# Teoria de Jogos: Generalização dos Jogos de Dois Jogadores de Soma Zero

*Maria Cristina Peixoto Matos e Manuel Alberto Martins Ferreira*

No último artigo descrevemos uma série de jogos, nos quais em última análise cada jogador estava, até certo ponto, nas mãos dos outros jogadores. Naqueles jogos existia um ponto de equilíbrio e, portanto cada jogador, se actuasse correctamente, poderia obter o valor do jogo, que era o máximo ao qual poderia aspirar razoavelmente. Os jogos a analisar neste artigo não têm pontos de equilíbrio, e se pretendemos ganhar, a forma de actuar terá que ser vantajosa relativamente à do nosso opositor.

## 1. O jogo do par ou ímpar

Dois jogadores jogam o jogo do par ou ímpar. Este jogo consiste no seguinte:

Um jogador 1 guarda na mão um determinado número de moedas e pergunta ao jogador 2 se o número de moedas que tem na mão é par ou ímpar. Se o jogador 2 acerta recebe 1€ do jogador 1, caso contrário paga ele 1€ ao jogador 1. A figura 1 representa a matriz de payoffs do jogo.

Observando a figura 1, tomando em conta o *Teorema do Minimax*, concluímos que este jogo não tem equilíbrio. Dissemos, quando analisámos os jogos de soma nula, que um equilíbrio é uma condição necessária para que uma combinação de estratégias seja a solução de um jogo e, que se uma combinação de estratégias não é um equilíbrio, então pelo menos um dos jogadores tem incentivos para alterar o seu jogo. Neste jogo podemos observar que nenhuma das combinações das estratégias é um ponto de equilíbrio. O jogo das moedas não pode ser resolvido utilizando o *Teorema do Minimax*.

Como resolver então este jogo? Para isso vamos colocar-nos no papel dos jogadores e analisar a informação que temos sobre o jogo.

Suponhamos que é a vez do jogador 1 jogar. Este só tem duas alternativas: escolher um número par ou um número ímpar. De certo modo esta é a verdade, pois em última análise terá que optar por uma destas duas possibilidades. Mas de outro ponto de vista isto não é verdade. Existem muitos caminhos para chegar à *eleição* final, e ainda que possa parecer que o importante é qual a decisão, a verdade é que a forma de decidir é absolutamente fundamental. Na verdade, o jogador 1 pode sempre escolher uma estratégia pura: *Pares* ou *Ímpares*, mas também pode utilizar um *sorteio* e deixar que um dado ou uma roleta decida por ele. Por outras palavras, pode atirar um dado e se sair seis escolher a estratégia *Pares*, e se sair outro número optar pela estratégia *Ímpares*. A diferença é actuar de forma determinística — *estratégias puras* — ou actuar de forma aleatória — *estratégias mistas*.

Deste ponto de vista, o jogador 1 passa a ter, não duas, mas um número infinito de possíveis estratégias. Pode escolher *Pares* com uma probabilidade $p$, e *Ímpares* com uma probabilidade 1 $p$, com $p$ um número compreendido entre $0$ e $1$. Isto é, $p$ representa o número percentual de vezes em que optaria pela estratégia *Pares* numa partida em que tivesse de jogar um número infinito de vezes. Note-se, no entanto, que as estratégias puras não deixam de ser um caso particular das estratégias mistas. De facto, uma estratégia mista na qual $p = 1$ e $1 - p = 0$ é uma estratégia pura.

