Para este número seleccionámos dois textos de Miguel Guzmán. O primeiro texto data do ano 2000, tendo constituído a base da intervenção do autor numa mesa redonda realizada em Espanha, no âmbito das comemorações do Ano Mundial da Matemática. Aqui Miguel Guzmán apresenta a sua visão da Matemática e a importância que atribui à Educação Matemática. A rã saltadora é o segundo texto que seleccionámos. Trata-se de um dos capítulos do seu livro Contos com contas, *um bom exemplo da atenção que dedicou à divulgação da Matemática.*

O sentido da educação matemática e a orientação actual do nosso sistema educativo

Miguel de Guzmán

Dos três objectivos da celebração do Ano Mundial da Matemática, expressos na Declaração do Rio de Janeiro, dois deles referem-se muito explicitamente à educação.

O segundo afirma que uma vez que a matemática é uma chave fundamental para a compreensão do mundo e o desenvolvimento integral do ser humano, torna-se essencial que a cultura matemática, bem como o acesso à informação científica, em particular a matemática, sejam bens suficientemente repartidos por todos os países. Uma educação e informação bem desenhadas nos diferentes níveis, são meios necessários para o conseguir.

O terceiro objectivo refere-se à educação matemática da sociedade no seu conjunto. Trata-se no fundo, de que a sociedade tenha uma visão cabal daquilo que a matemática representou e representa no desenvolvimento integral da humanidade. A presença da matemática na sociedade actualmente, costuma ser muito mais ténue do que deveria e por outro lado costuma aparecer distorcida através de falsos estereótipos relativos ao seu carácter, para muitos abstruso e inútil.

Esta visão contrasta fortemente com o que a matemática foi em muitas das etapas mais gloriosas da sua longa história. A matemática, tal como a entendemos e praticamos hoje em dia, nasceu na comunidade científico-religiosa dos pitagóricos, no século VI a.c. e foi concebida como uma via, um método através do qual o homem pudesse aproximar-se da profundidade do universo, o que os pitagóricos designavam como *"raízes e fontes da natureza"*. Naquele tempo, a actividade matemática estava muito longe de ser a mera técnica rotineira para dominar alguns aspectos da nossa envolvente física, na qual em grande parte a convertemos hoje. O que Pitágoras e os pitagóricos começaram a compreender na sua contemplação matemática, tornando-se de tal muito conscientes, foi das harmonias presentes na própria estrutura deste universo em que vivemos. E era nessa contemplação que baseavam a sua própria vida ética e religiosa.

Se o universo todo está construído de forma tão harmoniosa conforme nos apercebemos através do conhecimento matemático, para eles era evidente que a nossa própria vida humana deveria procurar acomodar-se a essa harmonia, em primeiro lugar comtemplando-a e depois respeitando-a e favorecendo-a, tanto nos seus aspectos físicos mais externos como também nos mais especificamente humanos, através do respeito especial em relação aos seres vivos e muito particularmente através das relações mútuas com os outros seres, tanto humanos como divinos. A prática matemática foi de certo modo, entre os pitagóricos, um guia de contemplação e de comportamento. Uma boa lição de humanismo ecológico que infelizmente desaproveitámos, convertendo em grande parte a educação matemática, numa rotina de certo modo vazia, as aulas dos nossos jovens, precisamente quando seria mais necessário fazer uso da capacidade formativa e integradora da prática matemática.

No entanto, é claro que a matemática também foi e deve continuar a ser uma ciência em busca da verdade, uma ferramenta que vem em auxílio de todas as outras ciências e actividades do homem, uma actividade criadora de uma beleza *apenas acessível aos olhos da alma*, como dizia Platão. E para que nos tornemos eficientes nestes aspectos da matemática, é evidentemente necessário adquirir um domínio básico inicial das suas ferramentas mais essenciais.

