uma «GRANDE CRATERA» no solo.

Possui dois retropropulsores (P1 e P2), inicialmente desligados, e uma quantidade de combustível inicial igual a 600 litros, encontrando-se aleatoriamente num dos oito planaltos.

Com o objectivo de tornar a simulação do movimento do foguete o mais real possível, o programa pressupõe que os retropropulsores estão sempre voltados para o solo.

Inicialmente surge o seguinte ecrã:



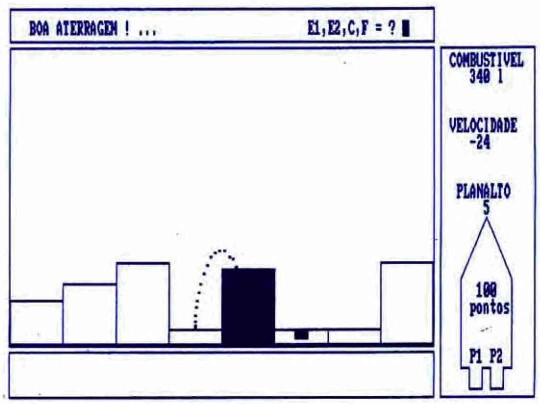
Pretende-se que o aluno introduza o nível de propulsão (quantidade de gases expelida por unidade de tempo) para o retropropulsor 1 e 2 respectivamente.

Os níveis de propulsão variam entre 0 e 9 (para cada um dos retropropulsores).

O nível 0 0 corresponde a ter os propulsores desligados (queda livre) e 9 9 corresponde à potência máxima (máxima força de lançamento ou de travagem, conforme o foguetão esteja a levantar voo ou a aterrar).

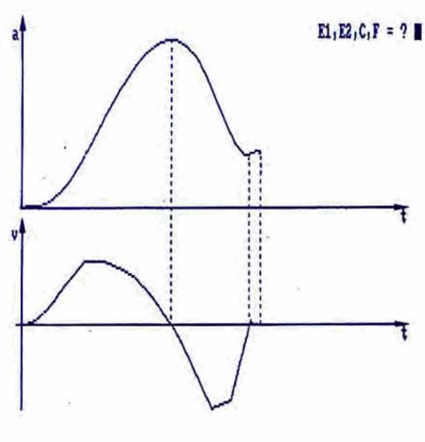
Assim, depois de experimentar vários valores de nível de propulsão, o aluno apercebe-se da trajectória que a nave está a descrever sobre os planaltos (num plano X Y correspondente ao ecrã). Esta trajectória, constituída por uma série de pontos corresponde, afinal, a uma sobreposição de fotografias (instantâneos) da nave, tiradas de 10 em 10 segundos.

O gráfico seguinte representa a trajectória do movimento de uma nave que parte do planalto 4 e aterra no planalto 5.



O valor da velocidade vertical é apresentado na «janela» da direita, sendo positivo se a nave está a subir e negativo se a nave está a descer, tomando obviamente o valor zero no «topo» das trajectórias.

Depois de construída a trajectória do movimento da nave, o aluno pode visualizar, simultaneamente num segundo ecrã, dois gráficos, um respeitante à altura da nave em função do tempo e outro representando a velocidade da nave (segundo y) em função do tempo:

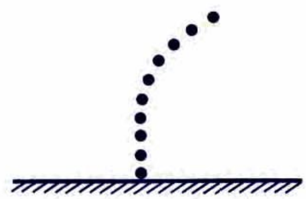


O primeiro contacto com o programa «Nave»

Os alunos trabalharam em grupos de dois, tendo cada um usado estratégias diferentes para levantar vôo e aterrar.

Bastante interessante foi o procedimento de uma aluna que antes tinha feito a seguinte conjectura sobre a trajectória do movimento da nave:

«Se este pontinho for a nave, a sua trajectória deve ser assim:»



O seu primeiro contacto com o programa foi exactamente no sentido de averiguar se tal hipótese era ou não válida. E apercebeu-se realmente que tudo se passava como tinha imaginado: caso não desligasse os motores entraria em órbita.

Como o objectivo era aterrar, tornava-se necessário desligar os motores após se ter introduzido uma componente horizontal no movimento, o que era conseguido atribuindo níveis de propulsão diferentes à esquerda e à direita.

