O cão e o prisioneiro

Manuel Saraiva, Universidade da Beira Interior

Há uns meses atrás fui colocado perante o seguinte problema: *Um prisioneiro encontra-se no centro do pátio de uma prisão e é guardado por um cão que tem, em todos os momentos, uma velocidade π vezes a sua. O pátio tem a forma de um quadrado com 200m de lado. O cão desloca-se sempre ao longo dos lados do pátio, podendo mudar a direcção e o sentido do seu movimento. Inicialmente o homem está no centro do pátio, podendo deslocar-se no seu interior em qualquer direcção e sentido; por seu lado, o cão encontra-se num dos vértices e, como bom guarda, está atento a todos os movimentos do prisioneiro, procurando sempre a melhor trajectória para o apanhar.*

Nestas condições, terá o prisioneiro alguma hipótese de fuga?

Confesso que, na altura, fiquei motivado e com vontade de chegar a alguma conclusão acerca do alcance, ou não, da liberdade por parte do prisioneiro.

Como resolver a situação? Por onde começar? Que estratégia definir? Qual a Matemática necessária?

Na realidade, é este conjunto de interrogações que torna aliciante estas situações, que as torna mesmo num desafio e num aguçar do espírito criativo e de iniciativa — é o não se saber, ao princípio, o que fazer, é o pôr a funcionar a nossa intuição, é o educar a nossa vontade e determinação em resolver as situações problemáticas que se nos deparam no dia a dia.

Começou-se por fixar o vértice onde se encontra o cão (ponto C da figura 1) — note-se que é indiferente a escolha de tal vértice pois a resolução do problema é independente desse facto; em seguida restringiu-se o movimento do homem a um movimento rectilíneo desde o centro do pátio (H) até cada um dos pontos dos lados do mesmo (nada de fintas ao cão!). Impostas estas condições (um caso particular do problema), a questão reside em saber se existirá algum «caminho», desde o centro do pátio até um determinado ponto de um dos seus lados, que o homem possa percorrer em menos tempo do que aquele que é gasto pelo cão a chegar a esse mesmo ponto, desde o seu vértice de partida.

Designando por:

Th — tempo gasto pelo homem em cada percurso
Tc — tempo gasto pelo cão em cada percurso
Eh — espaço percorrido pelo homem em cada percurso
Ec — espaço percorrido pelo cão em cada percurso
Vh — velocidade do homem
Vc — velocidade do cão

pretende-se saber se Th < Tc para algum «caminho». Como o movimento é uniforme (segundo o enunciado) pode-se escrever Th = Eh / Vh e Tc = Ec / Vc; logo, para que Th < Tc, virá Eh / Vh < Ec / Vc. Fazendo Vh = 1 vem Vc = π, chegando-se à relação Ec / Eh > π. **Pode-se então dizer que o homem conseguirá fugir ao cão (nas condições atrás indicadas) se a razão entre o espaço percorrido pelo cão e o espaço percorrido pelo homem (para cada caso, claro) for superior a π.**

Mas quando é que isso acontece? Será que se pode ter esperança?

Como o cão escolhe sempre o caminho óptimo, basta analisar o que se passa desde o ponto C até ao ponto E, «via» ponto D, por exemplo (ver figura 1).

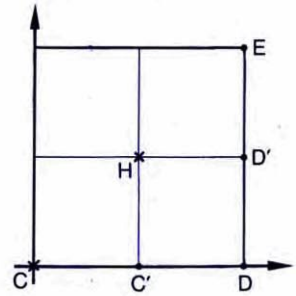

Figura 1

Surge, talvez, a tentação de ver o que se passa em E — o ponto mais distante do cão: Eh = $100\sqrt{2}$ m e Ec = 400m vindo Ec / Eh = $2\sqrt{2} < \pi$. **O cão** chega primeiro do que o prisioneiro.

Perante este facto poder-se-á já concluir que o cão apanha sempre o homem? Talvez não! Faça-se o estudo para os restantes pontos.

Começe-se por analisar o que se passa em [CC'] (ver fig. 1).

Considerando um referencial ortonormado com origem em C (fig. 1) pode-se dizer que:

1) $\overline{CC'}$ = 100m (espaço percorrido pelo cão de C a C') e o espaço percorrido pelo homem ao dirigir-se para os pontos de [CC'] varia de 100m (em C') a $\sqrt{100^2 + 100^2}$ m (em C);

2) o maior valor de Ec / Eh é 1 (100/100 correspondente à situação em C') que é menor que π.

Conclui-se então que o prisioneiro não tem hipóteses de fuga quando se dirige para os pontos de [CC'].

Um raciocínio idêntico leva a concluir que o homem não tem possibilidades de fugir se o tentar fazer por qualquer ponto de [C'D] ou de [DD']. Note-se que em D', Ec / Eh = 3 < π sendo, no entanto, um valor já bastante próximo de π. Este dado leva a acreditar na possibilidade de fuga do prisioneiro por pontos de [D'E]. *Mas será mesmo possível o homem fugir? Não se sabe já que o cão chega primeiro que o homem ao ponto E?*

Faça-se então o estudo para o caso dos pontos compreendidos entre D' e E.

