Travessia discreta do deserto

Eduardo Veloso, colaborador do Projecto Minerva

Antecedentes

Tudo começou com o problema *A Travessia do Deserto:*

Um homem tem de atravessar um deserto para entregar uma mensagem. Atravessar o deserto demora 9 dias. Um homem pode transportar consigo comida suficiente para 12 dias. No local onde será entregue a mensagem não existe hipótese de obter alimentos. Dois homens estão disponíveis para a missão.

Poderá a mensagem ser entregue e ambos os homens regressarem ao ponto de partida sem que lhes falte a comida? (Há possibilidades da comida ser enterrada na ida e desenterrada na volta). (in Bernardes, Odete e Teixeira, Paula. *Jogos, Enigmas, Problemas.* Associação de Professores de Matemática; Lisboa, 1987)

(Atenção: vou dar a solução do problema; se quer resolvê-lo, não leia já o parágrafo seguinte!)

A solução apresentada no fim do mesmo livro para este problema é a seguinte: partem os dois homens com 12 dias de comida cada um; ao fim de três dias, um deles regressa ao ponto de partida, e portanto apenas gasta ao todo seis dias de comida; dos restantes seis, entrega três ao companheiro e enterra os outros três; então o companheiro fica com 12 dias de comida, seis para ir até ao ponto onde tem de entregar a mensagem e seis para regressar; depois desenterra os três dias de comida e pode assim voltar ao ponto de partida.

Nos números 5 e 6 de Educação e Matemática apareceram dois artigos que abordavam este problema.

No primeiro, a nossa colega Ana Baltazar tentava generalizar o problema para um número de homens maior do que dois, para responder à variante 1 proposta no mesmo livro:

Qual poderá ser a extensão do deserto se 3 homens (4 homens, 5 homens, etc.) estiverem disponíveis para entregar a mensagem?

Ana Baltazar considerava que todos os homens *voltariam para trás ao mesmo tempo*, ligava o problema ao estudo das sucessões e concluía que, se o número de homens tendesse para $+\infty$, a extensão possível do deserto tendia para 12. A redacção de Educação e Matemática lançava, no fim do artigo, um desafio aos leitores: estudar o mesmo problema com outras estratégias para a utilização dos carregadores. As alunas do 12.º ano da Esc. Secundária de Benfica Cláudia Peça e Ana Santos, sob sugestão da professora Leonor Vieira, estudaram o problema, procuraram uma estratégia mais conveniente e, utilizando ainda as sucessões, chegaram à seguinte conclusão, que expõem no seu artigo *o deserto pode ter qualquer extensão desde que haja um número suficiente (sempre finito) de homens.* Por meio de um programa em BASIC, apresentado no mesmo artigo, torna-se possível e prático calcular o número de acompanhantes que o mensageiro deve ter para realizar uma travessia de determinado número de dias.

Ficou assim completamente resolvido o problema e a sua variante n.º 1 e note-se desde já que, neste artigo, nada de realmente novo se acrescenta à solução encontrada.

Nova exploração do mesmo problema

De acordo com o princípio de que um problema não se esgota quando apenas lhe encontramos a solução, o objectivo deste artigo é apresentar um modo de atacar este problema que está próximo dos métodos próprios da Matemática Discreta, isto é, da Matemática do finito, dos conjuntos finitos, por oposição à Matemática do contínuo, em que se torna necessário recorrer em geral aos métodos poderosos da Análise. Na realidade, o que este problema nos põe é uma simples (?) questão de organização de um número finito de operações (caminhar, trocar comida, enterrar comida), efectuadas por um número finito de homens, de modo a optimizar a sua sequência com o objectivo de que um dos homens possa caminhar o maior número possível de dias.

