O (re)encontro inicial

Arsélio Martins

Do reconhecimento da dificuldade, …

Em todas as transições há sérios problemas de adaptação dos estudantes. Assim acontece com a transição do ensino secundário para o ensino superior, como acontece com a transição do 1º para o 2º ciclo, do 2º para o 3º, e, deste último para o ensino secundário. Acrescentam-se às dificuldades normais das radicais mudanças de idade física e mental, as dificuldades que resultam das exigências de novos comportamentos sociais e escolares e da capacidade de mobilizar adequadamente os conhecimentos e as técnicas adquiridas a novos contextos e necessidades. O estudante jovem pode não reconhecer os conceitos, que adquiriu antes nos novos contextos de ensino e aprendizagem, nos discursos dos professores ou nos manuais. Como se o que aprendeu num ciclo não tivesse qualquer utilidade e tivesse de rejeitar o que antes soube. Esta situação é criada e alimentada por discursos e práticas escolares de professores e pais, como se fosse preciso sinalizar de forma dramática cada nova etapa de crescimento.

A ideia de introduzir um módulo inicial para *afagar* a esquina da mudança aparece-nos como uma necessidade trivial tanto para professores como para estudantes. De facto, os assuntos tratados no início do 10º ano não podem mobilizar senão o que se sabe, permitindo ao estudante fazer a ponte entre o que aprendeu e o que vai aprender e ao professor começar por respeitar o aprendido e remediar, localizando sempre no passado, as falhas em aprendizagens necessárias e úteis para prosseguir os estudos. Tais falhas não podem ser atribuídas por completo aos estudantes, antes têm origem em deficiências do sistema escolar, no que respeita ao cumprimento de programas específicos e, em geral, à falha nos métodos de estudo e motivação, para além da falta de intervenção no nível social e familiar.

A ideia de introduzir um módulo inicial para *afagar* a esquina da mudança aparece-nos como uma necessidade trivial, os assuntos tratados no início do 10º ano não podem mobilizar senão o que se sabe, permitindo ao estudante fazer a ponte entre o que aprendeu e o que vai aprender e ao professor começar por respeitar o aprendido e remediar.

… às tentativas de solução …

Para fazer face a estas dificuldades, o programa ajustado de Matemática propôs, em 1997, para o início do 10º ano a resolução de problemas de Geometria que mobilizassem o adquirido. Em vez das revisões dos assuntos matemáticos magistralmente feitas pelos professores, propunha-se aos estudantes que lembrassem e mobilizassem tudo o que sabiam para resolver novos e velhos problemas (com significado, motivadores).

… e propostas actuais.

O actual programa de Matemática A, em vigor desde 2003, considera um módulo inicial nos seguintes termos:

> O professor deverá propor neste módulo problemas ou actividades aos estudantes que permitam consolidar e fazer uso de conhecimentos essenciais adquiridos no 3º ciclo de modo tanto a detectar dificuldades em questões básicas como a estabelecer uma boa articulação entre este ciclo e o

Ensino Secundário. Poderá partir de uma determinada situação, de um determinado tema, procurando evidenciar todas as conexões com outros temas tomando como meta o desenvolvimento das competências matemáticas transversais, isto é, daquelas que atravessam todos os temas e devem constituir os grandes objectivos de um currículo de Matemática.

Uma compreensão mais profunda da Matemática só se verifica quando o estudante vê as conexões, quando se apercebe que se está a falar da mesma coisa encarando-a de diferentes pontos de vista. Se os estudantes estão a explorar, por exemplo, um problema de geometria poderão estar a desenvolver a sua capacidade de visualizar, de fazer conjecturas e de as justificar, mas também poderão estar a trabalhar simultaneamente com números, calculando ou relacionando áreas e volumes, a trabalhar com proporções na semelhança de figuras ou a trabalhar com expressões algébricas. Os problemas a tratar neste módulo devem integrar-se essencialmente nos temas Números, Geometria e Álgebra deixando para outra altura os problemas que se integrem no tema Funções ou Probabilidades e Estatística. Pretende-se que os problemas a propor ponham em evidência o desenvolvimento de capacidades de experimentação, o raciocínio matemático (com destaque para o raciocínio geométrico) e a análise crítica, conduzindo ao estabelecimento de conjecturas e à sua verificação.

