

A photograph of two children dressed as firefighters. The child on the left wears a helmet with the number '222' and a vest with a calculator keypad graphic. The child on the right wears a helmet with the number '135' and a vest with a calculator keypad graphic. They are standing outdoors in front of a building and trees.

Em defesa da utilização da calculadora algoritmos com sentido numérico

Cristina Loureiro

Actualmente quando se fala da utilização ou não da calculadora reduz-se praticamente a discussão à oposição entre cálculo algorítmico e cálculo com o recurso à calculadora. A meu ver esta dicotomia é falaciosa, não esclarece as dimensões da problemática subjacente e não oferece pistas para podermos avançar. O cálculo tem, tanto na escola como na vida de todos os dias várias dimensões que importa conhecer melhor e relacionar, para compreender realmente o que está em causa e perspectivar formas de actuação didácticas.

No dia a dia, os comuns mortais, mesmo aqueles que se consideram exímios no cálculo, recorrem tanto ao cálculo mental como à calculadora. Em situações muito particulares recorrerão a um algoritmo. Penso em mim. Num restaurante, para saber quanto cabe a cada um num total de 75 euros para 9 pessoas, eu penso 72 dá 8 euros, porque $8 \times 9 = 72$, mais meio euro para cada um, dá mais 4,5, o

que faz um total de 76,5 euros. Fica assim, 1,5 de gorjeta e cada um paga 8,5 euros. E recorro sempre a produtos, somas e diferenças, seja qual for o valor em questão. E se pensar bem são poucas as outras situações em que tenho necessidade de obter valores de operações. O mais frequente é haver uma máquina que me dá valores exactos, e o que eu tenho de fazer, e faço muitas vezes, é avaliar a ordem de grandeza do resultado recorrendo à estimativa e ao cálculo mental com números mais favoráveis. Esporadicamente vivo situações de espanto, como por exemplo na padaria, por fazer mais depressa mentalmente as contas do que a senhora da velha guarda que recorre à calculadora. No saldos obtenho logo um valor aproximado antes do vendedor, velho ou novo, me dizer, com ares aliantes, qual é o preço por que me vai ficar. E nunca, nunca, uso algoritmos como recurso para cálculo mental. E sei do que estou a falar. E ando sempre com uma calcu-

ladora no bolso porque apesar da minha perícia em cálculo pode surgir sempre um problema interessante para explorar em que os cálculos de papel e lápis só vão perturbar.

Na escola as coisas já não são tão simples. Embora a expressão mais vulgar seja *as contas*, devemos distinguir cálculo mental, cálculo com algoritmos e cálculo com o recurso à calculadora. E importa também considerar o que se passa com os professores e com os alunos. Vou situar-me no 1º ciclo e em Portugal.

Os professores, de uma maneira geral recusam usar a calculadora, é uma espécie de ponto de honra, "*Calculadora, eu? Não obrigada!*". Nem sabem o que estão a perder. Quanto ao cálculo mental são dominantes as tentativas de o realizar fazendo os algoritmos de cabeça, sem recorrer ao papel e lápis. Muitas vezes desconhecendo ou então desvalorizando os processos e estratégias pessoais de cálculo mental, relacionados com os números em questão. Quando os números se complicam e os decimais intervêm, há algum mal estar, aparecem alguns erros, e permanece a recusa à calculadora. Não é nada apetecível calcular mentalmente o total a receber de 176 alunos em que cada um paga 2,35 euros. Então surge, para eles, a necessidade de recorrer ao cálculo de papel e lápis com recurso a um algoritmo.

Quanto aos alunos, em meu entender, a situação complica-se. Cálculo mental não existe. Entendendo o cálculo mental como o desenvolvimento de estratégias pessoais de cálculo que levem uma pessoa a gostar de calcular mentalmente, dominando a aptidão para calcular, aproveitando as características dos números e o que já sabe sobre eles, e recusando pegar numa calculadora para saber quanto é 12×13 , ou $156 + 34$, ou $76 : 4$. Cálculo com a calculadora não há, porque se receia que os alunos não aprendam a calcular. E assim, todos os problemas desafiantes e interessantes, capazes de estimular os alunos para o gosto por resolver problemas, por pensar, por conhecer e dominar os números não podem estar presentes. Sem recorrer a uma calculadora, ninguém se atreve a pedir a um aluno que calcule quantos dias já viveu, ninguém os desafia para saber quanto pesam os alunos da turma todos juntos, ou quanto rende um jogo no novo estádio do Benfica se cada espectador pagar 15 euros pelo bilhete. A lista de problemas e questões desafiantes que podemos apresentar a miúdos do 1º ciclo é interminável, e eles estão ávidos de desafios destes. Disto não tenho qualquer dúvida porque tenho passado muito do meu tempo em salas do 1º ciclo. Mas pobres destas crianças, não lhes são propostas situações significativas e estimulantes porque os seus professores receiam que eles não aprendam a tabuada, nem a usar os algoritmos.