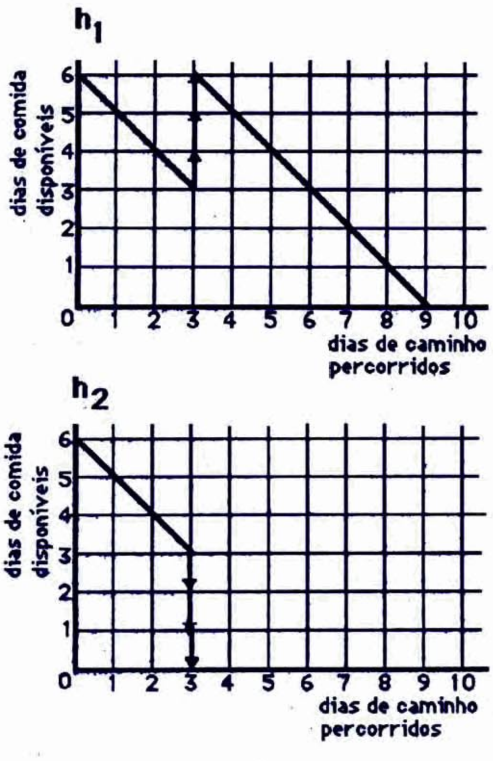
Simplificação do enunciado

A possibilidade de enterrar comida para o regresso é, sem dúvida, uma condição essencial no enunciado do problema. Mas será possível enunciar o problema de outra forma equivalente mas sem essa complicação adicional? Em termos mais precisos, o que quero dizer é o seguinte: será possível encontrar um 'modelo matemático' mais simples para a mesma situação concreta?

A minha proposta é que se substituam as três condições:
(i) cada homem só pode carregar em cada momento comida para doze dias
(ii) pode enterrar comida para a volta
(iii) tem que regressar ao ponto de partida, pelas duas condições equivalentes:
(j) cada homem só pode carregar em cada momento comida para seis dias
(jj) não tem que regressar ao ponto de partida

Mas serão mesmo equivalentes? Equivalentes aqui significa *darem as mesmas possibilidades de percorrer distâncias no deserto.* Note-se que, *em cada momento*, tanto dá que um homem tenha comida para avançar um dia e recuar outro ou para apenas avançar um dia, *desde que a comida para avançar um dia, no segundo caso, seja igual, do ponto de vista das possibilidades de transporte, à comida para andar dois dias no primeiro caso.*

Mas isto é precisamente o que implica a condição (j), ao permitir apenas o transporte de comida para seis dias e não para doze, como (i). Por outro lado, quando um homem, no primeiro conjunto de condições, dá dois dias de comida a outro, um para caminhar para a frente, outro para enterrar para a volta, isso é precisamente equivalente a dar-lhe um dia de comida no segundo conjunto de condições, que lhe permitirão avançar um dia, pois agora ele não tem que regressar. Note-se ainda que a vantagem de, no primeiro conjunto de condições, a comida estar mais desdobrada, em doze partes e não apenas em seis, é apenas aparente, pois no primeiro caso o gasto de um dia de comida *implica necessariamente o gasto de outro para o regresso*, pelo que a comida é sempre gasta *aos pares de dias*.

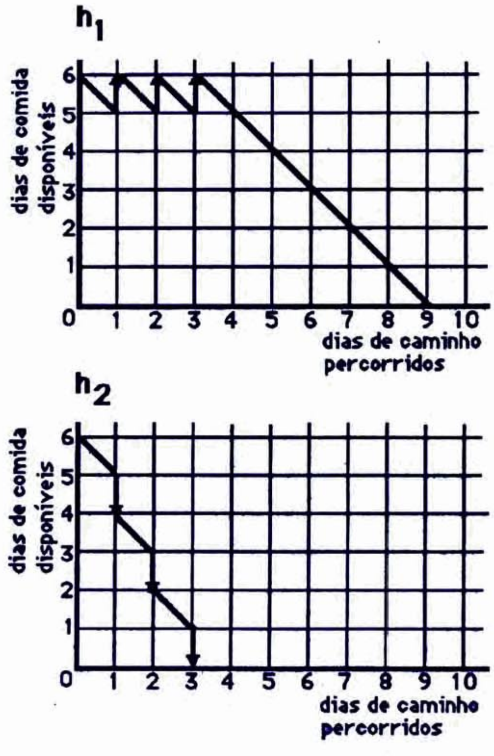


estratégia α

Pois bem, sendo os dois conjuntos de condições equivalentes (1), o segundo é preferível porque conduz a um raciocínio bem mais simples e uniforme: se um dos homens tem **n** ($n \leqslant 6$) dias de comida em dado momento, então poderá avançar **n** dias ou dar **m** ($m \leqslant n$) dias a outro e avançar **n-m** dias.

