Xeque Mate!

Leonor Moreira, Núcleo do Projecto Minerva do DEFCUL

Quantos quadrados há num tabuleiro de xadrez?

A resposta imediata (mas incorrecta) é sessenta e quatro quadrados, uma vez que o tabuleiro de xadrez é habitualmente visualizado como uma matriz de oito linhas e de oito colunas de cujas intersecções resultam sessenta e quatro quadrados, alternadamente brancos e pretos. Mas um exame mais atento do tabuleiro revela que outros quadrados de diferentes tamanhos se podem identificar.

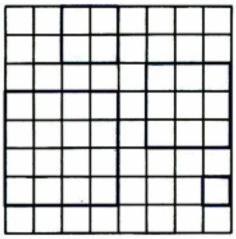

Figura 1

Uma forma de resolver o problema consiste em, pacientemente, contar todos os quadrados existentes no tabuleiro. Talvez não seja mau organizar, em tabela, os dados que formos obtendo. Começando pelos ''casos limite'', temos:

Tipo	Número
1×1	64
8×8	1

Tabela 1

A tabela 1 revela uma simetria curiosa: há 64 quadrados de área 1 e 1 quadrado de área 64. A confirmar-se, esta simetria evitará a contagem exaustiva dos quadrados. Mas continuemos.

Tipo	Número
1×1 (área 1)	64
2×2 (área 4)	49
....	.....
....	.....
7×7 (área 49)	4
8×8 (área 64)	1

Tabela 2

De facto, a Tabela 2 sugere a existência de 36 quadrados do tipo 3x3 (área 9) e 9 quadrados do tipo 6x6 (área 36). A correcção desta previsão permite-nos concluir:

Tipo	Número
1×1 (área 1)	64
2×2 (área 4)	49
3×3 (área 9)	36
4×4 (área 16)	25
5×5 (área 25)	16
6×6 (área 36)	9
7×7 (área 49)	4
8×8 (área 64)	1
TOTAL	204

Tabela 3

Uma outra abordagem

Uma outra forma de abordar a questão consiste em imaginar tabuleiros de xadrez de menores dimensões. O menor tabuleiro de xadrez é do tipo 1x1 e, obviamente, contém um único quadrado. Num tabuleiro 2x2, há quatro quadrados do tipo 1x1 e um quadrado do tipo 2x2, num total de cinco quadrados. Se o tabuleiro for do tipo 3x3 há que considerar: 9 quadrados do tipo 1x1, 1 quadrado do tipo 3x3 e quatro quadrados do tipo 2x2, como se vê na Figura 2.

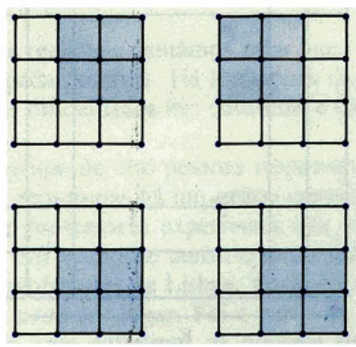

Figura 2

Na tabela 4, estão registados os resultados do problema para os quatro tabuleiros menores:

Tipo de Tabuleiro	N.º de Q. 1×1	N.º de Q. 2×2	N.º de Q. 3×3	N.º de Q. 4×4	N.º t. Q. quadrados
1×1	1				1
2×2	4	1			5
3×3	9	4	1		14
4×4	16	9	4	1	30

Tabela 4

Aqui chegados, é razoável conjecturar:

1) o número de quadrados de um determinado tipo é, sempre, um quadrado perfeito;

2) num tabuleiro de xadrez do tipo nxn o número de quadrados é $1^2 + 2^2 + 3^2 \dots + n^2$

Provando a conjectura

Resta, agora, provar esta última conjectura. Vamos tentar fazê-lo, usando o método de indução matemática.

1.º passo. Seja **n=1**. Num tabuleiro do tipo 1x1, há *apenas, como já vimos, 1 quadrado.* Como $1 = 1^2$, a conjectura é verdadeira para n=1.

2.º passo. Vamos admitir que a conjectura é verdadeira quando **n** é substituído por qualquer inteiro positivo **k**, isto é, vamos admitir que num tabuleiro do tipo **kxk** há $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2$ quadrados.

3.º passo. *Vamos provar que a conjectura se verifica,* ainda, para **n = k+1**, isto é, num tabuleiro do tipo **(k+1)x(k+1)** há $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2$ quadrados.