Em meu entender os algoritmos dominam da maneira errada a matemática no 1º ciclo. Há anos que defendo a utilização da calculadora na aprendizagem da matemática pelas potencialidades de resolução de problemas e de investigação que ela traz. Referindo sempre que a sua utilização deve ser associada ao desenvolvimento de capacidades de estimativa e de cálculo mental. E valorizando também o desenvolvimento do raciocínio algorítmico por ser intrínseco à natureza do raciocínio humano e à natureza da matemática.

A via que escolhi para lançar novas ideias nesta discussão passa por desmontar os algoritmos e é isso que me proponho fazer.

Este texto é dedicado a todos os meus alunos que se debatem com as dúvidas de quem se sente pressionado a ensinar o que mal sabe usar e não compreende como funciona e que experimenta, simultaneamente, a atracção de querer ensinar pelo desafio, pelo desenvolvimento, pelo gosto de aprender e de saber, pela criatividade, pelo esforço e também pelo prazer. É dedicado também a todas as crianças portuguesas que esperam avidamente nas escolas do 1º ciclo que os seus professores os ensinem a usar a matemática para pensar melhor e assim serem cidadãos mais felizes e realizados.

Algoritmos

Um algoritmo pode ser considerado como um procedimento ou sequência de procedimentos, com um número finito de passos, destinado a executar uma tarefa que se deseja realizar. (Usiskin, 1998, p. 7). Exemplos de algoritmos podem ser encontrados através da história, desde os tempos mais remotos dos antigos babilónicos. Considera-se que a palavra algoritmo deriva do nome do matemático árabe do século nono al-Khowārizmi. Os algoritmos mais conhecidos e divulgados são os algoritmos para as quatro operações, mas há muitos, muitos outros algoritmos e o desenvolvimento tecnológico está intimamente ligado ao estudo e construção de algoritmos.

Há anos que estudo algoritmos, sozinha ou com os meus alunos, que os procuro saber usar, dominar e compreender do ponto de vista dos seus fundamentos matemáticos e das suas perspectivas didácticas. Vou analisar algoritmos das quatro operações aritméticas básicas para depois retomar o papel que eles poderão ter na escola. Nesta discussão chamarei algoritmo dominante para uma determinada operação ao algoritmo cuja utilização é mais comum em Portugal. Os outros serão algoritmos alternativos e, sempre que possível, serão designados por uma característica significativa dos seus procedimentos.

Os fundamentos matemáticos dos algoritmos dominantes das operações aritméticas são as características do próprio sistema de numeração decimal e as propriedades das operações. E é interessante perceber como estes aspectos estão presentes num algoritmo para compreender as dificuldades que os alunos poderão ter na sua utilização e compreensão.

O reflexo do sistema de numeração decimal num algoritmo evidencia-se na decomposição dos números que nele intervêm, na obrigação de trabalhar ordem a ordem e na recomposição ou reagrupamento das unidades de uma determinada ordem quando o seu número é, ou precisamos que passe a ser, igual ou superior a 10. Esta acção matemática do reagrupamento é informalmente reconhecida como o transporte. Aliás é comum ouvirmos os professores distinguir algoritmo com transporte de algoritmo sem transporte. O algoritmo é o mesmo, os números em causa é que podem exigir, ou não, a necessidade de reagrupamento. As propriedades das operações permitem justificar muitos

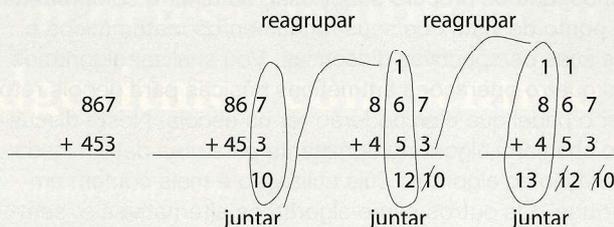
dos procedimentos que constituem um algoritmo, como veremos.

Um outro aspecto que também estará presente na discussão que vou apresentar é o sentido da operação em jogo no algoritmo. Sendo hoje reconhecido e estudado que para uma operação aritmética pode haver mais do que um sentido (Ponte e Serrazina, 2000) é natural que discutamos qual é o sentido que está ou não presente na realização de um determinado algoritmo e, por isso, quais são as situações e problemas que poderão facilitar o trabalho com esse algoritmo.

Outra ideia que nunca será demais reforçar, é que na utilização de qualquer algoritmo há sempre uma componente de cálculo mental. Imaginar que alguém poderá desenvolver o seu poder de cálculo com algoritmos sem desenvolver, previamente e depois em paralelo, as suas capacidades de cálculo mental é comparável a pensar que um atleta se prepara para o pentatlo sem praticar as várias modalidades que o compõem.