Voltando ao jogo, suponhamos que o jogador 1 decidiu jogar *Pares* metade das vezes. Para tal lança uma moeda ao ar e opta por *Pares* de cada vez

| | | Jogador 2 | |
|---|---|---|---|
| | | *Pares* | *Ímpares* |
| *Jogador 1* | *Pares* | -1; 1 | 1; -1 |
| | *Ímpares* | 1; -1 | -1; 1 |

Figura 1.

que saia *cara*. Suponhamos também que o jogador 2 adivinha que $p=0{,}5$, ou que tenha sido mesmo o jogador 1 a dizer-lho. Não há mais nada que o jogador 2 possa averiguar sobre a forma de jogar do jogador 1, entre outras razões porque o jogador 1 tão pouco sabe mais sobre o seu processo de tomada de decisões. E, a menos que o jogador 2 possua poderes de adivinhação não poderá prever o resultado do lançamento da moeda. Se o jogador 1 elege esta estratégia mista, o resultado será independente do que faz o outro jogador, e assim, em média, cada um ganhará a metade das vezes. A solução deste jogo requer que cada jogador lance uma moeda ao ar com uma probabilidade de $0{,}5$ de sair *cara* como iremos ver seguidamente.

## 2. Cálculo de estratégias mistas

Se um ou ambos os jogadores adoptam estratégias mistas os *payoffs* de cada jogador dependem das estratégias puras que existem para poderem ser escolhidas. A quantia que está em jogo para cada jogador quando são utilizadas estratégias mistas recebe o nome de *payoff esperado* e é uma média dos pagamentos das estratégias escolhidas ao longo do jogo. Desta forma o cálculo da solução de um jogo no caso de se utilizarem estratégias mistas, em vez de se utilizarem estratégias puras, é um pouco mais complicado. É suposto encontrar sempre soluções para qualquer jogo de soma zero, mas na prática pode ser complicado.

Para avançarmos na procura da solução do jogo é importante introduzirmos um novo conceito: *Uma estratégia A domina outra B se os payoffs que recebe o jogador com a estratégia A são sempre como mínimo iguais aos que conseguiria com a estratégia B e pelo menos numa alternativa o payoff que recebe com a estratégia A é maior do que o que recebe com a estratégia B. A estratégia A diz-se estratégia dominante e a estratégia B diz-se estratégia dominada.*

Ora, se numa estratégia se recebe sempre um *payoff* menor que noutra, então deverá utilizar-se a estratégia que recebe um *payoff* maior e excluir a estratégia que recebe o *payoff* menor. Assim, neste tipo de jogos, a primeira coisa a fazer é identificar as estratégias dominadas e excluí-las. No nosso jogo podemos verificar que não existe nenhuma estratégia dominante e portanto também não existem estratégias dominadas.

Uma vez eliminadas todas as estratégias dominadas, é possível encontrar com bastante frequência uma estratégia mista que constitua a solução do jogo seguindo a regra: *Escolher uma estratégia mista que proporcione o mesmo payoff médio, independentemente do que faz o opositor*, isto é, escolhe-se uma estratégia mista que proporcione *a média dos payoffs das estratégias escolhidas ao longo do jogo*.

Suponhamos então que o jogador 1 escolhe *Pares* com uma probabilidade $p$ e escolhe *Ímpares* com a probabilidade $1-p$. De forma semelhante, o jogador 2 escolhe *Pares* com a probabilidade $q$ e escolhe *Ímpares* com a probabilidade $1-q$. Consideremos agora os *payoffs* do jogador 1.

Se o jogador 2 jogar *Pares* o *payoff* médio que o jogador 1 consegue é:

$$(-1)\times p+1\times(1-p)=-2\times p+1$$

Se o jogador 2 jogar *Ímpares* o *payoff* médio que o jogador 1 consegue é:

$$1\times p+(-1)\times(1-p)=2\times p-1$$

Para que ambos os *payoffs* médios sejam iguais, tem de se verificar

$$-2\times p+1=2\times p-1\Leftrightarrow p=0,5$$

Invertendo os papéis dos jogadores no raciocínio anterior, concluímos também que o jogador 2 joga *Pares* com a mesma probabilidade com que joga *Ímpares*, isto é, $q=0{,}5$.

Neste processo, cada jogador joga *Pares* com probabilidade $0{,}5$ e *Ímpares* com probabilidade $0{,}5$ e, cada jogador pode esperar nem ganhar nem perder em termos de euros. Este equilíbrio em estratégias mistas mostra que quando se lança a moeda ao ar existe a intenção de utilizar probabilidades de 50% de *Pares* e *Ímpares*, o que faz com que nem se ganhe nem se perca.