Depois de diversas tentativas concluiu que para a nave aterrar sem provocar a «GRANDE CRATERA» no solo se devia manter uma baixa velocidade a par de uma baixa altitude relativamente ao planalto de aterragem. E o combustível não podia acabar!...

Outro momento interessante surgiu quando os alunos se aperceberam que se desligassem os propulsores (o que correspondia a introduzir os níveis 0 0), a nave continuava a subir com decréscimo de velocidade.

Este facto provocou algum espanto:

«Então se introduzirmos 0 0 a nave não desce?»

Depois de experimentarem outros valores, concluiram que isso se devia ao facto da nave «levar» uma grande velocidade.

Foi nesta altura que os alunos tiveram oportunidade de reconhecer a trajectória parabólica da nave.

O encontro seguinte...

Os alunos tentaram sistematizar tudo o que tinham conseguido apreender do trabalho realizado com o programa.

Elaboraram, para isso, um relatório de todas as actividades desenvolvidas.

Tal relatório foi escrito com o auxílio de um programa de processamento de texto, o que constituiu uma agradável surpresa para os alunos.

Os alunos escreveram e imprimiram textos da sua autoria, relacionados com o programa «Nave», aperfeiçoando-os e modificando-os sem restrições numa fase posterior.

O segundo contacto com o programa «Nave»

Os alunos tentaram novamente aterrar nos planaltos com êxito. Em seguida foi-lhes proposto a visualização dos dois gráficos, altura em relação ao planalto em função do tempo, velocidade vertical em funcão do tempo.

Foi sugerida a interpretação isolada de cada um dos gráficos, ao que os alunos reagiram da melhor forma, na medida em que tiraram informações dos próprios gráficos para melhorarem estratégias de aterragem.

Contudo, o que se mostrou mais significativo foi a interpretação conjunta dos gráficos. Alguns dos alunos aperceberam-se quase instantaneamente que, por exemplo, a altura é máxima quando a velocidade se anula.

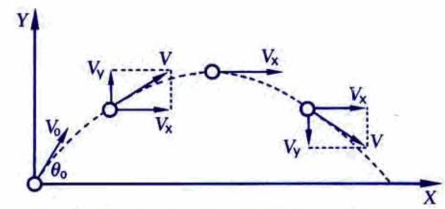
Após a anterior constatação surgiu a ideia de tentar relacionar a curvatura do primeiro gráfico com o andamento do gráfico da velocidade. Não foram imediatas as conclusões dos alunos, mas após algumas tentativas estes aperceberam-se que, quando o sentido da concavidade do primeiro gráfico se invertia a velocidade passava de crescente a decrescente ou vice-versa.

A folha de cálculo

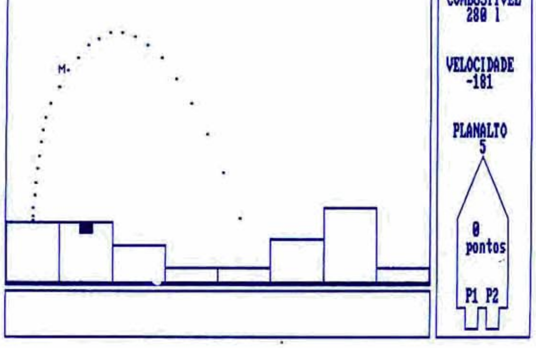
Após o estudo do movimento de uma nave no campo gravítico terrestre, através do conjunto de actividades com o programa «Nave» (e não só) anteriormente referidas, passou-se a um estudo generalizado do movimento de projécteis com o apoio de um programa elaborado na folha de cálculo (SC4).

1. Considerações teóricas

O movimento de um projéctil (no plano X-Y) pode ser substituído por dois movimentos independentes.



Estes são facilmente visualizados se tomarmos como exemplo o movimento da nave a partir do momento M em que se desligam os motores.



A coordenada x da nave é igual, em qualquer instante, à distância percorrida na horizontal, enquanto a coordenada y pode ser obtida como se a nave se deslocasse ao longo de uma linha vertical.

