



## As cartas mal distribuídas

O Augusto pegou num baralho de 52 cartas. Entregou um montinho delas à Berta, outro à Cristina, mais um ao Domingos, ficou com algumas para ele e deixou as restantes em cima da mesa.

– Não temos todos o mesmo número de cartas – reclamou a Berta.

– Não faz mal – retorquiu o Domingos. – Se o Augusto dividir igualmente metade das suas cartas entre a Berta e a Cristina, depois a Berta fizer o mesmo com a Cristina e o Augusto e, finalmente, também a Cristina dividir igualmente metade das suas cartas entre o Augusto e a Berta, todos ficaremos com o mesmo número de cartas.

Quantas cartas tinha cada um inicialmente e quantas estavam em cima da mesa?

(Respostas até 15 de Julho)

## Enormes potências

O problema proposto no número 75 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

*O número 7 elevado a 7 elevado a 7 elevado a 7 é enorme. Quais são os seus dois últimos algarismos?*

*E quais são os dois últimos algarismos de 6 elevado a 6 elevado a 6 elevado a 6?*

*Que aconteceria se usássemos outros quatro números iguais, de 2 a 9?*

Por onde andam os entusiastas da resolução de problemas? É que para este, só recebemos três respostas: da Ana Neves, do Alberto Canelas (Queluz) e do António Lucas (Castelo Mendo). Em compensação, todas levam o problema até ao fim, incluindo as extensões, e a do Alberto é um verdadeiro tratado sobre este tipo de problemas, generalizando-o em várias direcções.

A primeira tentação é calcular o número...

7 elevado a 7 é 823543.

7 elevado a 823543 é já um número muitíssimo grande, com mais de 695 mil algarismos. Seria preciso um caderno bem grande só para o escrever. Calculá-lo, só com a ajuda de um bom computador.

Finalmente, 7 elevado a este último número é de tal modo grande que, actualmente, nem com os melhores computadores se conseguiria. O resultado é um número inimaginável, com mais algarismos do que o número de átomos do universo conhecido. Mesmo que conseguíssemos escrever um algarismo em cada átomo, não haveria átomos suficientes para o fazer.

Então, como fizeram os nossos dois leitores, vamos tentar descobrir regularidades nas terminações das potências de 7.

7 elevado a 1 termina em 07

7 elevado a 2 termina em 49

7 elevado a 3 termina em 43

7 elevado a 4 termina em 01

7 elevado a 5 termina em 07

7 elevado a 6 termina em 49

Não é preciso continuar. As terminações repetem-se de 4 em 4.

Imaginemos, por exemplo, que queremos saber a terminação de 7 elevado a 2002. Como 2002 é um múltiplo de 4 mais 2, a terminação vai ser a mesma de 7 elevado a 2, ou seja, 49.

Voltemos ao nosso problema.

Seja **A** = "7 elevado a 7", que já sabemos que termina em 43.

Mas, terminando em 43, **A** é um múltiplo de 4 mais 3, logo:

**B** = "7 elevado a **A**" vai ter a mesma terminação que 7 elevado a 3, ou seja 43.

Finalmente, o número procurado é "7 elevado a **B**". Como **B** é também um múltiplo de 4 mais 3, a sua terminação é igual à de 7 elevado a 3, ou seja, 43.

Para as potências de 6, o processo a seguir é o mesmo. Rapidamente descobrimos que as terminações se repetem com período 5.

| Expoente   | 5n | 5n+1 | 5n+2 | 5n+3 | 5n+4 |
|------------|----|------|------|------|------|
| Terminação | 76 | 56   | 36   | 16   | 96   |



Actividade 2

Logo,  $6^6$  termina em 56 (aliás, podíamos mesmo calculá-lo: é 46656).

Como este número é um múltiplo de 5 mais 1:

$6^6$  também termina em 56 e é portanto um múltiplo de 5 mais 1. Logo:

$6^{6^6}$  termina em 56.

Faltam agora os restantes casos, as terminações dos números do tipo  $N^{N^N}$  com N de 2 a 9.