Esta visão ampla da actividade matemática, devia transformar a educação matemática, de rival em perpétua competição com a educação humanística — como é entendida por muitos — no aliado educativo valioso que foi na prática dos mais destacados pensadores da nossa civilização. Estas facetas profundamente humanas da matemática são as que deveriam fazer dela um dos grandes eixos do nosso sistema educativo, se fossemos capazes de preparar os nossos professores dos diversos níveis para tal tarefa e de orientar convenientemente os nossos programas educativos.

Porque, por outro lado, a própria natureza da actividade matemática, é capaz de estimular alguns dos aspectos éticos importantes que uma educação moderna deveria contemplar como objectivos, conforme procurarei evidenciar sucintamente, em seguida.

A raíz do caracter envolvente da matemática inclusivamente sobre os aspectos éticos do seu comportamento, reside na sua própria natureza. A matemática é uma exploração de certas estruturas omnipresentes e mais ou menos complexas que aparecem na nossa realidade e que admitem essa aproximação racional, manipulável mediante símbolos, que confere às nossas mãos um certo domínio da realidade a que se referem e a que chamamos matematização. A matemática aproxima-se da multiplicidade das coisas e cria a aritmética, aproxima-se das formas e origina a geometria, explora o próprio símbolo surgido na mente e faz nascer a álgebra, analisa as alterações e transformações e faz surgir a análise matemática, …

Nesta actividade, a obrigação da mente humana consiste em interpretar racionalmente, o melhor que pode, umas realidades, uns factos, que se apresentam como dados, como prévios. Isto constitui uma das experiências profundas que todos os matemáticos vivem nas suas tarefas comuns: compreender que estão a seguir marcas que de certa forma estão a guiá-los no seu trabalho. Esta submissão à verdade e à realidade, que está normalmente tão enraizada no cientista, constitui sem dúvida uma das características mais importantes que deveríamos apreciar e estimular em todos nós. E esta busca da verdade, como é o caso, constitui um dos traços típicos do cientista, e muito particularmente do matemático, para quem costuma ser bem mais claro do que para os outros cientistas, quando uma situação é uma hipótese de trabalho e quando passou a ser uma verdade incontroversa. A agradável aceitação desta verdade, seja quem for que a tenha encontrado e quer contradiga ou não as expectativas prévias, é outra das características de generosidade que se dão no trabalho matemático. O prazer da contemplação da verdade e da partilha com outros da beleza que costuma resultar da sua contemplação, é o prémio que o matemático recebe dessa atitude aberta e generosa.

O sentimento de profunda humildade perante a imensidão de verdades ainda por descobrir, é outra das atitudes éticas importantes que a matemática pode estimular. Newton exprimiu-o em belas palavras: *"Não sei o que a posteridade pensará de mim, mas parece-me que fui um menino a brincar à beira-mar, divertindo-se a encontrar de vez em quando um godo mais liso ou uma concha mais bonita que de costume, enquanto que o grande oceano da verdade permanece por descobrir perante mim"*.

A actividade matemática faz-nos sentir, mais do que em qualquer outra ciência, próximos de todos os que trabalham com entusiasmo nas nossas próprias tarefas, tanto os da actualidade como os nossos mais afastados antecessores. Os teoremas que foram demonstrados pelos babilónios ou pelos antigos gregos, continuam a ser tão válidos hoje como então. O trabalho matemático é tarefa comum e participada. O próprio Newton dizia: *"Se alguma coisa consegui, foi porque me apoiei em ombros de gigantes"*.

Portanto, do ponto de vista da matemática poderemos aprender a compreender muito claramente esta responsabilidade comum de fazer progredir a nossa cultura.

A matemática baseia-se na sua própria essência, no consenso. Os seus próprios inícios chamam-se postulados e as definições dos novos objectos que se vão introduzindo também são convenções. É sobre eles que assenta a totalidade do edifício que vamos construindo. A aceitação do consenso é uma outra das atitudes importantes na nossa sociedade que a matemática é capaz de fomentar.

