Demonstração por Computador e os Limites da Computabilidade[1]

J. Orlando Freitas

Em 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken, dois matemáticos da University of Illionois, resolveram o problema das quatro-cores apresentando uma demonstração que contém partes demonstradas pelo computador. Este problema é original de 1852, quando Francis Guthrie, um estudante da University College London, observou que apenas quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa desenhado em papel, em que países vizinhos com fronteira (diferente de um ponto) têm cores diferentes. A pergunta de Guthrie, *Será que esta conjectura pode ser provada matematicamente?*, ficou no ar por mais de um século, apesar de várias tentativas para lhe responder.

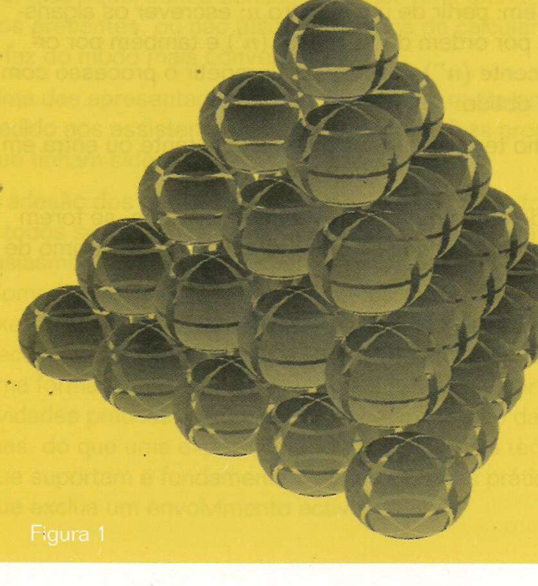

Figura 1

Outra grande demonstração feita por computador é sobre a conjectura de Keppler, que foi apresentada em Agosto de 1998. Keppler, em 1611, descreveu este tipo de empilhamento (Figuras. 1 e 2) e afirmou:

Este empilhamento é o mais compacto possível, de tal modo que em nenhum outro arranjo pode um maior número de esferas ser metido no mesmo recipiente.

No congresso Internacional de 1900, Hilbert incluiu esta conjectura no n.° 18 da sua famosa lista de problemas. Para resolver este problema com 400 anos, Thomas Hales, da Universidade de Michigan em 1998, necessitou de três gigabytes de disco. Quando esta demonstração foi divulgada houve vários comentários—ver o artigo de Eduardo Veloso na Educação e Matemática n° 49—e apresento a seguir um do célebre geómetra John Conway:

Existe um grande interesse em verificar esta demonstração … uma reunião vai ser convocada, de várias semanas, exactamente para isso, quando a demonstração tiver sido verificada, estou convencido que vai ser aceite.

O uso de computadores neste tipo de demonstração provocou muitas controvérsias entre os matemáticos e levantou algumas questões: Como podemos saber que o programa, ou a máquina, não se enganou? Esta prova é na sua essência diferente da tradicional prova de papel-e-lápis? Podemos questionar se uma demonstração é uma prova matemática se ninguém a conseguir verificar, com excepção da máquina?

A demonstração típica em matemática deduz-se a partir de verdades aceites ou demonstradas anteriormente. A maioria está escrita em algumas linhas ou páginas. Outras, poucas, são muito longas. Por exemplo, a demonstração de Walter Feit e John Thompson de que todo o grupo de ordem ímpar é solúvel, ocupa 251 páginas, enquanto a prova completa da famosa conjectura de Ramanuján ocupa à volta de 2000 páginas. Tradicionalmente, a exposição de provas em matemática deve estar bem explícita, para que

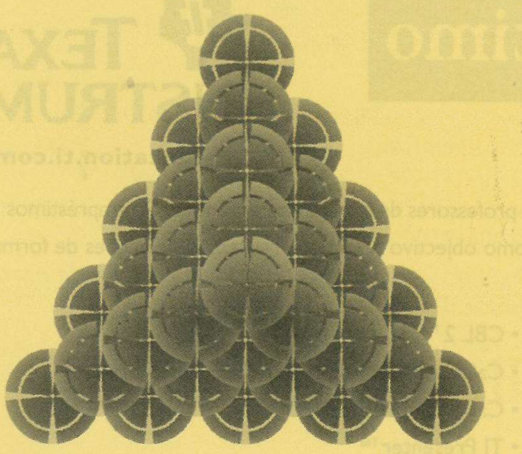

Figura 2

tica está lentamente a ser substituído por outro.