Pretende-se saber se existe algum valor de x para o qual Th < Tc (ver fig. 2). Neste caso Ec = (200 + 100) + x (m) e Eh = $\sqrt{x^2 + 100^2}$ (m).

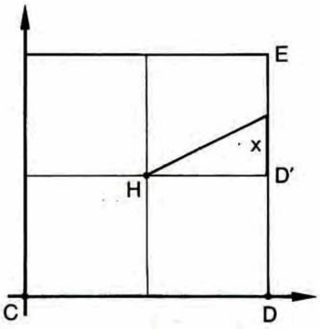

Figura 2

Então, e de Th < Tc, virá Ec / Eh > π, ou seja, a inequação $[(300 + x) / \sqrt{x^2 + 100^2}\,] > \pi$, cujo conjunto solução é o conjunto S=] 21.032092, 46.61894 [.

Constata-se assim, com alguma surpresa, que o prisioneiro tem as possibilidades de fuga indicadas a tracejado na figura 3.

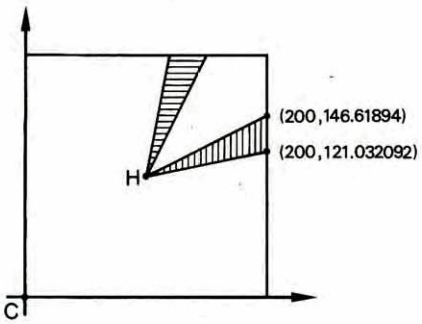

Figura 3

Note-se que a abordagem do problema apenas contemplou uma estratégia de fuga, talvez mesmo a mais simples, a mais linear; outras estratégias poderiam ter sido consideradas como, por exemplo, a hipótese do prisioneiro poder alterar a sua trajectória antes mesmo de chegar ao seu destino, ao ver que o cão ia chegar primeiro do que ele.

Quanto a mim, este problema só por si já é um bom problema a colocar aos alunos, não só pelo desafio que pode provocar quanto à procura de uma boa estratégia, mas também pelo conjunto de conhecimentos de Geometria e de Álgebra necessários para a sua resolução; porém, ele pode constituir ainda um belo exemplo da útil e vantajosa utilização do microcomputador na sala de aula -- como simulador de situações problemáticas. Creio mesmo que, se na simulação a apresentar aos alunos limitarmos os caminhos do prisioneiro (não deixarmos que o homem tome os caminhos que o conduzem à liberdade), ficaremos com um belíssimo começo de aula, onde os ingredientes de uma boa motivação estão associados a um bom problema para resolver.

Um problema, normalmente, tem várias formas de resolução e levanta sempre novas questões. Um problema dos problemas é mesmo tentar resolvê-los pelo processo mais simples e mais económico, bem como resolver as novas questões levantadas, porque mais complicadas e mais problemáticas. Relativamente a este problema do Cão e do Prisioneiro gostaria de deixar aqui a seguinte questão:

«Qual a velocidade que o cão precisa ter para que o homem, nas condições trabalhadas neste texto, não tenha hipóteses de fuga?».

Xeque Mate! (conclusão)

Pelo teorema anterior, conclui-se que:

$$N = an^3 + bn^2 + cn + d$$

Atendendo a que f(0)=0, f(1)=1, f(2)=5 e f(3)=14, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + b + c = 1 \\ 8a + 4b + 2c = 5 \\ 27a + 9b + 3c = 14 \end{cases}$$

que conduzirá a:

$$\begin{cases} a = 1/3 \\ b = 1/2 \\ c = 1/6 \\ d = 0 \end{cases}$$

E, portanto, o número de quadrados de um tabuleiro do tipo nxn é:

$$1/3\ n^3 + 1/2\ n^2 + 1/6\ n = 1/6\ n\ (n+1)\ (2n+1)$$

Uma extensão do problema

Quantos cubos há num cubo do tipo nxnxn?

Imagine-se, por exemplo, um cubo construído com n_3 cubos de madeira, desses que se oferecem às crianças para fazerem construções e puzzles. Quantos cubos, de diferentes tamanhos, se podem identificar?

É quase irresistível adequar a fórmula anterior às três dimensões e conjecturar que há $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ cubos. De facto, a conjectura é verdadeira, como se pode concluir utilizando qualquer uma das abordagens anteriores ou provando-a pelo método de indução matemática seguindo um percurso paralelo.

Novas extensões do problema

No caso do tabuleiro de xadrez, contámos apenas os quadrados que são rectângulos especiais. E se contássemos todos os rectângulos?

Também no segundo caso, contámos apenas os cubos que são paralelipípedos especiais. E se contássemos todos os paralelipípedos?

Temos, assim, dois novos problemas que se podem considerar extensões dos anteriores.

Quem quer quebrar a cabeça? Ficamos a aguardar as vossas descobertas.