Uma vez que as equações só têm uma solução, podemos assegurar que o equilíbrio encontrado é o único em estratégias mistas.

Note que neste jogo, uma vez que o jogador recorre ao *sorteio*, não só pode não perder (quando escolhe $p=0{,}5$), independentemente da forma como joga o seu adversário, como tão pouco pode ganhar, por pior que jogue o seu opositor.

Resumindo, o jogador 1 iniciou o jogo estando à mercê do seu adversário e transformou-o noutro no qual o opositor não exerce nenhum controle sobre o respectivo resultado. Atendendo a que o jogador 2 pode fazer exactamente o mesmo, pode garantir a mesma probabilidade de ganhar. Desta forma, cada um dos jogadores tem na sua mão a possibilidade de limitar os ganhos do seu adversário e portanto também as suas perdas.

## 3. Qual a vantagem das estratégias mistas?

Existem situações em que o equilíbrio de um jogo contempla que os jogadores utilizem estratégias não completamente determinísticas — *estratégias mistas*. Quando um jogador utiliza estratégias mistas actua aleatoriamente. A vantagem da utilização de estratégias mistas é incluir a incerteza no opositor, isto é, um jogador quando joga com estratégias mistas deixa de ser previsível. Embora o objectivo de uma estratégia mista seja manter o adversário no escuro pela imprevisibilidade, ela não implica, de forma alguma, um padrão totalmente aleatório de jogadas. Perante uma situação em que os jogadores utilizem estratégias mistas, cada um deles pode escolher aleatoriamente, em cada jogada, uma estratégia. Desta forma o opositor não sabe prever qual a estratégia adoptada pelo jogador. O problema de cada jogador será então ajustar estas probabilidades de maneira óptima. Matematicamente uma estratégia mista é uma distribuição de probabilidades sobre estratégias puras e é através deste conceito que se consegue resolver um jogo matricial que não possui equilíbrios, pois caso existam, eles são a solução do jogo.

## 4. Qual das caixas fortes assaltar?

Para finalizar lançamos mais um desafio ao leitor. A solução será apresentada no próximo número da revista.

Os fundos de uma empresa estão guardados em duas caixas fortes que se encontram localizadas a uma grande distância uma da outra. Numa das caixas fortes estão guardados 90.000€, enquanto que na outra só estão depositados 10.000€. Um assaltante estabeleceu um plano que consiste em abrir uma das caixa, enquanto que ao mesmo tempo um seu cúmplice faz soar o alarme do outro. Desta forma, ambos os alarmes dos cofres soam em simultâneo. O vigilante só tem tempo para se dirigir a uma das caixas fortes; se opta por ir ver o que se passa na caixa forte que não está a ser assaltada, a empresa perde o montante guardado na outra. Por outro lado, se se dirige para a caixa forte que está a ser assaltada, os ladrões conseguem fugir mas não levam nada. Qual pensa o leitor que seria a caixa que um assaltante sofisticado escolheria? Com que probabilidade? Que deveria fazer o vigilante, e quanto seria *payoff* esperado para o assaltante?


Bibliografia

[1] Bicchieri, Cristina; Jeffrey, Richard; Skyrms, Brian; *The Logic of Strategy*, Oxford University Press, Inc., 1999.

[2] Davis, Morton D.; *Introducción a la Teoría de Juegos*; Tradução espanhola por José Carlos Gómez Borrero; Ciencia e Tecnología, Alianza Editorial, Madrid, 1986.

[3] Dresher, Melvin, *Games of strategy: Theory and Applications*, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1961.

[4] Fudenberg, Drew; Tirole, Jean; *Game Theory*; Cambridge, Mass: Mit. Press, 1991.

[5] Gibbons, Robert; *Game Theory for Applied Economist*; Princeton University Press, 1992.