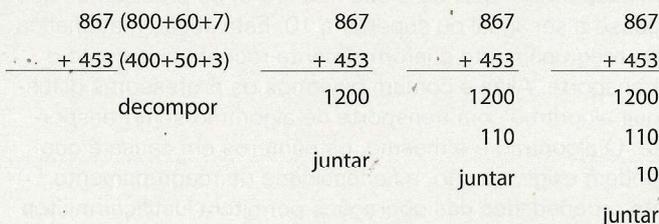
Algoritmos para a adição

Para discutir os algoritmos vamos partir de situações descontextualizadas e, por isso, o sentido mais adequado a dar à adição é o de combinar. Porém, nesta discussão, designarei uma das acções realizadas por juntar visto este termo me parecer bastante significativo para o que é realmente feito. O algoritmo dominante para a adição é simples mas envolve na sua utilização uma conjugação permanente de juntar e reagrupar que interessa discutir.

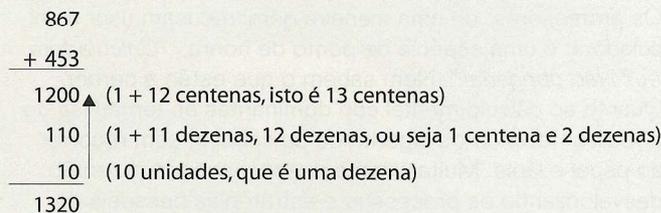


A soma é 1320. Notamos que as unidades de cada ordem foram juntas e imediatamente reagrupadas. As duas acções matemáticas fundamentais, juntar e reagrupar, foram realizadas alternadamente. Esta sequência de procedimentos exige que se trabalhe da direita para a esquerda. Esta orientação de todo o trabalho, garante que, quando se juntam as unidades da ordem maior, neste exemplo, as centenas, tem-se o resultado final escrito correctamente no sistema de numeração decimal.

Observemos agora a interpretação de um algoritmo de somas parciais. São três as acções matemáticas que vão ser executadas: decompor, juntar e reagrupar.



Neste momento acabei de juntar as unidades de cada ordem e tenho o resultado final, porém este não obedece às regras de escrita do sistema de numeração decimal. Tenho 12 centenas, 11 dezenas e 10 unidades. O que ainda tenho a fazer é reagrupar as unidades de cada ordem. O reagrupamento tem de ser agora feito com a orientação da direita para a esquerda. Explicitando o meu raciocínio mental de reagrupamento ao lado terei uma apresentação única deste algoritmo com o seguinte aspecto:



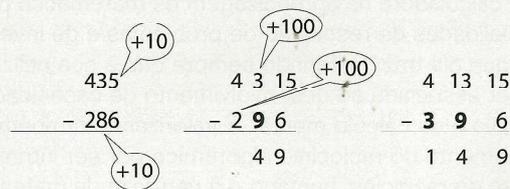
Nesta explicitação do algoritmo percebe-se que trabalhei também ordem a ordem, tendo consciência em cada soma parcial da ordem de grandeza que estava em causa. Na primeira soma parcial juntei 8 centenas com 4 centenas, obtendo 12 centenas, e assim sucessivamente. Trabalhei da esquerda para a direita o que é mais coerente com a nossa forma de escrita e mais coerente com o próprio sentido da operação. É reconhecida uma tendência intuitiva para juntar começando do maior para o menor.

A única, e não é pequena, diferença entre este algoritmo da adição e o algoritmo dominante é que aqui primeiro decompou, depois junto tudo, ordem a ordem do maior para o menor e depois reagrupou. Esta característica permite-me trabalhar da esquerda para a direita porque o reagrupamento apenas no final faz o controle adequado do resultado obtido. A utilização de material adequado para compreender estes dois algoritmos, o *Mab*, ilustra muitíssimo bem a conjugação das duas acções matemáticas presentes, juntar e reagrupar.

O aspecto mais significativo que importa evidenciar neste algoritmo é que o sentido numérico, que inclui o sentido dos números e o sentido da operação, não se perde na mecanização, como aconteceu com o algoritmo dominante.

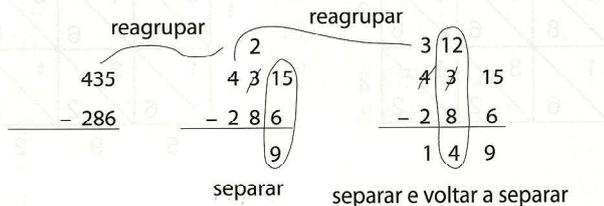
Algoritmos para a subtracção

Começo por registar que em Portugal quase toda a gente aprendeu, e aprende ainda, um algoritmo da subtracção que recorre a uma propriedade pouco intuitiva da subtracção, a propriedade da invariância do resto. Incapazes de explicar este facto inexplicável às crianças, os professores arranjam menmónicas mais ou menos tolas para as crianças decorarem os procedimentos do algoritmo. Registado com mais informação do que é habitual, a apresentação deste algoritmo seria:



Este algoritmo é designado por algoritmo de compensação. A sua interpretação, à luz das propriedades da subtração, é a de que realizamos a diferença $545 - 396$ em vez de $435 - 286$, porque adicionámos o mesmo número, $10 + 100$, ou seja 110 , ao subtrativo e ao aditivo. Sabemos que podemos fazer isto pela propriedade da invariância do resto que nos garante que se mantém a diferença quando adicionamos o mesmo número aos dois termos de uma subtração.