A matemática é consenso, é submissão à realidade, mas é também e de uma forma muito importante, liberdade criativa. Como Georg Cantor, o criador da teoria de conjuntos afirmava solenemente no início do século 20, *"a essência da matemática é a liberdade"*. É que, do mesmo modo que o artista que pretende exprimir aos outros uma vivência, uma visão muito especial que tem, também o matemático dispõe de muitos procedimentos possíveis para o fazer. A matemática é sem dúvida descoberta, mas também criação livre, aventura.

Tudo isto representa um grande repto para um sistema educativo que pretende ser actual e eficiente. Na minha opinião, que considero partilhada por uma grande parte da comunidade matemática espanhola, existem muitos elementos na actual estrutura do nosso sistema educativo, que impedem que os nossos jovens recebam na sua educação matemática, os grandes benefícios que esta lhes pode proporcionar. Enunciarei em seguida alguns que provavelmente se tornarão mais explícitos no decorrer desta mesa redonda.

1. A formação em conteúdos matemáticos e em métodos de didáctica propriamente matemática que actualmente recebem os professores do ensino primário, por diversos motivos, é insuficiente para o posterior exercício das suas funções, inclusivamente para desenvolver os relativamente pobres objectivos actuais, quanto mais para os que assinalei antes.
2. A formação de professores do ensino secundário e também a dos professores do ensino superior, fundamentalmente centrada nos conteúdos e saberes propriamente matemáticos, omite muitos dos aspectos que têm que ver com essa visão integral da matemática da qual eles próprios deviam estar imbuídos e descuida os conhecimentos e atitudes necessárias para que sejam capazes de estimular uma correcta aprendizagem nos seus alunos.

3. O tempo dedicado pelos nossos estudantes nos primeiros níveis, primário e secundário, ao estudo da matemática, é, em minha opinião, muito insuficiente. Estamos a esquecer-nos de que os dois eixos em torno dos quais deve girar a formação actual dos nossos mais jovens são a língua e a matemática, como sucede nos países cientificamente mais avançados à nossa volta. A matemática, como disciplina claramente acumulativa, precisa de tempo suficiente para a aquisição das ferramentas básicas. Sem um domínio satisfatório delas, é impossível conseguir apreciar o seu papel na nossa cultura actual. É muito desejável, para aproveitar o papel integrador da matemática, ir além das meras considerações técnicas e rotineiras, mas é claro que, sem um mínimo de conhecimentos básicos nunca o conseguiremos. Além de que os elementos meramente rotineiros, com o tempo, convertem-se em bagagem útil em si mesmos.
4. A extensão da educação obrigatória até aos 16 anos, constitui claramente um progresso exigido pela sociedade e pela envolvente em que a nossa sociedade está imersa. Mas é claro que para realizar esta mudança de forma satisfatória não é suficiente aumentar e redistribuir o número de centros e de professores, mas antes efectuar uma reforma muito mais radical da organização do sistema secundário e dos próprios programas, com especial atenção à enorme heterogeneidade de alunos, com interesses muito diferentes, os quais, nem professores nem programas estão preparados para ter em atenção.

Em todos os aspectos assinalados, a comparação das estruturas educativas do nosso país com as vigentes em outros países vizinhos, manifesta claramente as carências com que nos debatemos. Estamos assim a pôr em perigo, não só a eficácia do nosso sistema educativo na direcção correcta, ou seja, em direcção à formação integral apropriada dos nossos jovens, mas também o desenvolvimento das capacidades do nosso potencial industrial e tecnológico.