Os exemplos de problemas propostos são:

- Unindo os pontos médios de um quadrilátero encontramos sempre um paralelogramo?
- Porque é que há só 5 sólidos platónicos?
- Estudo da possível semelhança entre garrafas de água de uma dada marca de 33cl, 50cl, 75cl e 1,5l.
- Como resolveu o matemático Pedro Nunes equações do primeiro e do segundo graus? Podemos identificar, nos seus escritos, o uso da fórmula resolvente ou pelo menos de alguns casos particulares? Que casos Pedro Nunes não considerou ou considerou impossíveis?
- Que números racionais são representáveis por dízimas finitas? Qual a dimensão do período de uma dízima infinita periódica?

acrescentando que "alguns destes problemas poderão ser substituídos, com vantagem, por actividades ou problemas ligados ao mundo real, propostos e planificados por um grupo de professores do conselho de turma de modo a integrar na sua resolução conhecimentos de várias disciplinas".

E os manuais escolares actuais apresentam estes e outros problemas (para resolver, em parte ou completamente resolvidos) em diversas versões e variantes.

Olhar para fracções e dízimas

Uma volta dada aos manuais permite constatar que essas propostas foram entendidas de forma diversa pelos diversos autores. No que respeita ao último assunto proposto para estudo, o problema dos números racionais e das dízimas, destacam-se duas preocupações — uma delas referida à divisão em si mesma e outra relacionada com a calculadora e as suas limitações[1].

Num dos manuais consultados, faz-se apelo a um diálogo entre jovens a quem se propõe o estudo do assunto[2]. Aliás este manual apresenta, para vários assuntos, essa técnica de expor sequencialmente os raciocínios atribuindo-os a personagens — Sócrates e o escravo, por exemplo — faz lembrar os diálogos que Galileo propõe para argumentar a favor ou contra as ideias em debate ou os mais recentes produzidos por Malba Tahan[3] a propósito do método heurístico. De outra forma, também Sebastião e Silva defende o método para o estudo de alguns assuntos. Malba Tahan tem a descrição de aulas de diálogo conduzido pelo professor, precisamente sobre as fracções próprias e impróprias, começando por comparar duas fracções 3/8 e 4/9, utilizando os seus complementos 5/8 e 5/9, o que introduz uma variante de raciocínio às *técnicas* de comparação de fracções que podem (ou não) ter-se constituído em rotinas que substituem o pensamento e devem ser readquiridas na sua potência com significado para os jovens. Aliás, Malba Tahan conduz o debate para conjecturar resultados interessantes como sejam: somando o mesmo número natural aos dois termos de uma fracção própria, obtém-se um número maior, e, o contrário acontece se fizermos o mesmo a qualquer fracção imprópria[4].

Não sabemos se o estudo dos assuntos por métodos de diálogo forjado entre estudantes preocupados com o mesmo assunto resulta em geral. Mas pensamos que é uma forma tentadora e deve ser experimentada.

Para além das preocupações e métodos que pudemos descobrir nos manuais, estamos em crer que este é ainda um assunto que merece algum tratamento histórico, particularmente ao nível da evolução das notações, à semelhança do que alguns manuais experimentam com a resolução de equações, recorrendo a Pedro Nunes. De facto, a escrita actual dos números decimais (a parte inteira, separada por uma vírgula, da parte decimal) é relativamente recente e vale a pena sempre valorizar o percurso ao nível das notações. O desenvolvimento das notações e a escrita matemática consagrada (e introduzida na língua em geral) dá uma ideia bem clara sobre a importância que deve ser dada a tal desenvolvimento no futuro e que os estudantes devem praticar para compreender a linguagem simbólica, como mais um instrumento decisivo para o pensamento científico.

A respeito da regra de numeração escrita no sistema decimal, tal como a conhecemos hoje, deve ser feita referência à escrita posicional de Stevin (1585) ainda sem vírgulas, a J. Napier (Neper) que, em 1617, como resultado da divisão de 81094 por 432, escreve 1993, $2^{0}7^{00}3^{000}$, enquanto Giraud, em 1629, separa a parte inteira da decimal por uma barra vertical, assim: Dividindo 3218 por 10, obtém-se

$$321\frac{8}{10}$$

que se representa por 321|8. Waliis, em 1657, escreve como separador a vírgula. E interessa dar a conhecer a importância do sistema métrico decimal na maior parte dos países que é o que fixa ou generaliza a escrita tal como a conhecemos e já perto do fim do século XVIII.

Já a propósito do traço de fracção e da forma como escrevemos os números fraccionários, pode referir-se Leonardo de Pisa (Fibonacci), sendo que as denominações de numerador e denominador são posteriores a 1400 e a distinção entre fracções próprias e impróprias é também já do século XVIII. Convém colocar os estudantes perante a escrita antiga para descrever uma qualquer situação[5].

Sobre a culpa forjada da calculadora...