O algoritmo para a subtração que vou considerar como dominante é o mais análogo ao dominante para a adição e é habitualmente designado por algoritmo de decomposição. Às diferenças vou atribuir o sentido de separar.



Neste algoritmo, de forma análoga ao da adição, recorre-se alternadamente às duas acções matemáticas, separar e reagrupar. A diferença é que o reagrupamento precede a separação na medida em que preciso, para cada ordem, de ter um número de unidades igual ao superior ao número que quero separar para poder fazer esta acção. Se de 5 não posso separar 6, preciso de ir buscar uma unidade à ordem seguinte, reagrupando, para ficar com 15 unidades e então poder separar 6 e ver que ficam 9, o número que é escrito no resto, na ordem correspondente. Este tipo de raciocínio prolonga-se por todas as ordens, da direita para a esquerda, até chegar à ordem de maior valor. Esta sequência de procedimentos garante, como vimos para a adição, o resultado final escrito no sistema de numeração decimal.

Observemos agora a interpretação de um algoritmo de diferenças parciais.

$$\begin{array}{r}
 435 \\
 - 286 \\
 \hline
 200 \quad (\text{de 4 centenas separo 2 e ficam 2 centenas}) \\
 - 50 \quad (\text{faltam 5 dezenas porque preciso de tirar 8 e só tenho 3}) \\
 - 1 \quad (\text{falta 1 unidade porque preciso de tirar 6 e só tenho 5}) \\
 \hline
 149
 \end{array}$$

Neste momento acabei de separar as unidades de cada ordem e tenho o resultado final, porém este não obedece às regras de escrita do sistema de numeração decimal. Passo então à acção de reagrupar e posso ter um registo final do seguinte tipo.

$$\begin{array}{r}
 435 \\
 - 286 \\
 \hline
 200 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 150 \\
 - 50 \\
 - 1 \\
 \hline
 149
 \end{array}$$

Este algoritmo de diferenças parciais não estragou os números de partida, porque não precisou de fazer reagrupamentos das unidades de cada uma das suas ordens. Os números ficaram intactos. O sentido da subtração, neste caso mudar juntando, sobrepôs-se e dominou o raciocínio, em paralelo com o sentido numérico do valor real de cada ordem. À semelhança do que foi discutido para o algoritmo das somas parciais, não é um algoritmo de pura mecanização porque a sua compreensão é acessível, passível de ser manipulada e muito significativa.

Há um outro algoritmo alternativo para a subtração muito interessante. Em inglês é designado por *adding up* que podemos traduzir por *adição de baixo para cima*. Este algoritmo está ligado ao sentido de *tomar igual* da subtração.

$$\begin{array}{r}
 286 \quad 4 \\
 290 \quad 10 \\
 300 \quad 100 \\
 400 + 35 \\
 \hline
 435 \quad 149
 \end{array}$$

Este algoritmo fundamenta-se na adição como operação inversa da subtração. O que fizemos foi obter o número que somado com 286 dá 435. Esta adição foi feita com significado e grande sentido numérico. Este algoritmo é a formalização do procedimento antigo para obter trocos.

O que eu gosto particularmente nestes algoritmos de somas e diferenças parciais, bem como neste último, é o grande sentido do número que está presente.

Algoritmos para a multiplicação

Passemos então à multiplicação. As coisas vão começar a ficar mais herméticas.

$$\begin{array}{r}
 483 \\
 \times 24 \\
 \hline
 1932 \\
 9660 \\
 \hline
 9660
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 483 \\
 \times 204 \\
 \hline
 1932 \\
 96600 \\
 \hline
 96600
 \end{array}$$

Na utilização deste algoritmo está totalmente ausente o sentido da multiplicação. Trabalha-se com os dois factores decompostos, calculam-se produtos sem qualquer significado e vai-se reagrupando as unidades de cada ordem obtida. Estas três acções, de natureza totalmente diferente, devem ser realizadas em cadeia e alternadamente, de modo análogo ao que vimos nos algoritmos dominantes anteriores. Não há qualquer apelo ao sentido numérico, nem controle ou avaliação dos vários cálculos intermédios que são realizados. A parcialidade dos registos dos resultados intermédios é uma dificuldade acrescida. O domínio de cálculo mental tem de ser grande, apesar de ser só o domínio da tabuada, porque eu calculo 4×3 , mas não registo 12, registo apenas 2 e reagrupo as unidades numa dezena que devo depois adicionar a 4×8 , sem perceber que passei a trabalhar com dezenas. E assim por diante. Ao esgotar os produtos referentes às unidades do factor activo, o multiplicador, fica completa uma linha. E passa-se para a linha debaixo, deixando a ordem das unidades vaga

porque se vai passar a trabalhar com dezenas. Mas quem sabe este porquê? Se o factor activo fosse 204 teríamos deixado duas ordens vagas porque passaríamos a trabalhar com centenas. Depois destes registos de produtos, a adição destes produtos intermédios segue a orientação do algoritmo dominante da adição, com os devidos cuidados de considerar as posições vagas das ordens como correspondentes a zero unidades nessa ordem.