Tradução
Susana Diego

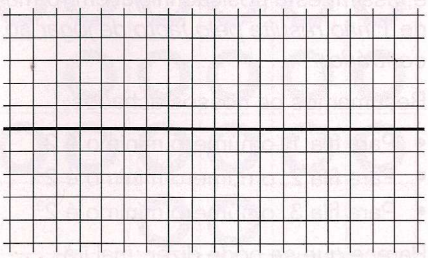
Nota

Este texto encontra-se disponível em espanhol em http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman/

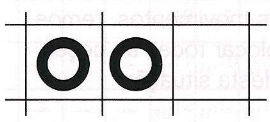
A rã saltadora

Miguel de Guzmán

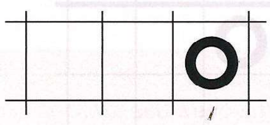
Talvez conheças o jogo da *rã saltadora*. Se não conheces, tanto melhor. Para o jogar podes traçar num papel bem grande uma rede de quadrículas grandes onde caibam uma moeda de 1€ ou de 2€. Na rede traça uma linha horizontal grossa a cinco quadrículas da linha horizontal superior. Algo do tipo:



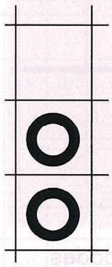
O jogo consiste no seguinte. Colocas ao princípio um número de moedas, o que quiseres, distribuídas como te parecer melhor, cada uma numa quadrícula abaixo do traço grosso. Uma vez colocadas, vais começar a mover e retirar moedas do tabuleiro. Podem-se mover só horizontalmente (para a direita e para a esquerda) e verticalmente (para cima) saltando por cima de outra contígua sempre que a quadrícula para que se salta está vazia, comendo (retirando) a moeda sobre que se saltou. Por exemplo, desta situação



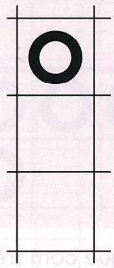
pode-se passar a



ou desta

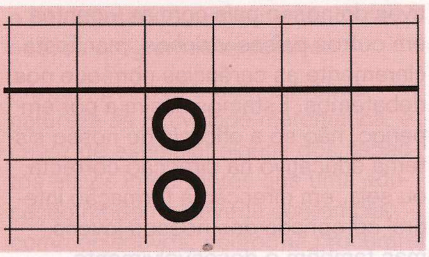


a esta



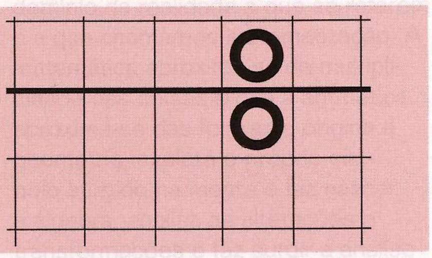
Trata-se de colocar ao princípio as moedas debaixo do traço de modo a conseguir colocar uma moeda com os movimentos permitidos o mais alto possível acima do traço grosso. Quando tiveres praticado um pouco, podes tratar de o fazer com o mínimo número de moedas.

Por exemplo, para chegar à primeira fila por cima do traço grosso é claro que só com uma moeda não o consegues (não te permite nenhum movimento) mas com duas colocadas assim

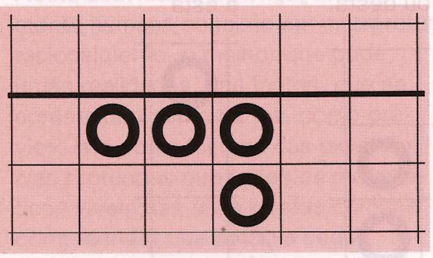


já o podes fazer. O número mínimo de moedas suficiente para colocar uma na primeira fila de cima é 2. Começa a trabalhar. Como chegar à fila 2? Qual será o número mínimo? E à fila 3,4 etc.? Não quero tirar-te o gosto de o fazeres sozinho. Fecha a revista e só depois de teres jogado um bocado vem ter comigo outra vez.