Mas o Alberto Canelas não ficou por aqui. Resolveu investigar todos os

valores de N até 100 ... Eis o que obteve, sendo P o período e T a terminação. (Tabela 1)

E ainda foi mais longe. Investigou também os três últimos algarismos destas potências para N até 10. (Tabela 2)

| N  | P  | T   | N  | P  | T  | N  | P  | T  | N  | P  | T  | N   | P  | T  |
|----|----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|
| 1  | 1  | [1] | 21 | 5  | 21 | 41 | 5  | 41 | 61 | 5  | 61 | 81  | 5  | 81 |
| 2  | 20 | 36  | 22 | 20 | 96 | 42 | 20 | 56 | 62 | 20 | 16 | 82  | 4  | 76 |
| 3  | 20 | 87  | 23 | 20 | 47 | 43 | 4  | 07 | 63 | 20 | 67 | 83  | 20 | 27 |
| 4  | 10 | 96  | 24 | 2  | 76 | 44 | 10 | 56 | 64 | 10 | 36 | 84  | 10 | 16 |
| 5  | 1  | 25  | 25 | 1  | 25 | 45 | 1  | 25 | 65 | 1  | 25 | 85  | 1  | 25 |
| 6  | 5  | 56  | 26 | 1  | 76 | 46 | 5  | 96 | 66 | 5  | 16 | 86  | 5  | 36 |
| 7  | 4  | 43  | 27 | 20 | 83 | 47 | 20 | 23 | 67 | 20 | 63 | 87  | 20 | 03 |
| 8  | 20 | 56  | 28 | 20 | 96 | 48 | 20 | 36 | 68 | 4  | 76 | 88  | 20 | 16 |
| 9  | 10 | 89  | 29 | 10 | 69 | 49 | 2  | 49 | 69 | 10 | 29 | 89  | 10 | 09 |
| 10 | 1  | 00  | 30 | 1  | 00 | 50 | 1  | 00 | 70 | 1  | 00 | 90  | 1  | 00 |
| 11 | 10 | 11  | 31 | 10 | 31 | 51 | 2  | 51 | 71 | 10 | 71 | 91  | 10 | 91 |
| 12 | 20 | 16  | 32 | 4  | 76 | 52 | 20 | 36 | 72 | 20 | 96 | 92  | 20 | 56 |
| 13 | 20 | 53  | 33 | 20 | 13 | 53 | 20 | 73 | 73 | 20 | 33 | 93  | 4  | 93 |
| 14 | 10 | 36  | 34 | 10 | 16 | 54 | 10 | 96 | 74 | 2  | 76 | 94  | 10 | 56 |
| 15 | 2  | 75  | 35 | 2  | 75 | 55 | 2  | 75 | 75 | 2  | 75 | 95  | 2  | 75 |
| 16 | 5  | 16  | 36 | 5  | 36 | 56 | 5  | 56 | 76 | 1  | 76 | 96  | 5  | 96 |
| 17 | 20 | 77  | 37 | 20 | 17 | 57 | 4  | 57 | 77 | 20 | 97 | 97  | 20 | 37 |
| 18 | 4  | 76  | 38 | 20 | 16 | 58 | 20 | 56 | 78 | 20 | 96 | 98  | 20 | 36 |
| 19 | 10 | 79  | 39 | 10 | 59 | 59 | 10 | 39 | 79 | 10 | 19 | 99  | 2  | 99 |
| 20 | 1  | 00  | 40 | 1  | 00 | 60 | 1  | 00 | 80 | 1  | 00 | 100 | 1  | 00 |

Tabela 1.

| N | P   | T   | N  | P   | T   |
|---|-----|-----|----|-----|-----|
| 1 | 1   | [1] | 6  | 25  | 656 |
| 2 | 100 | 536 | 7  | 20  | 343 |
| 3 | 100 | 987 | 8  | 100 | 856 |
| 4 | 50  | 096 | 9  | 50  | 289 |
| 5 | 2   | 125 | 10 | 1   | 000 |

Tabela 2.