Analisemos um algoritmo alternativo de produtos parciais.

483	(400 + 80 + 3)
x 24	(20 + 4)
8000	(2 dezenas vezes 4 centenas são 8 milhares)
1600	(2 dezenas vezes 8 dezenas são 16 centenas)
60	(2 dezenas vezes 3 unidades são 6 dezenas)
1600	(4 vezes 4 centenas são 16 centenas)
320	(4 vezes 8 dezenas são 32 dezenas)
12	(4 vezes 3 unidades são 12 unidades)

A soma destas parcelas todas não oferece grandes questões. Ela pode ser abordada como adição com reagrupamentos. A escrita do resultado final, 11592, pode surgir numa linha final de uma vez só, ou, por partes se o reagrupamento for feito ordem a ordem.

Este algoritmo também parte da decomposição dos factores em causa. Porém, cada produto parcial obtido tem um forte sentido numérico que está ligado aos produtos por potências de 10. Há mais compreensão e sentido numérico do que mecanização. É verdade que o sentido da multiplicação também está oculto, mas o valor do cálculo mental com potências de dez é uma mais valia. Do ponto de vista de registos é muito claro e não recorre à cadeia cálculo-reagrupamento-cálculo-reagrupamento, ... tão exigente no algoritmo dominante. Facilita o controle de cálculo e permite a compreensão da influência das ordens na multiplicação.

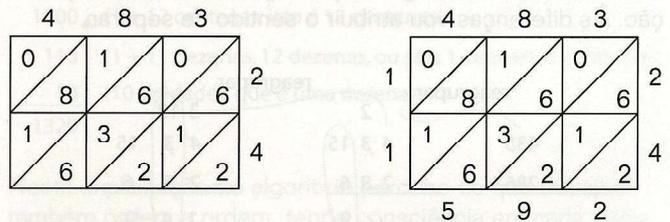
Há um outro algoritmo para a multiplicação, conhecido entre nós por *algoritmo de gelosia*, que combina defeitos e virtudes dos dois algoritmos que discutimos. A sua utilização é hermética, não se percebe logo porque funciona, no entanto permite o registo de produtos parciais sem necessidade de fazer reagrupamentos mas também sem sentido numérico. A forma de registo dos produtos parciais facilita a obtenção do resultado final como soma dos produtos parciais obtidos. Vejamos a sua utilização.

Constrói-se uma rede rectangular, neste caso de 3 por 2, porque um dos números tem 3 algarismos e o outro tem 2.



Construída esta rede rectangular, em cada célula será registado o produto dos números da linha e da coluna correspondentes. Como esse produto poderá ter mais do que um algarismo, mas nunca mais do que dois algarismos, divide-se cada célula em duas partes.

Regista-se agora em cada célula o produto correspondente, sem qualquer preocupação de ordem de preenchimento. No caso do produto ser inferior a dez, pode colocar-se um zero na parte superior da célula. Também não há cálculos escondidos nem reagrupamentos.



Adicionam-se agora os números que estão em diagonal, da direita para a esquerda, e fazendo os reagrupamentos quando necessário.

Este algoritmo tem a virtude de ser muito simples de usar, mesmo sem ser compreendido, e de os alunos gostarem de o usar quase como um jogo.

Algoritmos para a divisão

Temos vindo a analisar algoritmos passo a passo, tentando mostrar como, à medida que a operação é mais elaborada, os algoritmos se complexificam, a sua compreensão fica mais difícil e fica mais obscurecido o sentido da operação. Para a divisão vou seguir uma orientação diferente. Até aqui todos os cálculos foram feitos no vazio, os números trabalhados foram apresentados despidos de qualquer significado. Para discutir algoritmos da divisão parece-me mais interessante partir de situações muito simples mas que permitem atribuir significado aos números, às operações e aos resultados obtidos.

Perante um problema do tipo "quero fazer equipas de 3 meninos com os alunos da turma, são 25 meninos, quantas equipas posso fazer?", uma criança do 1º ano será capaz de registar sem grande dificuldade uma coluna de números, depois contará quantos 3 escreveu e dirá que são 8 equipas e que sobra um menino.