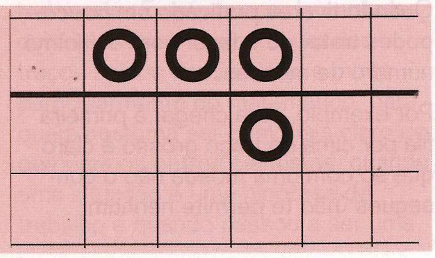
Depressa terás descoberto que para pôr uma moeda na fila 2 tens que chegar a esta situação.



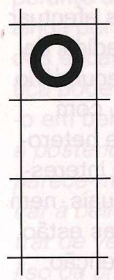
Para chegar a ela é-te suficiente colocar quatro moedas nesta situação.



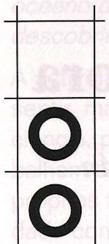
É fácil ver que com três não podes chegar à segunda fila. *Para chegar à fila 2 o número mínimo suficiente é 4.* E para a fila 3? O ideal seria colocar inicialmente as moedas de modo que possamos chegar à posição



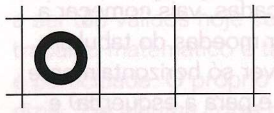
ou à sua simétrica, pois assim já sabemos que podemos subir duas filas mais. Como podemos fazê-lo? Como as coisas se vão complicando mais, o melhor é tratar de inventar um modo sistemático de proceder. *Este pode ser um bem razoável: jogar para trás.* Isto é, a nossa rã vai-se mover para a segunda quadrícula em baixo ou para a segunda quadrícula à direita ou à esquerda, pondo uma moeda na quadrícula imediata da mesma direcção, supondo sempre que esta esteja livre. Quer dizer, desta situação



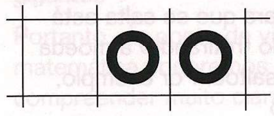
pode-se passar a esta



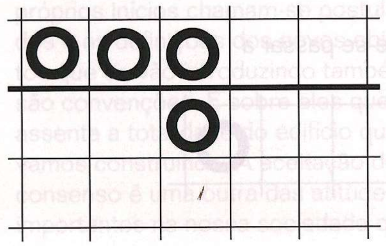
e desta



a esta

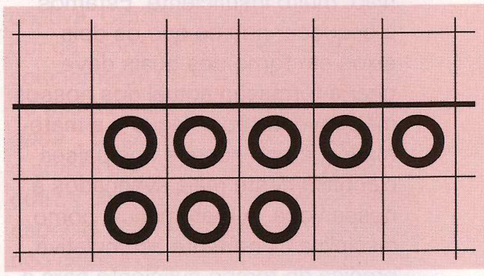


Mediante estes movimentos, temos de tratar de colocar todas as peças que resultam desta situação



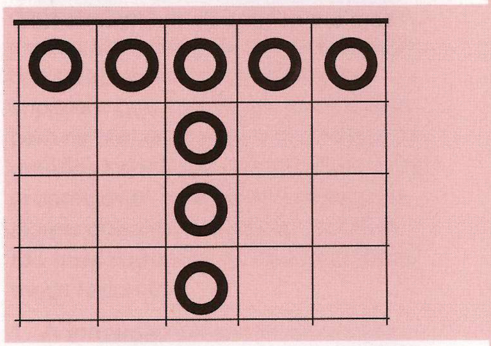
debaixo da linha grossa.

Se te exercitares um pouco com este sistema, verás que chegas em seguida a esta situação

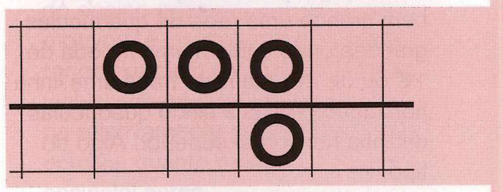


desde que, jogando a direito, passas a terceira fila. São oito moedas. Podes demonstrar que não se consegue fazer com menos?

