Teoria de Jogos: Jogos de Dois Jogadores de Soma Zero

Maria Cristina Peixoto Matos e Manuel Alberto Martins Ferreira

Como foi referido no número anterior, a incursão da teoria de jogos continua com a análise de jogos de dois jogadores de soma zero. Na vida real, a maior parte das vezes os jogos não são deste tipo. Os jogadores, geralmente, preferem aliar-se e dividir resultados do que jogar individualmente com vista a receberem um prémio melhor. Um jogo de soma zero não cria nada de valor. Os jogadores atacam-se mutuamente.

No artigo anterior vimos que qualquer jogo com dois jogadores pode ser representado por uma matriz de *payoffs*. Futuramente representaremos qualquer jogo de dois jogadores de soma zero como um jogo matricial, isto é, através de uma matriz M do tipo $m \times n$ identificando os dois jogadores como jogador linha e jogador coluna. As m estratégias do jogador linha serão identificadas através das linhas da matriz M e as n estratégias do jogador coluna representar-se-ão nas colunas da matriz M. Dada a definição de jogo de dois jogadores de soma zero, é óbvio que escolhendo o jogador linha a estratégia i e o jogador coluna a estratégia j, sendo m_{ij} o *payoff* do primeiro jogador então o *payoff* do segundo jogador é exactamente $-m_{ij}$.

Foi von Neumann quem apresentou um dos maiores resultados para este tipo de jogos. Ele demonstrou rigorosamente que existe sempre um curso racional de acção em jogos de dois jogadores, desde que os seus interesses sejam completamente opostos. De forma única e inequívoca von Neumann respondeu à questão "como posso maximizar os meus *payoffs* em jogos de soma zero com dois jogadores?".

		SUNEC 1 u. m.	SUNEC 2 u. m.
SUMUS	1 u. m.	0;0	5000; -5000
SUMUS	2 u. m.	-5000;5000	0;0

Figura 1

		SUNEC 1 u. m.	SUNEC 2 u. m.		
SUMUS	1 u. m.	0	5000	min: 0	maximin: 0
SUMUS	2 u. m.	-5000	0	min: -5000	

Figura 2

1. Equilíbrio em jogos de dois jogadores de soma zero

Intuitivamente, a ideia de solução para qualquer jogo leva-nos a pensar em equilíbrio, entendendo-se este como um *n-uplo* de estratégias onde cada jogador joga o seu melhor face aos outros jogadores.

No contexto de jogos de soma zero, a ideia de equilíbrio pode ser traduzida através de um par de estratégias do seguinte modo:

Seja (p, q) um par de estratégias em equilíbrio, então $m_{iq} \leq m_{pq}, \forall i$ e $m_{pj} \geq m_{pq}, \forall j$.

Saliente-se que a segunda desigualdade é contrária da primeira uma vez que o *payoff* do jogador coluna é o simétrico do *payoff* do jogador linha. Estas desigualdades motivam a seguinte definição.

Definição: Seja M uma matriz real. Um elemento m_{pq} de M é um ponto sela se é simultaneamente um mínimo da sua linha e um máximo da sua coluna.

Assim, se M é um jogo matricial, então m_{pq} é um ponto sela se e só se (p, q) é um par de estratégias de equilíbrio. Logo, se um jogo de soma zero tem um equilíbrio, tem uma solução. No entanto, um jogo de soma zero com dois jogadores pode ter múltiplos equilíbrios. Porém, todo o equilíbrio de um jogo de soma zero com dois jogadores tem o mesmo valor e, portanto, podemos identificar os *payoffs* da solução com qualquer um desses equilíbrios.

2. Um Duopólio no mercado dos sumos engarrafados

Tomemos um exemplo de duopólio, baseado em R. A. McCain, de duas empresas que vendem sumos engarrafados. Para facilitar o estudo designemos por SUMUS e SUNEC essas empresas. Cada companhia tem um custo fixo de 5.000 u. m., independentemente da quantidade de garrafas vendidas. As duas companhias competem pelo mesmo mercado e têm de escolher entre vender cada garrafa por um preço de 1 u. m. ou por um preço de 2 u. m..

Os pressupostos do problema são:

- por um preço de 2 u. m. por garrafa, 5.000 garrafas podem ser vendidas com um retorno de 10.000 u. m.;
- por um preço de 1 u. m. por garrafa, 10.000 garrafas podem ser vendidas com um retorno de 10.000 u. m.;
- se ambas as companhias colocarem as garrafas no mercado pelo mesmo preço, dividem igualmente as vendas;
- se uma empresa colocar o preço mais alto que a outra, a companhia com o preço mais baixo vende toda a quantidade enquanto que a empresa que coloca o preço mais alto não vende nada;
- os *payoffs* são os lucros, depois de deduzidos os custos fixos.

A figura 1 representa a matriz de *payoffs* do jogo.

Para analisar o resultado do jogo do ponto de vista da companhia SUMUS, utilizam-se os conceitos de *maximin* e *minimax*, que resultam num ponto de equilíbrio. *Max* são os maiores valores das colunas e *min* são os menores valores das linhas.