Outra criança poderá pensar de forma mais eficaz, fazendo logo mais do que uma equipa de cada vez e registando o número de equipas que está a fazer.

Qualquer criança que faça um registo deste tipo revela um raciocínio mental organizado e uma capacidade de comunicação escrita do que está a pensar muito rica. Está a percorrer pelos seus passos, e por isso com segurança, um bom caminho. Este é o percurso do algoritmo da divisão por subtracções sucessivas, também conhecido entre nós por algoritmo americano e felizmente já ensinado e aceite

25 meninos

③

22

③

19

③

16

③

13

③

10

③

7

③

4

③

1

equipas de 3

25 meninos

12 4 equipas

13

12 4 equipas

1 8 equipas

por alguns professores. Neste algoritmo, cuja compreensão está ligada ao sentido de medida da divisão (quantas vezes o divisor cabe no dividendo), o utilizador trabalha com o dividendo e o divisor sem os decompor e recorre a múltiplos conhecidos do divisor. Assim, a utilização deste algoritmo é pessoal e está ligada ao domínio que cada um tem dos múltiplos e dos produtos por potências de 10. Com números maiores este domínio torna-se mais evidente como poderemos observar numa outra situação.

Os 1721 alunos do 1º ciclo da Vila Azul vão fazer uma excursão de autocarro. Cada autocarro leva 75 meninos. Quantos autocarros são precisos?

$$\begin{array}{r}
 75 \quad 1721 \\
 \underline{\quad - 750} \quad 10 \\
 \quad 971 \\
 \underline{\quad - 750} \quad 10 \\
 \quad \quad 221 \\
 \underline{\quad - 150} \quad 2 \\
 \quad \quad \quad 71 \quad 22
 \end{array}$$

Desafio-vos a usar este algoritmo para cálculos com números decimais. Mas com números com significado, não em situações do tipo "vou dividir 2356,68 por 50,79" sem que estes números sejam mais do que símbolos. Por exemplo, com 374,5 kg de amêndoas quantos pacotes de 0,375 posso fazer? E já estamos a ceder nos números, quem chega ao preciosismo de fazer pacotes de 375 gramas de amêndoas?

Analisemos agora o algoritmo dominante. A explicação do tipo de acções em jogo complica-se agora e é muito difícil apresentá-la sem qualquer apoio oral. Convivo o leitor a experimentar e a notar que se mantém a alternância entre

a decomposição do dividendo e a sua divisão pelo divisor. Chamo atenção para o facto de que se trabalha todo o algoritmo com o dividendo e o divisor decompostos e se obtém também um quociente decomposto, tudo isto sem qualquer sentido numérico dos números em jogo. O próprio sentido da divisão, que está presente no algoritmo alternativo apresentado, está aqui praticamente ausente, aparecendo só ao de leve na obtenção de cada um dos algarismos do quociente.

$$\begin{array}{r}
 1721 \quad \underline{75} \\
 \quad \quad 2 \\
 \hline
 1721 \quad \underline{75} \\
 \quad \quad -150 \quad 2 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 221 \\
 \hline
 1721 \quad \underline{75} \\
 \quad \quad -150 \quad 22 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad 221 \\
 \quad \quad \quad \quad -150 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad 71
 \end{array}$$

Cada algarismo do quociente foi obtido sem qualquer sentido numérico. Nem sequer houve uma ideia inicial da ordem de grandeza do quociente. O que poderia ter sido obtido facilmente se tivesse sido feito uma análise prévia da relação entre o dividendo e o divisor, 10 seria pouco para o divisor, porque $10 \times 75 = 750$, 100 seria demais porque $100 \times 75 = 7500$. Assim se poderia ter imediatamente concluído que o quociente seria um número entre 10 e 100, isto é, um número da ordem das dezenas, ou dito de uma maneira mais informal, um número de dois algarismos. Este tipo de análise nunca é feito, mas ele é uma garantia de segurança, nomeadamente em situações mais críticas, quando é preciso registar que há zero unidades de uma determinada ordem no quociente, como por exemplo em $20200 : 200$.