É curioso observar que à terceira fila se pode chegar também a partir da situação seguinte, também de oito moedas,



sem necessidade de passar pela situação intermédia correspondente ao salto até à segunda fila de cima



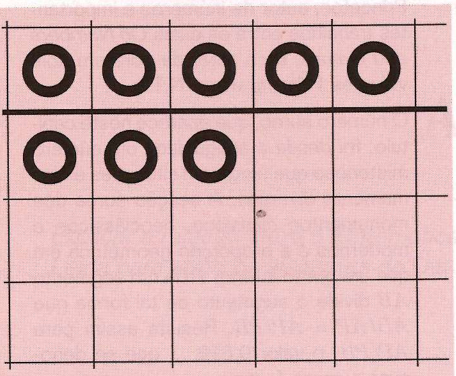
e, assim, esta posição inicial em forma de T *não resulta pelo facto de jogar ao contrário.*

Resumamos os nossos achados:

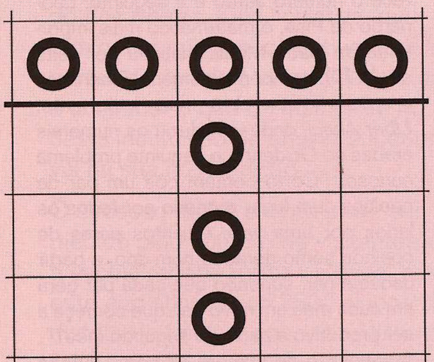
- Para fila 1, o número mínimo é 2.
- Para fila 2, o número mínimo é 2^2.
- Para fila 3, o número mínimo é 2^3.

Parece que se pode dizer: mal irá se para a fila 4 não for 2^4 o número mínimo, não é assim?

Pois, por mal que pareça, assim sucede. Para chegar à fila 4 será suficiente (não necessário, em princípio, como vimos que sucedia com a fila 3) partir de uma situação inicial da qual possamos chegar a uma das posições



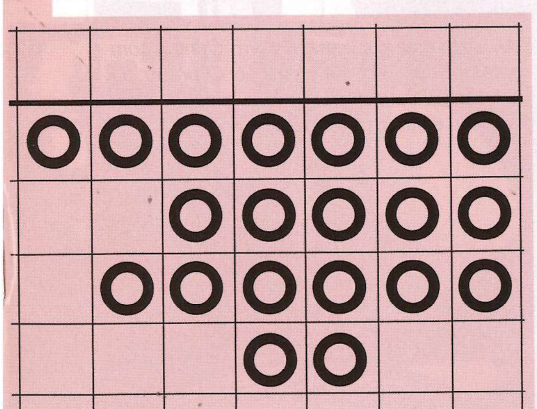
A



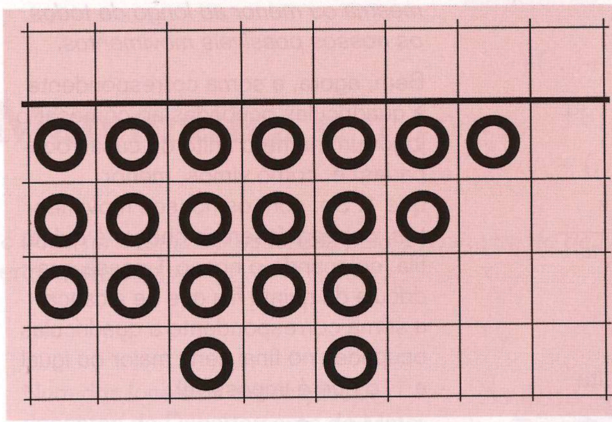
B

ou, naturalmente, à simétrica da primeira.

Jogando ao contrário e com certo cuidado para não introduzir fichas supérfluas, verás que a situação *A* e a situação *B* te podem levar à situação inicial seguinte



Mas a situação *A* pode-te levar também, jogando ao contrário, a esta,



que é distinta da anterior, mas ambas têm 20 moedas. Poder-se-á chegar com menos? Porque não tentas? E para a fila 5? Adiante. Verás que com menos de 20 moedas não consegues chegar à fila 4. Para a fila 4 o número mínimo é 20, o que ensina que não nos devemos fiar demasiado em induções prematuras.