Suponhamos em primeiro lugar que embora cada empresa seja capaz de fazer uma previsão razoável da matriz de *payoffs*, ela ignora a estratégia que o seu concorrente irá adoptar. Ignorando os planos da empresa SUNEC, a empresa SUMUS poderá proceder da seguinte forma: determinar, em primeiro lugar, o menor *payoff* que pode receber em cada uma das suas estratégias (mínimo de cada linha da matriz de *payoffs*). Em segundo lugar escolher a estratégia que possui o mais alto mínimo (escolha da linha da matriz de *payoffs*). Assim, empresa SUMUS pode assegurar-se de que, qualquer que seja a decisão do seu concorrente, ele não obterá o pior resultado possível ao evitar os resultados menos favoráveis (linhas de mínimos mais baixos). Da mesma forma a empresa também nunca atingirá o melhor resultado possível pois, propositadamente, ignorou os melhores resultados.

A figura 2 explicita a aplicação deste procedimento à tabela representada na figura 1, para a empresa SUMUS.

Examinando o resultado do jogo do ponto de vista da empresa SUNEC, adoptando os mesmos critérios, esta empresa irá, também, procurar o seu maximin.

A empresa SUNEC irá procurar o máximo do conjunto de mínimos nas colunas na sua matriz de *payoffs* (figura 3).

Entretanto, dado o conceito de jogo de soma zero, a escolha do máximo dos mínimos das colunas matriz de *payoffs* da empresa SUNEC deve gerar a mesma estratégia que dá o mínimo dos máximos nas colunas da matriz de *payoffs* da empresa SUMUS. Analisando a figura 4, concluímos que se a empresa SUNEC

		SUNEC	
		1 u. m.	2 u. m.
SUMUS	1 u. m.	0	-5000
	2 u. m.	5000	0
		min: 0	min: -5000
		maximin: 0	

Figura 3

		SUNEC	
		1 u. m.	2 u. m.
SUMUS	1 u. m.	0	5000
	2 u. m.	-5000	0
		max: 0	max: 5000
		minimax: 0	

Figura 4

tentar achar o minimax (mínimo do conjunto de máximos) na matriz de *payoffs* da empresa SUMUS, ela irá seleccionar a mesma estratégia quando tenta encontrar o *maximin* da respectiva matriz de *payoffs*. Matematicamente temos que o equilíbrio do jogo se verifica exactamente num ponto sela da matriz da *payoffs* e portanto o *maximin* é exactamente o *minimax*.

Generalizando este resultado obtém-se o chamado

Teorema Minimax: Qualquer jogo de soma nula com dois jogadores tem uma solução onde o *payoff maximin* é igual ao *payoff minimax*.

Assim, para duas pessoas, um jogo de soma zero é racional para cada um dos jogadores que escolher a estratégia que maximiza o mínimo *payoff*, e o par de estratégias e *payoffs* tal que cada jogador maximiza o respectivo mínimo é a solução do jogo.

Mediante o exposto o leitor já pode verificar que a solução do jogo proposto: III e B são as estratégias adequadas e o seu *payoff* será de 2 euros.

3. Qual a melhor maneira do jogador se proteger contra o insucesso?

Vimos que um equilíbrio é uma condição necessária para que uma combinação de estratégias seja a solução de um jogo. Se uma combinação de estratégias não é um equilíbrio, então pelo menos um dos jogadores tem incentivos para alterar o seu jogo. No próximo artigo veremos que a melhor maneira dos jogadores se protegerem contra o insucesso é utilizarem estratégias mistas. Se os jogadores se munirem apenas de estratégias puras correm o risco dos seus opositores descobrirem qual a estratégia que vão usar e, consequentemente, as perdas nesse caso são maiores.

Bibliografia

[1] Berck, Peter; Sydsaeter, Knut; *"Manual de Matemática para Economistas"*, McGraw-Hill de Portugal, 1993.

[2] Bicchieri, Cristina; Jeffrey, Richard; Skyrms, Brian; *"The Logic of Strategy"*, Oxford University Press, Inc., 1999.

[3] Davis, Morton D.; *"Introducción a la Teoría de Juegos"*; Tradução espanhola por José Carlos Gómez Borrero; Ciencia e Tecnología, Alianza Editorial, Madrid, 1986.

[4] Fudenberg, Drew; Tirole, Jean; *"Game Theory"*; Cambridge, Mass: Mit. Press, 1991.

[5] Gibbons, Robert; *"Game Theory for Applied Economist"*; Princeton University Press, 1992.

[6] Neumann, J. von; Morgenstern, O.; *"Theory Of Games and Economic Behaviour"*; John Wiley & Sons, Inc; New York, 1967.

[7] Osborne, Martin J.; *"An Introduction to Game Theory"*; Oxford University Press, 2000.

[8] Kara, Tarik, *"Lecture Notes on Game theory"*, //www.gametheory.net ,2002.

[9] Yildiz, Muhamet, *"Game Theory Lecture Notes"*, //www.gametheory.net ,2002.

Maria Cristina Peixoto Matos
Instituto Politécnico de Viseu
Escola Superior de
Tecnologia de Viseu

Manuel Alberto Martins Ferreira
Instituto Superior de Ciências do
Trabalho e da Empresa