

# Moinho, um jogo de alinhamento

Luis Reis

Os jogos de alinhamento formam uma família verdadeiramente universal e com um passado tão longo que os coloca entre os jogos mais antigos do mundo. São jogos de posição, tal como os solitários, os jogos de bloqueio, o xadrez e as damas.

## Jogo do Galo e afins

Da variedade 3 em linha, a versão mais popular entre nós é o Jogo do Galo. Uma vantagem do jogo é o facto de poder ser jogado com pouco equipamento: precisa de papel e lápis ou da areia de uma praia. O tabuleiro consiste de quatro segmentos. (Figura 1)

Cada jogador, alternadamente, coloca uma marca numa das casas do tabuleiro — é habitual usarem-se X e O — com o objectivo de fazer uma linha (horizontal, vertical ou diagonal) com as suas marcas.

O jogo foi informatizado desde 1860, por Babbage (1791–1871) — apenas teoricamente, porque ele não conseguiu construir a máquina.

Uma variante (isomorfa) moderna do Jogo do Galo é o Jarri, jogo inventado em 1967 por John Michon, cientista holandês (Utrecht, 1935–). A figura 2 representa 8 cidades ligadas por 9 estradas. (Figura 2)

Dois jogadores jogam alternadamente e seleccionam uma estrada na sua vez. Ganha o primeiro jogador que tomar todas as estradas que atravessam uma cidade<sup>1</sup>.

O Jogo do Galo (qual será a origem deste nome?) não é muito estimulante: termina num empate, a não ser que um dos jogadores cometa um erro. Existem versões semelhantes mas que requerem estratégias mais avançadas. Nos tabuleiros da figura 3 há nove pontos (ou buracos) nas intersecções das linhas.

Cada jogador possui 3 peças que vai colocando, alternadamente, num dos pontos livres do tabuleiro. Depois de todas as 6 peças estarem colocadas, os jogadores, à vez, movimentam uma das suas peças para um ponto livre adjacente, na vertical ou horizontal — ou diagonal no segundo tabuleiro — sem saltar por cima de nenhuma peça. Ganha o jogador que alinhar todas as suas peças ou que impedir o adversário de jogar.

Pode constituir uma surpresa para os alunos saberem que estas versões têm sido apreciadas por povos de todo o mundo desde há muito séculos. O segundo tabuleiro parece ser o mais comum, o nome do jogo muda consoante o país e introduzem-se algumas variações às regras básicas

descritas acima. Por exemplo, no Ghana, o jogo Achi usa 4 peças para cada jogador; em França, o jogo tem o nome de Marelle e o ponto central não pode ser usado na primeira jogada de cada jogador (sem esta regra o primeiro jogador tem vantagem se colocar a primeira peça no centro); na Índia, o jogo Tant Fant inicia-se com as peças de cada jogador posicionadas nos pontos horizontais de cima e de baixo, respectivamente; no sul da China o jogo ainda é jogado com o nome de *luk tsut k'i* (xadrez de seis homens) e parece que já era conhecido no tempo de Confúcio, c. 500 a.C. O jogo também é muito popular nas Filipinas, sob o nome de Tapatan.

Segundo Bell e Cornelius, encontraram-se exemplos deste tipo de tabuleiros no Egipto, gravados nas pedras do templo de Kurna (c. 1400 a.C.) e no templo de Kom Ombo (cuja construção se iniciou no reinado de Ptolomeu IV, c. 220 a.C.). Na Europa estes jogos eram populares no século XIV. Aparecem tabuleiros gravados em diversas catedrais, como é o caso dos claustros de Westminster Abbey, em Londres (em Inglaterra o jogo tem o nome de Three Men's Morris). Existem registos antigos de tribunais eclesiásticos castigarem homens por escavarem os buracos para o jogo em locais impróprios.

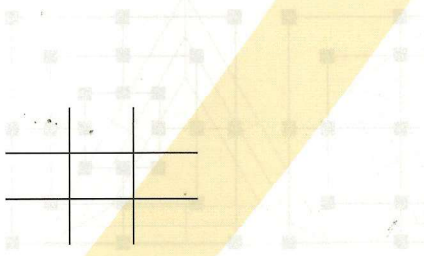


Figura 1. Tabuleiro do Jogo do Galo.