E para a fila 5? Já não pisamos terreno firme para fazer uma conjectura.

Pois bem, mesmo que possa parecer surpreendente, à fila não se pode chegar com nenhum número de fichas, coloquem-se elas onde se quiser.

–	–	–	w^4	w^3	w^2	w	1	w	w^2	w^3	w^4	–	–	–	
–	–	–	w^5	w^4	w^3	w^2	w^1	w^2	w^3	w^4	w^5	–	–	–	
–	–	–	w^6	w^5	w^4	w^3	w^2	w^3	w^4	w^5	w^6	–	–	–	
–	–	–	w^7	w^6	w^5	w^4	w^3	w^4	w^5	w^6	w^7	–	–	–	
–	–	–	w^8	w^7	w^6	w^5	w^4	w^5	w^6	w^7	w^8	–	–	–	
–	–	–	w^9	w^8	w^7	w^6	w^5	w^6	w^7	w^8	w^9	–	–	–	
–	–	–	w^{10}	w^9	w^8	w^7	w^6	w^7	w^8	w^9	w^{10}	–	–	–	
–	–	–	w^{11}	w^{10}	w^9	w^8	w^7	w^8	w^9	w^{10}	w^{11}	–	–	–	
–	–	–	w^{12}	w^{11}	w^{10}	w^9	w^8	w^9	w^{10}	w^{11}	w^{12}	–	–	–	
–	–	–	w^{13}	w^{12}	w^{11}	w^{10}	w^9	w^{10}	w^{11}	w^{12}	w^{13}	–	–	–	

A demonstração seguinte deve-se a John Conway de Cambridge[1]. Tomamos o número positivo w tal que $w^2 + w = 1$. Misterioso, não é? Pois resulta que, para maior desconcerto, w é o número áureo[2] $\varphi > 0$ tal que

$$\frac{\varphi}{1} = \frac{\varphi + 1}{\varphi}$$

Ponhamos em cada quadrícula do nosso tabuleiro, indefinidamente prolongado para abaixo e para a direita e a esquerda, uma potência de w tal como te indico na figura seguinte.

Observa agora os dois factos seguintes:

a) A soma de todos os números que figuram abaixo do eixo é

$$S = (w^5 + w^6 + w^7 + \ldots) +$$
$$+2(w^6 + w^7 + \ldots) +$$
$$+2(w^7 + w^8 + w^9 + \ldots) + \ldots =$$
$$= \frac{w^5}{1-w} + 2\frac{w^6}{1-w} +$$
$$+2\frac{w^7}{1-w} + \ldots$$

e como $1 - w = w^2$, resulta

$$S = w^3 + 2w^4 + 2w^5 + \ldots =$$
$$= (w^3 + w^4 + w^5 + \ldots) +$$
$$+(w^4 + w^5 + w^6 + \ldots) =$$
$$= \frac{w^3}{1-w} + 2\frac{w^4}{1-w} = w + w^2 = 1$$
$$S = 1$$

Assim, *a soma dos números correspondentes a um número finito de quadrículas é estritamente menor do que 1.*

b) Interpretemos agora os nossos movimentos permitidos com as moedas em relação a estes números do modo seguinte. Somemos os números correspondentes a estas quadrículas do tabuleiro ocupadas por moedas antes e depois do movimento. Por exemplo,