O que é verdade é que, apesar de haver grandes insistências no ensino básico sobre o cálculo de múltiplos e submúltiplos, de múltiplos e divisores comuns que acompanham uma artilharia de regras para as operações com fracções, deparamos com um grande número de jovens que esqueceram e desprezam todas as técnicas aprendidas e as substituem por utilizações incorrectas da calculadora, com total falta de sentido crítico sobre os resultados obtidos para os mais simples problemas. Em algumas escolas com ensino básico, no terceiro ciclo, têm sido induzidas (por alguns manuais) introduções de conceitos, ligados a números, responsáveis pelo desprezo e abandono das operações com fracções. Concluir que um determinado resultado é uma dízima infinita periódica (ou não) a partir da observação do visor de calculadora é um erro com consequências devastadoras. As limitações da calculadora representariam para estes trabalhos escolares e para muitos outros uma fonte de ensinamentos. Só, que em vez de utilizar a matemática da calculadora, pode estar a ser feita uma simplificação grosseira e errada que resulta tanto contra a tecnologia como contra a matemática em geral.

A propósito do uso da calculadora, no actual programa de Matemática, escreve-se:

> Os estudantes devem ter oportunidade de entender que aquilo que a calculadora apresenta no seu ecrã pode ser uma visão distorcida da realidade; além do mais, o trabalho feito com a máquina deve ser sempre confrontado com conhecimentos teóricos, assim como o trabalho teórico deve ser finalizado com uma verificação com a máquina. É importante que os estudantes descrevam os raciocínios utilizados e interpretem aquilo que se lhes apresenta de modo que não se limitem a *copiar* o que vêem.
>
> É muito importante desenvolver a capacidade de lidar com elementos de que apenas uma parte se pode determinar de forma exacta; é importante ir sempre chamando a atenção dos estudantes para a confrontação dos resultados obtidos com os conhecimentos teóricos; sem estes aspectos não se pode desenvolver a capacidade de resolver problemas de aplicações da matemática e a capacidade de analisar modelos matemáticos.

... e as propostas para limpar a culpa

A proposta de trabalhar com fracções e dízimas logo no módulo inicial serve, antes de tudo, para apressar a aquisição da calculadora gráfica, para que ela seja habitual no dia a dia escolar, desde o início do 10º ano.

Durante este ano lectivo, reparei que os estudantes do 10º ano, a trabalhar comigo, utilizam a máquina com facilidade, mas sem escolher os contextos em que ela serve e sem a evitar quando ela não é boa escolha. Particularmente mal usada foi quando deixaram de trabalhar com os números irracionais e as propriedades das operações.

Tive, por isso, necessidade de chamar várias vezes a atenção, para as limitações da calculadora (também e principalmente) no cálculo e procurando separar o uso nas resoluções de problemas em que aceitamos e controlamos erros nas aproximações, das resoluções em que procuramos as soluções exactas ou não há razão para não as obtermos.

Tornou-se evidente a necessidade de os levar a estudar as limitações da calculadora e apresentei-lhes propostas de trabalho e discussão sobre as fracções e as dízimas:

A que fracções correspondem dízimas finitas?

A calculadora dá todas as dízimas finitas?

Que fracções conduzem a dízimas infinitas?

Como se comportam os períodos para os diversos denominadores?

Posso tirar conclusões sobre os períodos, só com recurso à calculadora?

À medida que eles iam avançando palpites e conjecturas, eu fui fornecendo novos exemplos de denominadores ou de fracções e alguns deles identificaram regularidades nos períodos em que nunca tinha reparado. Juntemos, para exemplo, um olhar (do Valter, no caso). (Ver figura da página seguinte.)

Começaram como é óbvio pelos denominadores potências de 2 e potências de 3. Avançaram palpites sobre os denominadores potências de 10, claro!, mas demoraram a tirar conclusões sobre os denominadores potências de 5.

Uma dízima finita que a calculadora não forneceu completamente foi logo vista com o inverso de uma potência de 2, que serviu também para ver com quantas casas decimais a calculadora trabalha.

No campo das dízimas infinitas periódicas, parece-me que o denominador 7 é um ponto de partida muito interessante para a motivar, com a beleza das regularidades, os mais renitentes. Espantoso é que não tenham conseguido justificar com rapidez porque é que o período de 8/7 é o mesmo de 1/7. Para desequilibrar algumas conjecturas serve o denominador 13. Para deitar por terra, as ilusões de obter sempre os períodos com segurança, usando a calculadora, usei uma fracção de denominador 31, que tinha um período de 15 ou 16 algarismos.

Também procurámos ver como falha e acerta a calculadora na transformação de dízimas em fracções, para o que facilmente aparecem exemplos surpreendentes. Finalmente, verificámos as capacidades da calculadora para as operações com fracções. E, ao contrário do que eu esperava, dois alunos pareceram-me viciados em *divisões à mão*. Quem havia de dizer?