No caso do problema posto inicialmente, uma solução (estratégia α) pode ser apresentada de modo muito claro: havendo dois homens (h_1 e h_2), ao fim de três dias ambos têm três dias de comida; h_2 dá os seus três dias a h_1 e pára, enquanto h_1, agora com seis dias de comida, pode ainda andar mais seis dias, completando os nove necessários. Note-se que outra solução (estratégia β) conduzindo ao mesmo resultado consiste em h_2, no fim de cada dia, dar sempre um dia de comida a h_1: nestas circunstâncias, h_1 parte sempre em cada dia com seis dias de comida, mas ao fim do terceiro dia h_2 dá-lhe o seu último dia de comida e é obrigado a parar. Usaremos um esquema para facilitar a visualização destas duas estratégias.

Adoptaremos a estratégia β, pois é aquela que é facilmente generalizável a mais do que dois homens. Designaremos os homens por h_1, h_2, h_3, ..., h_j, ... (sendo em todos os casos h_1 aquele que entrega a mensagem). Ao fim de cada dia são feitas *todas as transferências de comida possíveis*. As transferências executam-se sempre do carregador h_i para o carregador h_{j-1} (com $i>1$). Assim, como se pode constatar num dos esquemas seguintes, quando há três homens, ao fim do pri-



estratégia β

meiro dia de marcha existem 15 (3x(6–1)) dias de comida disponíveis, e as transferências possíveis a fazer são:

— h_2 dá um dia de comida a h_1 (que fica com seis dias de comida);

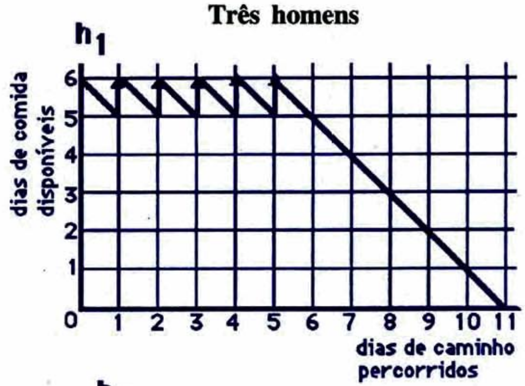
— h_3 dá dois dias de comida a h_2 (que fica com seis dias de comida);

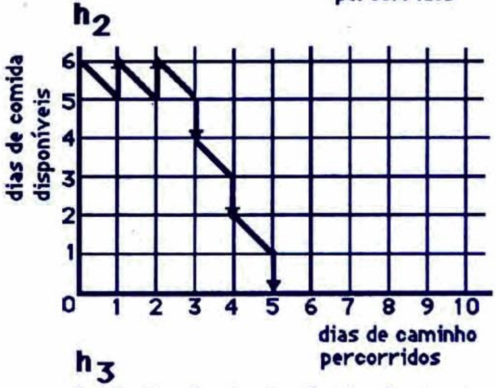
— h_3 ficará então com dois dias de comida.

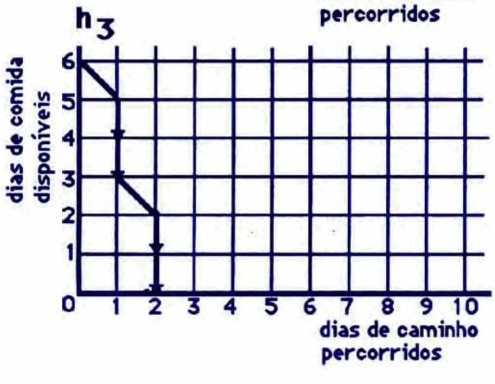
Visto de outro modo, o processo consiste simplesmente em dividir, ao fim de cada dia, o número total de dias de comida disponíveis por 6 (obtendo **q** por quociente e **r** por resto), e distribuir seis dias de comida a $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$, ..., $\mathbf{h_q}$ e **r** dias de comida a $\mathbf{h_{q+1}}$. Mais nenhum homem tem comida para prosseguir a marcha, e mesmo só interessa que $\mathbf{h_{q+1}}$ prossiga se **r** for maior do que um.