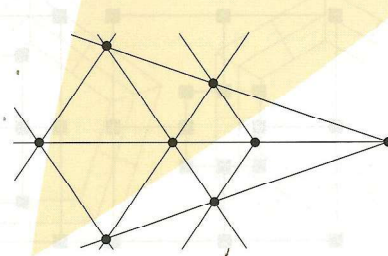


Figura 2. Tabuleiro do jogo Jarri.

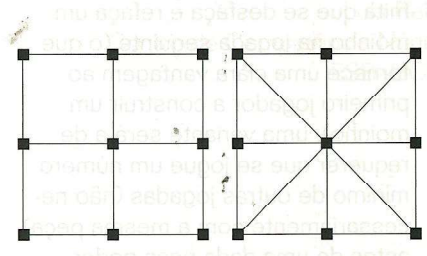


Figura 3. Tabuleiros para jogos 3 em linha.



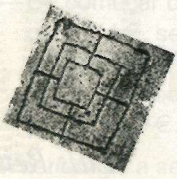


Figura 4. Tabuleiro do Jogo do Moinho. Basílica Julia.

Uma variante interessante destes jogos é a inversão: cada jogador tenta forçar o adversário a colocar 3 em linha.

### O Jogo do Moinho

O jogo do Moinho é uma extensão dos jogos referidos no ponto anterior (ver descrição na página 42).

Há provas arqueológicas de que o Jogo do Moinho também é jogado desde a antiguidade egípcia (templo de Kurna, mais uma vez), grega (Acrópole de Atenas); romana (Basílica Julia)<sup>2</sup> (figura 4) e ainda no Sri Lanka (Ceilão)<sup>3</sup>. Na Europa, são numerosos os locais onde se encontraram vestígios do jogo: num barco funerário viking<sup>4</sup>, em abadias, catedrais, castelos, igrejas e aldeias medievais (Inglaterra, França, Alemanha). Shakespeare referiu-se ao jogo em *Sonho de uma noite de verão* (1595)<sup>5</sup>. A introdução deste jogo na Europa poderá ter sido feita pelos árabes do norte de África ou pelos mercadores fenícios, que chegaram a numerosos portos. (Figuras 5 e 6)

Algumas notas acerca das regras do jogo:

1. Na maioria dos casos é absolutamente proibido capturar uma peça que forme um moinho, mas pode-se acrescentar a excepção *a não ser que não haja mais peças disponíveis*.
2. Embora a maioria das regras permita que se desfaça e refaça um moinho na jogada seguinte (o que fornece uma clara vantagem ao primeiro jogador a construir um moinho), uma variante será a de requerer que se jogue um número mínimo de outras jogadas (não necessariamente com a mesma peça) antes de uma dada peça poder

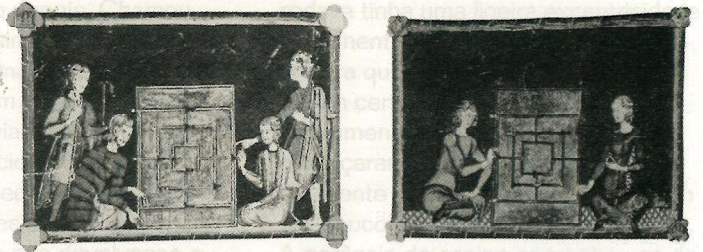


Figura 5. Pormenores do Livro de los Juegos<sup>6</sup>.

voltar ao mesmo moinho. Pode ser uma, duas ou três jogadas. Não se aplica tal restrição se o moinho se formar numa linha diferente ou se forem usadas peças diferentes.

Algumas regras impõem mesmo que não se possa repetir moinhos.

### Variações ao tema

Apesar do Jogo do Moinho com 9 peças ser o mais popular, a figura 7 ilustra os tabuleiros para 5, 7 e 11 peças, respectivamente.

A partir do terceiro tabuleiro da figura 7, Marcia Ascher propõe novos tabuleiros, de acordo com a tradição da população da Mongólia (figura 8). Cada configuração é um encaixe de 3 polígonos regulares concêntricos de  $n$  lados ( $n = 3, 4, 5, 6$ ).

Estes tabuleiros podem estimular algumas questões para investigar com os alunos.