Segundo alguns críticos, há o aspecto tempo implícito na noção de prova: uma prova só é entendida como sendo uma demonstração se apenas se usar os meios aceites até à época. Se, por exemplo, é introduzido um novo axioma numa teoria e se este se tornar largamente aceite, então o conceito de demonstração tornar-se-á mais extenso no sentido de podermos passar a decidir mais questões. O uso de computadores pode, daqui a uns tempos, tornar-se num destes meios aceites. Há quem já pense que, numa futura geração, nada será aceite em matemática a não ser que seja *demonstrado* por computador(?).

qualquer matemático paciente e competente possa ser capaz de verificar que todos os passos estão correctos.

Onde entram os computadores? Estes ajudam-nos em muitos caminhos: calcular, resolver, explorar e simular; esboçar curvas e superfícies. Por demonstração feita por computador, muitas vezes, entende-se as que não se podem verificar com papel-e-lápis pelo caminho tradicional. E se o computador comete erros? Existem vários tipos de erros: dados mal introduzidos, erros de programação, bugs não detectados no compilador e erros de *hardware*. Como sabemos que não existem erros de *software* ou de hardware numa demonstração? A resposta é curta: não sabemos.

Como verificar a (in)validade duma demonstração por computador? Uma maneira de testar, mas não demonstrar, é usar diferentes programas, ou diferentes máquinas; isto foi feito no teorema das quatro-cores por Frank Allaire da University of Manitoba, no Canadá. Outra maneira é o *teste do tempo*. É simples mas fundamental de que com uma falsa premissa podemos chegar a contradições. Se o teorema das quatro-cores é falso mas, acreditando que é verdadeiro, o usamos para provar outros teoremas, um destes pode contradizer alguns factos bem estabelecidos. Se tal contradição nunca surgir, fortificará a crença no resultado do computador.

O uso do computador nas demonstrações introduz um novo elemento de incerteza para os matemáticos. Isto é o preço que temos de pagar pela utilização de tão maravilhosa ferramenta de trabalho. Como dizia Lam, *Assim como os físicos aprenderam a viver com incertezas, também nós matemáticos deveremos aprender a viver com demonstrações incertas*.

Uma grande preocupação numa demonstração é a questão do comprimento desta. Pode acontecer que a demonstração mais curta não possa ser verificada no período de vida de um ser humano na sua totalidade, por ser muito longa; não conhecemos ainda nenhum importante ou interessante teorema nestas condições. Por outro lado, pode acontecer que para essas demonstrações muito longas haja uma demonstração curta do tipo *aqui está uma demonstração*. Mas a possibilidade é que algumas destas proposições (como o teorema das quatro-cores) não tenham uma demonstração do tipo tradicional. Appel e Haken defendem a seguinte ideia: *A nossa demonstração do teorema das quatro-cores sugere que deve haver limites no que pode ser demonstrado na Matemática apenas com o método tradicional de papel-e-lápis*. Se rejeitarmos as demonstrações por computador, sujeitamo-nos a rejeitar algumas verdades que só podem ser demonstradas por meios não tradicionais.

É interessante ver que este tipo de demonstrações - envolvendo intensamente computadores - ainda é olhado de lado por muitos matemáticos, como John Conway—e até mesmo rejeitado por alguns—não por desconfiarem da sua validade, mas certamente por estarem a compreender que um certo estilo de fazer matemá-

Nota

1 Inserido no meu Relatório de uma aula teórico-prática no âmbito das Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica, pela UMa em 1999, orientado pelo Prof. J. Sousa Ramos do IST e com o apoio do POPRAM III e Citma.

Bibliografia

W. Haken. An attempt to understand the four colour problem. *Journal of graph theory, (1), 193*, 1977.

C.W.H. Lam. The search for finite projective plane of order 10. *Canadian journal of mathematics*. 61. 1117, 1989

J. Orlando Freitas. A demonstração por computador. *Jornal de Mathemathica Elementar*, 107, 1991

J. Orlando Freitas. Uma demonstração por computador. *Proceedings* do Congresso da Soc. Portuguesa de Matemática em 1995

J. Orlando Freitas. Dificuldade na visualização de objectos matemáticos. *Revista do Professor de Matemática nº 29*, Sociedade Brasileira de Matemática, pgs. 9–12, 1995

J. Orlando Freitas. Aplicações de Fibonacci: Trabalho de Síntese no Âmbito das Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica, Universidade da Madeira, 1999

R. Penrose. *Mente Virtual*. Gradiva, 1997

J. Sousa Ramos. Os objectivos do ensino da matemática em 2001: ensinar ou aprender? *Educação e Matemática*, (50): 21-24, Nov. APM: 1998

Ian Stewart. *Os problemas da Matemática*. Gradiva, 1996

Eduardo Veloso. Secção de Tecnologias na Educação Matemática. Educação e Matemática, (49). APM: 1998

J. Orlando Freitas
Universidade da Madeira