Notas

1 Por exemplo, veja-se: Bernardes, Loureiro, et. al. Matemática 10 Programa A. Contraponto. Porto: 2003.

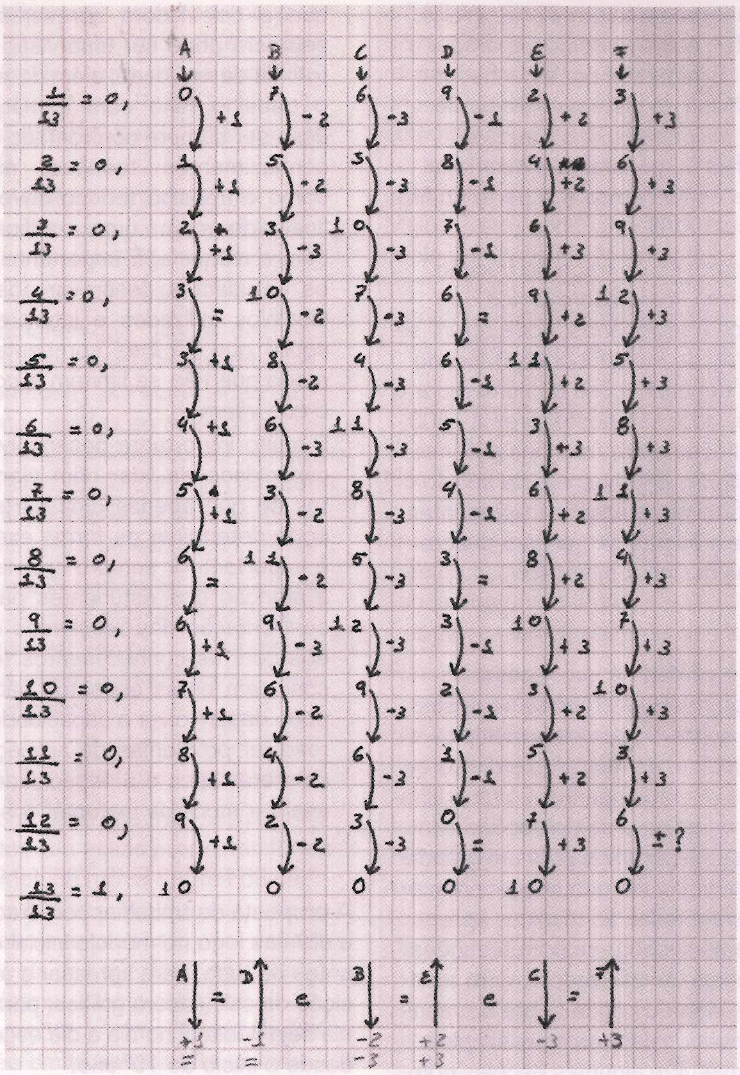
2 É o caso de Jorge, Alves, et. al. Infinito 10 A. Areal. Porto: 2003.

3 Vale a pena apresentar aos estudantes esta personagem, Ali Iezid Izz-Edim ibn Salim Hank Malba Tahan, criada pelo matemático e professor Júlio César de Melo e Souza, bem como alguns dos seus livros que devem estar nas bibliotecas escolares.

4 Malba Tahan. Didáctica da Matemática 1° vol. Ed. Saraiva. S. Paulo: 1961.

5 Enciclopedia delle Matematiche Elementari e complementi con estensione alle principali teorie analitiche, geometriche e fisiche loro applicazioni e notizie storico-bibliografiche a cura di L. Berzolári, G. Vivanti e T. D. Gigli, Vol 1 Parte 1; Editore Ulrico Hoepli, Milano: 1950. Estrada, Sá, et al. História da Matemática. Universidade Aberta. Lisboa: 2002.

Arsélio Martins
Esc. Sec. de José Estevão



Materiais para a aula de Matemática

Investigar fracções, dízimas e os limites da calculadora

A propósito desta actividade aconselhamos a leitura do artigo *O (re)encontro inicial*, de Arsélio Martins, publicado nesta revista.

Trata-se de uma actividade de investigação, é por isso apresentada aos alunos de forma aberta, de modo que sejam eles a organizar, a avançarem palpites e conjecturas, a argumentarem, a comunicarem … cabe ao professor, ao seu estilo, ir levantando as questões que considere necessárias e/ou pertinentes para que a investigação avance ou para abalar algumas conjecturas. As sugestões indicadas na ficha pretendem facilitar o início do trabalho mas poderão ou não ser dadas aos alunos à partida.

Trata-se de uma tarefa que vai de encontro ao que se propõe para o módulo inicial da Matemática A. Segundo o Arsélio Martins, ela serviu também para apressar a aquisição da calculadora gráfica e levar os alunos a estudar as suas limitações.

A redacção