*Quantos pontos de intersecção há em cada tabuleiro?*

Os pontos de intersecção existem no centro de cada lado e em cada vértice. No caso dos pentágonos, por exemplo, uma vez que cada um tem 5 lados e 5 vértices e o tabuleiro tem 3 pentágonos obtemos  $3 \times (5 + 5) = 30$  pontos de intersecção. O mesmo raciocínio se aplica às outras configurações: cada figura é repetida

três vezes, tem o mesmo número de lados e de vértices. Assim, para  $n = 3, 4, 5, 6$  temos 18, 24, 30 e 36 pontos de intersecção. No nível adequado, os alunos poderiam até descobrir uma fórmula para o caso geral de polígonos de  $n$  lados:  $3x(n + n) = 6n$  pontos de intersecção.

E se os jogos fossem do tipo 4 em linha e a configuração fosse de 4 polígonos encaixados? Quantos pontos de intersecção haveria?

*Quantas peças por jogador?*

Tomemos o terceiro tabuleiro da figura 8: se cada jogador usasse 14 peças em vez de 11, que problemas surgiriam? O que acontece se cada jogador tiver 12 peças? Faz sentido que um jogador tenha 12 peças e outro tenha 11?

Para que cada jogador disponha do maior número possível de peças no início — e igual número que o adversário — então o número total de peças do jogo deve ser igual ao número de pontos de intersecção do tabuleiro menos 2, recebendo cada jogador metade desse total. Assim, para a configuração quadrada, cada jogador deve receber  $(24 - 2) / 2 = 11$  peças, que é precisamente o número que os mongóis usam. Para as outras configurações, se usarmos 8, 14 e 17 peças para  $n = 3, 5$  e 6, respectivamente, então continuamos de acordo com

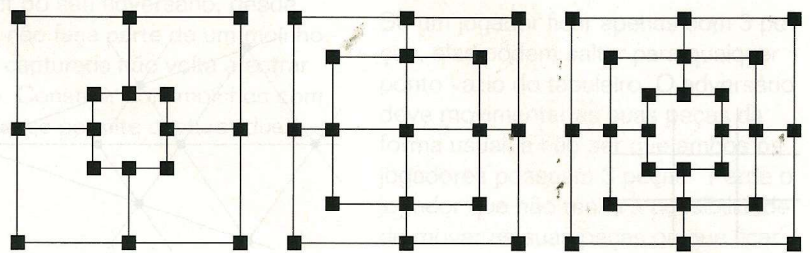


Figura 7. Tabuleiros para o Jogo do Moinho com 5, 7 e 11 peças.



os mongóis. Mais uma vez os alunos podem tentar descobrir a relação geral,  $(6n - 2) / 2 = 3n - 1$ .

*Quantas maneiras de alinhar 3 peças?*

Temos de contar o número total de lados dos 3 polígonos encaixados ( $3n$ ), somar o número de linhas que unem os vértices ( $n$ ) e somar o número de linhas que unem os pontos médios ( $n$ ): o total é de  $5n$ , para cada configuração.

Naturalmente, estas e mais questões podem ser colocadas aos alunos (envolvendo nomeadamente números e a geometria dos polígonos), adequando-as aos seus conhecimentos. Mas o melhor, claro, é mesmo jogar para responder à questão: *Qual é o jogo da família que mais aprecias? Porquê?*

Tal como existem diversas famílias de tabuleiros de jogos de estratégia envolvendo configurações geométricas e ideias matemáticas, talvez os alunos se sintam encorajados pelo exemplo dos pastores da Mongólia para criarem e desenvolverem, eles próprios, novos jogos.

## Jogos-mnk

Há mais jogos com a ideia de ser o primeiro a obter *k-em-linha* além dos que foram mencionados: Dara, Pente, Go-Moku, etc.

O termo *jogos-mnk* designa a família de jogos de tabuleiro de informação perfeita em que dois jogadores colocam alternadamente peças num tabuleiro rectangular com o objectivo de alinhar um determinado número de peças da sua cor, na ortogonal ou diagonal: o tabuleiro tem dimensão  $m \times n$  e pretende-se alinhar  $k$  peças. Assim, o Jogo do Galo é um jogo-3,3,3 e o Go-Moku tradicional é um jogo-19,19,5.

Prova-se que nenhum jogo-mnk é

vantajoso para o segundo jogador, podendo ser vantajoso para o primeiro (mesmo que não se conheça a estratégia vencedora) ou um empate (se não houver erros ...).