Movimento horizontal - uniforme

$x'' = 0$ (aceleração nula)
$x' = V_{x_0}$ (velocidade constante)
$x = V_{x_0} \cdot t + X_0$

Movimento vertical — uniformemente acelerado

$y'' = -g$ (aceleração da gravidade)
$y' = -g.t + V_{y_0}$
$y = -1/2gt^2 + V_{y_0} \cdot t + Y_0$

O modelo matemático atrás referido, dado que descreve um dos fenómenos físicos mais conhecidos (a queda de objectos é uma constante do dia a dia...) é sem dúvida uma boa escolha para sensibilizar os alunos para a estreita ligação entre o mundo físico e a Matemática e simultaneamente explicar como foi elaborado o programa «Nave».
No entanto, tornava-se necessário arranjar uma forma de analisar este modelo sem os alunos se sentirem «esmagados» pela sua dificuldade.
A folha de cálculo electrónica oferece ao utilizador a possibilidade de participar na construção do modelo matemático. Por isso se optou pela sua utilização.

2. Matriz programada

O ponto de partida consiste em colocar os alunos face a uma matriz construída do seguinte modo:

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1										
2						MOVIMENTO DE UM PROJECTIL				
3										
4										
5				TEMPO		Vxo.t + Xo		-1/2.g.t^2 + Vyo.t + Yo		
6	Vxo =	0								
7	Vyo =	0		0		0			0	
8				0		0			0	
9	Xo =	0		0		0			0	
10	Yo =	0		0		0			0	
11				0		0			0	
12	a=	-4.9		0		0			0	
13	b=	0		0		0			0	
14	c=	0		0		0			0	

Ao contrário do que acontecia com o programa «Nave», é necessário introduzir a velocidade segundo o eixo dos XX — V_{x_0} e a velocidade segundo o eixo dos YY — V_{y_0} (estes valores são calculados no programa «Nave» após a introdução de P1 e P2).
É necessário também introduzir x_0 e y_0 que representam as coordenadas do ponto donde é lançado o projéctil (no caso do programa «Nave» — o planalto de partida).
Em seguida visualizam-se três tipos de gráficos:

1) X - Y (trajectória no espaço)
2) X - t (espaço percorrido na horizontal/tempo)
3) Y - t (espaço percorrido na vertical/tempo)

Repare-se na influência dos valores atribuídos a V_{x_0} e V_{y_0} na forma final da parábola:

A) V_{x_0} é «muito superior» a V_{y_0}

— A parábola tem a concavidade pouco acentuada

B) V_{y_0} é «muito superior» a V_{x_0}

— A parábola tem a concavidade muito acentuada

3. Utilização da matriz

No primeiro contacto que os alunos tiveram com a matriz, começou-se por discutir o significado físico e matemático das expressões envolvidas.
Os alunos repararam nas fórmulas

$V_{x_0} + x_0$ (a)
$-1/2gt^2 + V_{x_0} \cdot t + y_0$ (b)

interrogando-se acerca do seu significado.
Após algumas considerações teóricas, os alunos compreenderam que o movimento parabólico no plano X-Y se decompõe em dois movimentos independentes, um segundo X (fórmula (a)) e outro segundo Y (fórmula (b)).

Analisando mais detalhadamente a fórmula (b) os alunos concluiram que, visto **g** ser uma constante igual a 9,8 (aceleração da gravidade em ms^{-2}) então a referida fórmula assemelha-se ao primeiro membro de uma equação do segundo grau $\mathbf{at^2+bt+c}$ em que

$$a = -4{,}9 \; ; \; b = V_{y_0} \; ; \; c = y_0$$

A propósito do valor de **g**, gerou-se uma discussão bastante viva em que os alunos mostraram admiração pelo facto de todos os corpos independentemente da sua massa cairem com a mesma aceleração. Ficaram convencidos quando se falou na célebre experiência de Galileu que deixou cair do alto da Torre de Pisa duas esferas com o mesmo volume (para sofrerem igual atrito) e massas diferentes tendo verificado que atingiram o solo exactamente no mesmo instante.

Finalmente os alunos começaram a introduzir valores (diferentes) para V_{x_0} e V_{y_0}, visualizando em seguida o gráfico 1 (X-Y).

As expectativas confirmaram-se.

Surgiu uma parábola de concavidade voltada para baixo.