w^8	w^7	w^6

ANTES

w^8	w^7	w^6

DEPOIS

$$w^8 + w^7 = w^6$$

Outro caso

w^{10}	w^9	w^8

ANTES

w^{10}	w^9	w^8

DEPOIS

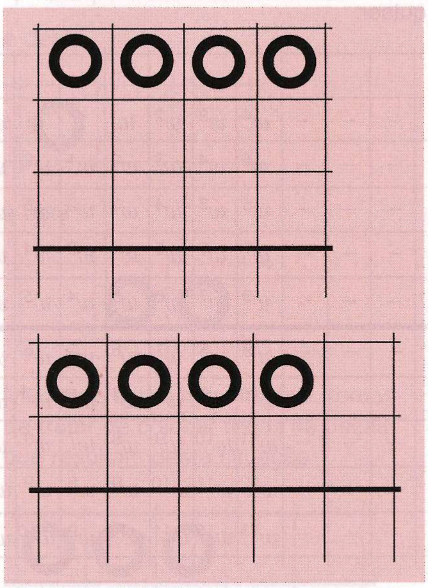
$$w^9 + w^8 = w^7 > w^{10}$$

Este facto, como facilmente perceberás, é geral, quer dizer, *a soma correspondente a quadrículas ocupadas é a mesma ou menor ao longo de todos os nossos possíveis movimentos.*

Bem, agora, a soma correspondente a quadrículas ocupadas ao começar o jogo (um número finito de casas ocupadas) é, como vimos, menor que 1. Se, com os nossos movimentos, conseguíssemos chegar à quinta fila, colocando o nosso 1 nessa quadrícula da quinta fila que se alcança, a soma correspondente a quadrículas ocupadas no final seria maior ou igual a 1, o que é impossível.

A ideia de Conway é muito engenhosa. Porque não tratas de a explorar para aclarar algumas das perguntas que ficaram por colocar? Um pouco de álgebra ajudar-te-á.

1) Demonstra que, efectivamente, o número mínimo de moedas para chegar à fila 3 é 8 e para a fila 4 é 20. Este último não é fácil;
2) Investiga se as únicas posições iniciais para chegar à fila 3 e 4 são as assinaladas e suas simétricas.
3) Põe a ti próprio outros problemas semelhantes, como, por exemplo, se se pode, e como, chegar às situações



E pedir-te-ia que me escrevesses se tens alguma ideia inspiradora sobre toda esta embrulhada. Obrigado.

Notas

1 John H. Conway, reputado matemático, actualmente na Universidade de Princeton, autor de inúmeros e importantes trabalhos entre os quais *On Numbers and Games*, e co-autor da obra em dois volumes *Winning ways* (N.T.).

2 O número áureo, que aparece neste capítulo, foi desde a antiguidade um número misterioso que surge em situações extremamente diversas. A secção áurea dos monumentos clássicos, neoclássicos e modernos é a proporção geométrica em que um ponto interior P de um segmento AB divide o segmento de tal forma que $AB/AP = AP/PB$. Resulta assim para AP/PB o valor 0,618 ... que se denomina número áureo.

Uma das situações curiosas em que aparece o número áureo é a seguinte: Leonardo de Pisa, o matemático mais importante da Idade Média (nasceu por volta de 1170), também chamado Fibonacci, propôs na sua obra mais importante, *Liber Abaci*, onde introduziu os numerais árabes no Ocidente, o seguinte problema curioso: "Certo homem pôs um par de coelhos num lugar rodeado por todos os lados por uma vala. Quantos pares de coelhos serão gerados num ano, a partir daquele par, supondo que cada par gera em cada mês um novo par, que começa a ser produtivo a partir do segundo mês?". A sucessão do número de pares que há em cada um dos meses sucessivos, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ..., em que cada termo é a soma dos dois anteriores, denomina-se *sucessão de Fibonacci.* Pois bem, a razão entre cada termo da sucessão de Fibonacci e o seguinte aproxima-se cada vez mais do número áureo (o limite desta razão é precisamente o número áureo).

Nota

Este texto está publicado no livro *Contos com contas* pp. 99–111 da colecção *O prazer da Matemática* da editora Gradiva, a quem agradecemos a autorização para reproduzir.