[6] Luce, Ducan R.; Raiffa, Howard, *Games and Decisions*, New York, John Wiley and Soons, 1957.

[7] Neumann, J. von; Morgenstern, O.; *Theory Of Games and Economic Behaviour*; John Wiley & Sons, Inc; New York, 1967.

[8] Osborne, Martin J.; *An Introduction to Game Theory*; Oxford University Press, 2000.



Maria Cristina Peixoto Matos
Instituto Politécnico de Viseu

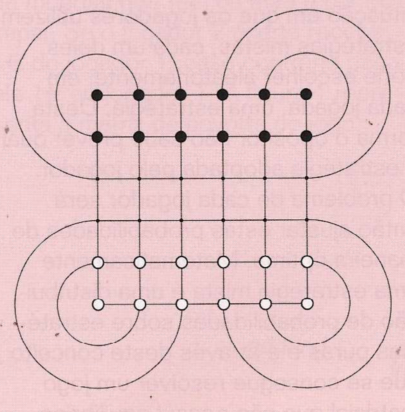
Manuel Alberto Martins Ferreira
Instituto Superior de Ciências do Trabalho e da Empresa


# Surakarta

O Surakarta é um jogo de estratégia abstracta, para todas as idades, fácil de aprender e de duração média.

**Material.** Joga-se entre 2 jogadores, num tabuleiro com uma configuração original, formado por uma grelha de 6x6 pontos ligados ortogonalmente, a que se acrescentam 8 *rotundas* (cada uma corresponde a três quartos de círculo) centradas nos vértices da grelha. São necessárias 24 peças, 12 de cada cor.

É um bom jogo para jogar na praia, desenhando o tabuleiro na areia e usando pedras e conchas.



**Objectivo.** Capturar todas as peças do adversário.

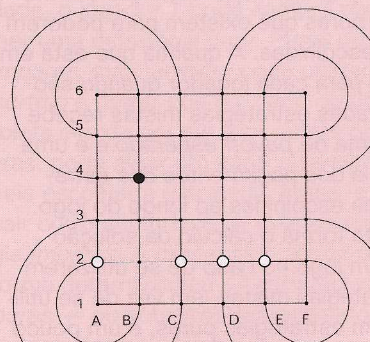
**Abertura.** Cada jogador coloca as suas peças nas duas fileiras de pontos mais próximas de si.

**Desenvolvimento.** Os jogadores jogam alternadamente, fazendo movimentos ou capturas.

- Movimentos: uma peça pode mover-se para uma casa adjacente livre, na vertical, horizontal ou diagonal (para a frente ou para trás).
- Capturas: para efectuar uma captura, deve existir um caminho livre — ou seja, não é permitido saltar sobre peças — entre a peça do jogador e a do adversário através de uma das *rotundas*; a peça atacante só pode percorrer casas na horizontal ou na vertical, podendo viajar sobre tantas *rotundas* e casas livres quanto as necessárias para alcançar a peça do adversário. As capturas não são obrigatórias.

Exemplo. A peça preta pode capturar a peça branca:

- A2, deslocando-se para baixo;
- C2, deslocando-se para a esquerda;
- D2, deslocando-se para a direita;
- E2, deslocando-se para cima (passa por duas rotundas).




**Final.** Vence o jogador que primeiro capturar todas as peças do adversário ou, não havendo mais jogadas possíveis, possuir maior vantagem numérica. Pode registar-se um empate, por exemplo, quando cada jogador possuir uma peça em grupo de anéis distintos.

Se forem jogados vários jogos (em número par, para ambos os jogadores terem a saída um mesmo número de vezes), pode estabelecer-se a seguinte pontuação: no fim de cada jogo, o vencedor pontua o número de peças que ficam no tabuleiro. Ganha quem arrecadar o maior total.

**Nota.** Surakarta é o nome de uma cidade indonésia, na ilha de Java, banhada pelo rio Solo, nome pelo qual a cidade é hoje vulgarmente conhecida.