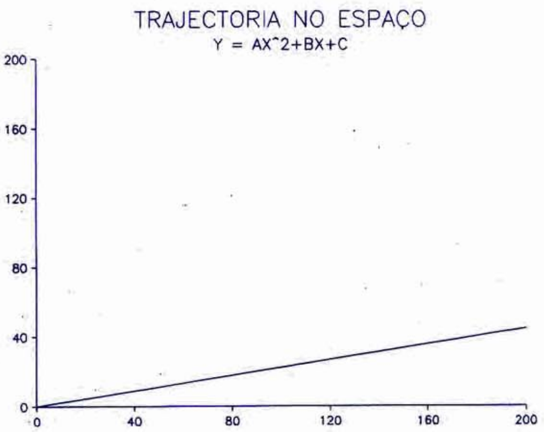
Nesta fase os alunos estabeleceram de imediato um paralelo com o programa «Nave» exclamando:

«Pum!... Grande cratera!»

Um aluno observou inesperadamente que, caso **g** = **0**, então o gráfico X-Y seria uma recta.

Na realidade ele estava a fazer uso exclusivamente da sua intuição para o fenómeno físico do movimento em campos gravíticos de planetas ou satélites (Lua) com menor massa que a Terra. Inclusivamente o aluno tinha a noção de que a aceleração da gravidade na Lua era aproximadamente metade da terrestre. Sem demora experimentou a sua convicta «teoria» fazendo na matriz a = 0, visualizando o gráfico.

A recta lá estava!



Tornámos a fazer **a = –4,9** para continuar no campo gravítico terrestre.

Os alunos demonstraram grande convicção quando previam o tipo de gráfico que iria surgir para cada um dos novos pares de valores (X_0, Y_0), (V_{x_0}, V_{y_0}) que iam introduzindo.

Os gráficos X(t) — linear (2) e Y(t) — parabólico (3) não suscitaram quaisquer dúvidas e tornou-se óbvio para os alunos que a composição vectorial dos movimentos que estes gráficos representavam (segundo duas direcções perpendiculares) correspondia de facto ao movimento real de um projéctil.

Balanço final

Em todas as actividades desenvolvidas, o aspecto mais relevante foi o elevado grau de interesse e motivação que os alunos sempre demonstraram.

Começando com um problema clássico da Física — movimento de foguetões — os alunos formularam hipóteses sobre a trajectória descrita por um foguetão no campo gravítico terrestre e testaram tais hipóteses através da utilização do programa «Nave».

Experimentaram valores, analisaram os resultados dessas experimentações e tentaram de novo.

Esta actuação, tentativa — erro, tem em si mesmo um alto valor educativo. Além disso, na situação em estudo, o aluno não era «obrigado» a encontrar uma única solução para um determinado problema, uma vez que várias soluções eram admissíveis.

Um outro aspecto que se mostrou relevante no decorrer do trabalho foi a iniciativa que os alunos tomaram em determinadas situações, nomeadamente quando consideraram importante redigir um relatório sobre o programa «Nave» e sobre a melhor estratégia de aterrar com sucesso. Passaram então a utilizar o processamento de texto por sua livre vontade e no momento considerado por eles como o mais apropriado (quando não tinham aulas, ou quando saíam mais cedo ou até mesmo nos intervalos).

Por outro lado, a utilização da folha de cálculo electrónica (SC4) possibilitou o estudo comparativo do modelo matemático de um fenómeno físico e de um tema matemático (movimento de projécteis e função quadrática).

Esta fase do trabalho foi talvez uma das mais ricas, na medida em que os alunos viveram uma experiência matemática, num ambiente estimulante (a utilização de um programa profissional como a folha de cálculo constitui por si só um estímulo...).

Tiveram oportunidade de percepcionar a Matemática como uma ciência que se constrói ao alterarem determinados parâmetros e observarem de imediato os resultados dessas alterações.

Os alunos tomaram contacto com problemas reais. Investigaram e descobriram. Discutiram ideias. Formularam e testaram hipóteses. Elaboraram textos e relatórios sobre o assunto. Colaboraram na construção de modelos matemáticos.

Em suma, o processo de aprendizagem desenvolveu-se numa atmosfera estimulante e socialmente saudável despertando nos alunos o sentido de responsabilidade e auto-confiança.

Segundo a opinião dos próprios alunos a Escola deveria proporcionar actividades deste tipo frequentemente.