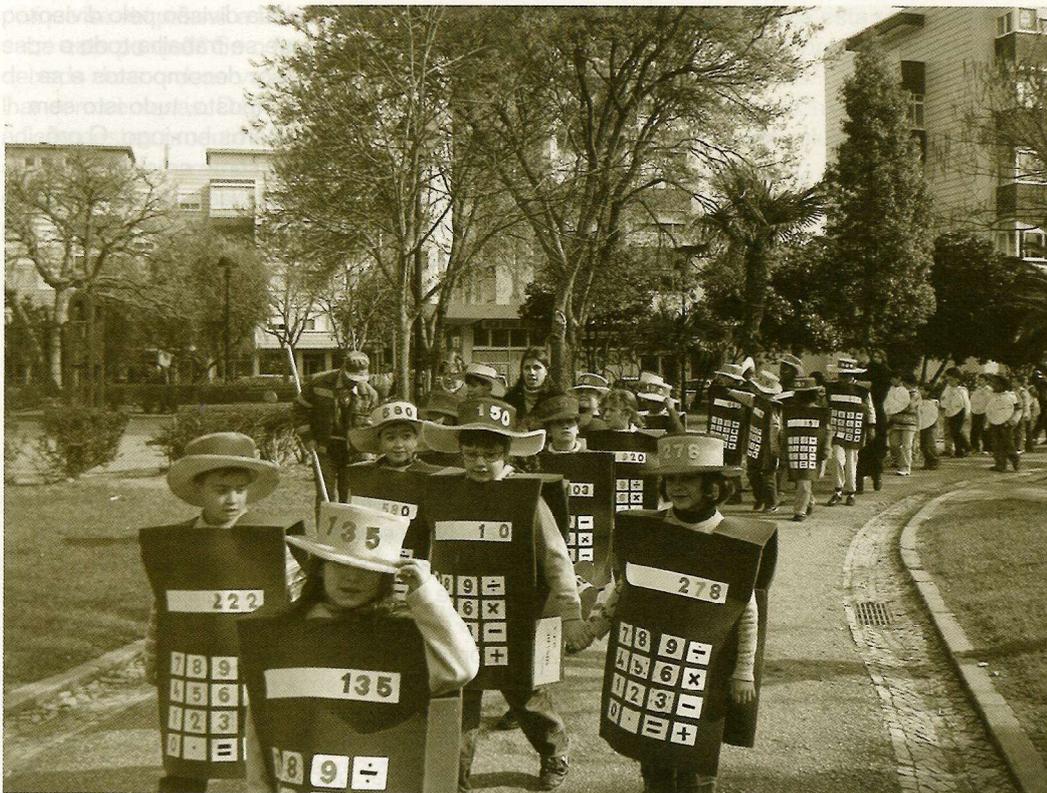
$$\begin{array}{r}
 20200 \quad \underline{200} \\
 \quad \quad 1 \\
 \hline
 20200 \quad \underline{200} \\
 \quad \quad -200 \quad 10 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 20 \quad 200 \\
 \quad \quad \quad \quad -200 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

20 não chega para fazer um grupo de 200

A maior parte das pessoas enganar-se-á se quiser obter este quociente recorrendo ao algoritmo sem fazer ideia da ordem de grandeza do quociente. Por isso, seja qual for o algoritmo que se utilize, uma estratégia de segurança é obter previamente a ordem de grandeza do quociente fazendo produtos por potências de 10 do divisor. Neste caso ter-se-ia concluído rapidamente que o quociente seria da ordem das centenas e estaria muito próximo de 100, visto que $100 \times 200 = 20000$. Esta estratégia de avaliação prévia da ordem de grandeza do quociente pode traduzir-se na marcação de casas na posição do quociente ao iniciar o algoritmo.

$$20200 \quad \underline{200}$$

Estranhamente os cálculos com potências de 10 estão explicitamente referidos nos programas do 1º ciclo, mas



este tipo de análise de resultados não é feito e não é desenvolvida a capacidade de cálculo mental com estes valores.

Eficácia dos algoritmos e cálculo com sucesso

Quero notar que todos os algoritmos alternativos que apresentei são generalizáveis e utilizáveis com números decimais. Como a prática da sua utilização está associada ao domínio do funcionamento do sistema de numeração decimal e ao sentido do número, eles tornam-se de facto eficazes e seguros quando trabalhamos com números decimais.

E se aliarmos a esta segurança o gosto por trabalhar com os números e a confiança que advém de fazer coisas com sentido, acho que podemos acreditar que crianças que aprendam a trabalhar com os números de uma forma aberta desenvolverão todas, ou pelo menos muitas das capacidades numéricas que desejamos.

Nos dias de hoje é difícil defender a eficácia de um algoritmo mais potente em detrimento de um algoritmo menos eficaz, mas mais compreensível.

Para ajudar esta discussão, destaco algumas ideias importantes ligadas à utilização de algoritmos alternativos. *"Apesar de ser vantajoso para todos os alunos saber pelo menos um algoritmo para cada uma das operações, os algoritmos standard ensinados na escola não são na maior parte das vezes os mais apropriados ou mais compreensíveis. Embora sejam eficazes, o significado dos algoritmos*

standard é muitas vezes obscuro para os alunos que os aprendem sem compreender" (Carroll e Porter, p. 107).

Estes autores apontam ainda que também os professores poderão vir a gostar mais de algoritmos alternativos na medida em que são mais compreensíveis e a sua utilização pode ser um factor de sucesso para os seus alunos. Como Carroll e Porter, poderemos reconhecer facilmente que estes algoritmos estão mais próximos de procedimentos inventados pelos alunos quando se lhes dá a oportunidade de construir o seu raciocínio sobre as operações com números inteiros e decimais.