Alguns resultados<sup>7</sup>:

- se o jogo-mnk é vantajoso para o primeiro jogador, então também o é o jogo-m'n'k, com  $m' \geq m$  e  $n' \geq n$ .
- se  $k \geq 8$ , o segundo jogador pode forçar um empate, mesmo num tabuleiro infinito (por maioria de razão, num finito); quer isto dizer que jogado de modo perfeito um jogo se prolonga indefinidamente e que num tabuleiro finito termina num empate.
- não se sabe se o segundo jogador consegue forçar um empate quando  $k = 6$  ou 7.
- $k = 3$  é vantajoso para o primeiro jogador, excepto se  $m = n = 3$ .
- jogos-m,4,4 são vantajosos para o primeiro jogador se  $m \geq 30$  e empates se  $m \leq 8$ .
- o jogo-5,5,4 é um empate e o jogo-6,5,4 é vantajoso para o primeiro jogador.
- o jogo-6,6,5 é um empate.

Quanto ao Jogo do Moinho de 9 peças está provado que é um jogo de empate (Gasser).

### Notas

- 1 Jogar online: <http://www.cut-the-knot.org/SimpleGames/Jam.shtml>
- 2 Mandada edificar em Roma por Júlio César, em 54 a.C., e terminada no tempo do imperador Augusto, poucos anos antes de arder, no ano 9. Principalmente um tribunal, era também um local de encontro público e um centro comercial.
- 3 No reino de Mahadithika Maha-Naga (anos 9-21).
- 4 O barco foi descoberto em 1880, na Noruega e datado de 850; provavelmente o túmulo do rei Olav Gierstada — <http://cma.soton.ac.uk/HistShip/shlect75.htm>
- 5 "The nine men's morris is fill'd up with



Figura 6. Anónimo. Jeu de marelle et Ceuilletes des fruits. C. 1500. Museu do Louvre. Paris.

mud" (Titânia, 2º Acto, 1ª Cena) que poderia ser traduzido por "O jogo do moinho está cheio de lama", podendo significar a alusão ao tabuleiro do jogo marcado no largo da aldeia.

- 6 Também designado Libro de ajedrez, dados y tablas, foi comissionado pelo rei de Leão e Castela Afonso X, o Sábio, entre 1251 e 1283. Tem 98 páginas e 150 ilustrações. Trata-se de um dos mais importantes documentos para o conhecimento da história dos jogos de tabuleiro, muitos dos quais importados dos reinos árabes. O único original conhecido encontra-se na biblioteca do Mosteiro de São Lourenço do Escorial, perto de Madrid.
- 7 <http://en.wikipedia.org/wiki/Mnk-games>

### Referências / Bibliografia

- Aroutcheff, P. "Les Marelles". Jeux et Stratégie n.º 15. 1982.
- Ascher, M. "Learning with Games of Strategy from Mongolia". Teaching Children Mathematics vol.8, n.2. 2001.
- Bell, R., M. Cornelius. "Board Games round the World". Cambridge University Press. 1988.
- Gasser, R. "Solving Nine Men's Morris". <http://www.msri.org/publications/books/Book29/files/gasser.pdf>
- [http://nrich.maths.org/public/viewer.php?obj\\_id=1183](http://nrich.maths.org/public/viewer.php?obj_id=1183)
- <http://www.ac-amiens.fr/chaalis/nouvelle5.htm>
- <http://www.ahs.uwaterloo.ca/~museum/rowgames/index.html>
- <http://www.gamerz.net/pbmserv/nmm.html>
- <http://www.psychologie.leidenuniv.nl/cog/index.php3?c=27>
- <http://www.tromboni.demon.co.uk/merrills/merrills.html>

Lúis Reis  
Centro de Competência Nónio  
ESB-UCP

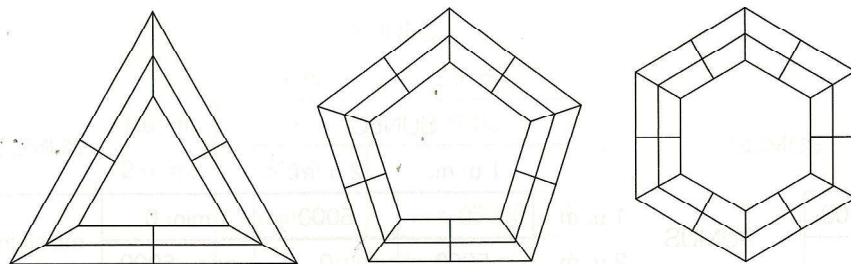


Figura 8. Variações do tabuleiro do Jogo do Moinho para 11 peças.