Nos esquemas seguintes estão exemplificados os casos referentes a três e quatro homens.

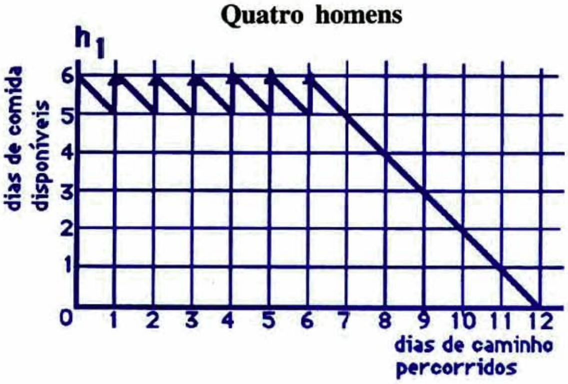
Três homens

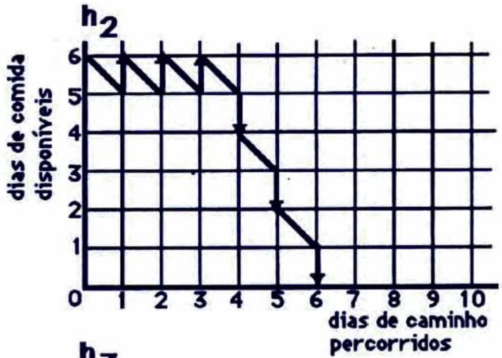


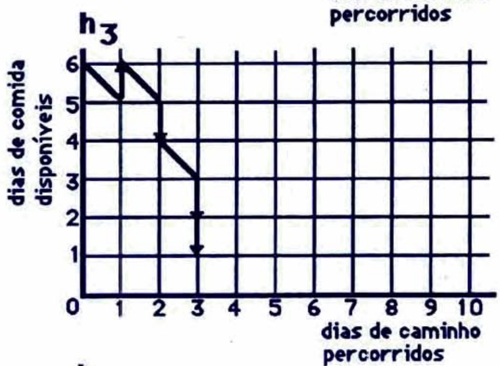


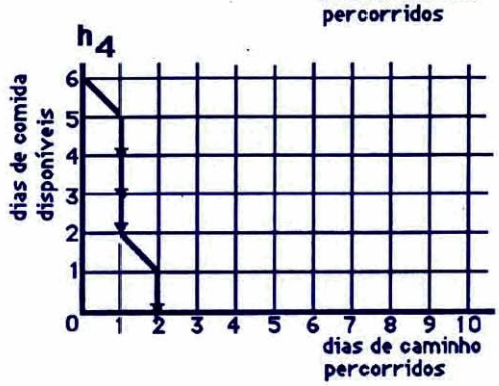


Quatro homens









Vê-se imediatamente que com esta estratégia quatro homens chegam para levar a mensagem a doze dias de distância — conclusão de resto perfeitamente coincidente com a das alunas da Escola Secundária de Benfica.

Com paciência e perseverança poderemos determinar, através de esquemas ou cálculos análogos, a distância, em dias de marcha, a que um dado grupo de homens poderá levar uma mensagem. Mas como muito bem mostraram, perder a paciência e não ter perseverança são por vezes «virtudes» que levam a bons resultados — naquele caso dois programas em BASIC. Como não morro de amores pelo BASIC, fiz um programa em LOGO a partir do algoritmo que descrevi para a resolução do problema geral da travessia do deserto. Quem estiver interessado, encontra-o na secção LOGO.MAT desta revista.

---

(1) Tudo leva a crer que os dois conjuntos de condições são equivalentes, mas ignoro como poderia ser feita uma demonstração mais convincente.