Kamii e Dominick (1998), que muito têm trabalhado sobre a aprendizagem do cálculo segundo uma perspectiva construtivista, apresentam evidências que as levam a afirmar convictamente que não só os algoritmos dominantes não são úteis à aprendizagem da aritmética, como escondem o desenvolvimento do raciocínio numérico dos alunos. E apontam duas razões para dizer porque consideram os algoritmos prejudiciais: estes encorajam os alunos a desistir dos seus próprios raciocínios e impedem as crianças de desenvolver o sentido do número.

Penso que a exploração matemática dos algoritmos que apresentei ajuda a compreender o valor destas afirmações. Todas estas ideias podem contribuir para reequacionar a discussão sobre a utilização da calculadora colocando um enfoque muito grande no ensino do cálculo. Problemática esta que precisa de mais atenção e discussão do que lhe temos dado. Em Portugal, a investigação realizada, os manuais utilizados, dados de formação de professores e

as provas de aferição permite-nos concluir que há uma dominância do cálculo com algoritmos sobre todos os outros tipos de cálculo. E sabemos também que o ensino precoce dos algoritmos dominantes enjeita muitas potencialidades de valorização e de construção de processos pessoais de cálculo.

É urgente alterar o modo como o cálculo está a ser ensinado passando a valorizar os processos de cálculo algorítmico que se aproximam dos processos utilizados com sentido pelas crianças na resolução de problemas e dando destaque ao ensino e prática de cálculo mental.

Em defesa da calculadora, em defesa dos alunos

Não tenho dúvidas que um ensino cego dos algoritmos só pode conduzir a uma utilização cega da calculadora visto que a prática dos algoritmos dominantes obscurece a compreensão do sentido das operações. Por outro lado, os algoritmos alternativos apresentados podem ajudar a reforçar o sentido de cada uma das operações e dão maior relevo à prática do cálculo mental compreensivo.

Se aliarmos a esta perspectiva os resultados da investigação que não reconhecem à utilização da calculadora quaisquer efeitos perniciosos no domínio do cálculo, e que, muito pelo contrário reforçam a ideia de que essa utilização ajuda a desenvolver capacidades e atitudes de resolução de problemas e de realização de investigações matemáticas, podemos concluir que o foco na nossa actuação deve ser sobre a utilização criativa da calculadora em paralelo com a aprendizagem significativa do cálculo.

Uma criança que, depois de alguns anos de escola, pega num calculadora para calcular $9:3$ revela sanidade mental, mas revela também que para ela os números e as operações são símbolos que nada significam. E digo que revela sanidade mental porque se me pedem para fazer um cálculo que não tem qualquer significado para mim e eu tenho à minha disposição uma máquina que o faz, a única atitude é usar a máquina para o fazer. Para mim o que é grave é perceber nesta atitude a total falta de conhecimento e interesse pelos números. Falta essa que é reveladora de uma grande pobreza do seu universo numérico e de um entendimento puramente mecânico do cálculo.

Quando vejo uma criança no 1º ano de escolaridade, ao fim de dois meses de escola, escrever contente a descoberta que fez

$$2+2=4+4=8+8=16+16=32+32=64$$

acredito que quando os professores conhecem os segredos dos números e trabalham para o seu desenvolvimento podem fazer o que quiserem das crianças, levando-as a gostarem de calcular com e sem calculadora, e o que é mais importante, a saber decidir quando devem ou não utilizá-la.

Referências bibliográficas

- Carroll, William M. e Porter, Denise (1998). "Alternative Algorithms for Whole-Number Operations". In *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics*, 1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, editado por Margaret J. Kenney, Lorna J. Morrow, pp. 106-114. NCTM, Reston, Virginia.
- Groves, Susie e Stacey, Kaye. (1998). "Calculators in Primary Mathematics Exploring Number before Teaching Algorithms". In *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics*, 1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, editado por Margaret J. Kenney, Lorna J. Morrow, pp. 120-129. NCTM, Reston, Virginia.
- Kamii, Constance e Dominick, Ann (1998). "The Harmful effects of algorithms in grades 1-4". In *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics*, 1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, editado por Margaret J. Kenney, Lorna J. Morrow, pp. 130-140. NCTM, Reston, Virginia.
- Ponte, João Pedro e Serrazina, Maria de Lurdes. 2000. *Didáctica da Matemática do 1º Ciclo*. Universidade Aberta, Lisboa.
- Ponte, João Pedro. 2003. Proibir a calculadora: Uma medida eficaz? *Educação e Matemática*, nº 75, pp. 43-44. APM, Lisboa.
- Usiskinj, Zalman (1998). "Paper-and-Pencil Algorithms in a Calculator-and-Computer Age". In *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics*, 1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, editado por Margaret J. Kenney, Lorna J. Morrow, pp. 7-20. NCTM, Reston, Virginia.

Cristina Loureiro
ESE de Lisboa