A Figura 3 representa um tabuleiro do tipo **(k+1)x(k+1)**. Este é formado por um tabuleiro do tipo **kxk** a que se adicionaram uma linha e uma coluna complementares, cujos quadrados aparecem, na figura, numerados de **1** a **2k+1**.

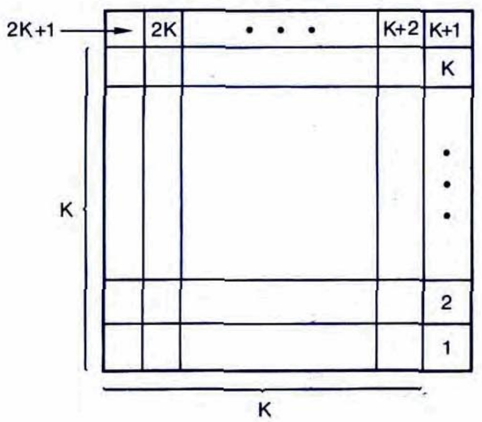

Figura 3

Os quadrados existentes neste tabuleiro podem ser agrupados em quatro categorias:

Categoria 1. Trata-se dos quadrados existentes no tabuleiro original — do tipo **kxk** — e, pelo segundo passo, o seu número é dado por:
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2$

Categoria 2. São os quadrados cujo topo está na linha adicional, sem que o lado direito ultrapasse o tabuleiro inicial. Há:

1 quadrado do tipo kxk
2 quadrados do tipo (k-1)x(k-1)
3 quadrados do tipo (k-2)x(k-2)
....
k quadrados do tipo 1x1

Nesta categoria, o número total de quadrados é, então,
$1 + 2 + 3 + \dots + k$

Categoria 3. Trata-se, agora, dos quadrados cujo lado direito está no limite da coluna adicional, sem que o lado superior ultrapasse os limites do tabuleiro original. Tal como no caso anterior, o seu número é dado por:

$1 + 2 + 3 + \dots + k$

Categoria 4. São os quadrados cujo vértice superior direito coincide com o canto superior direito do tabuleiro. Há, exactamente, **k+1** quadrados nesta categoria — um de cada um dos diferentes tipos, isto é, **1** do tipo **1x1**, outro do tipo **2x2**, ..., outro do tipo **kxk** e, finalmente, outro do tipo **(k+1)x(k+1)**.

O número total de quadrados do tabuleiro é, então:

$$(1^2+2^2+3^2+\dots+k^2)+2(1+2+3+\dots+k)+(k+1)$$

$$=(1^2+2^2+3^2+\dots+k^2)+2\,\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=(1^2+2^2+3^2+\dots+k^2)+(k+1)x(k+1)$$

$$=(1^2+2^2+3^2+\dots+k^2)+(k+1)^2$$

$$=[1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2]$$

Está, assim, completo o passo 3 e, portanto, fica provada a conjectura.

Uma expressão mais elegante

O número total de quadrados de um tabuleiro do tipo nxn é, então:

$$N=1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2+n^2$$

ou, sintetizando: $$N=\sum_{i=1}^{n} i^2$$

Podemos, ainda, traduzir este número por um polinómio. Para isso vamos atender ao teorema:

Toda a sucessão de números, cujas diferenças de ordem n+1 sejam nulas, é redutível a um polinómio de grau n:

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+z$$

Consideremos, então, os diferentes valores da função e respectivas diferenças:

f(x)	$\Delta_1 p$	$\Delta_2 p$	$\Delta_3 p$	$\Delta_4 p$
1	4	5	2	0
5	9	7	2	0
14	16	9	2	
30	25	11		
55	36			
91				

(continua na pág. 14)

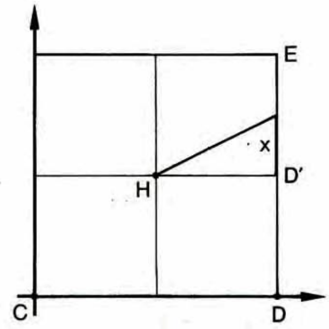

Figura 2

Então, e de Th < Tc, virá Ec / Eh > π, ou seja, a inequação $[(300 + x) / \sqrt{x^2 + 100^2}\,] > \pi$, cujo conjunto solução é o conjunto S=] 21.032092, 46.61894 [.

Constata-se assim, com alguma surpresa, que o prisioneiro tem as possibilidades de fuga indicadas a tracejado na figura 3.

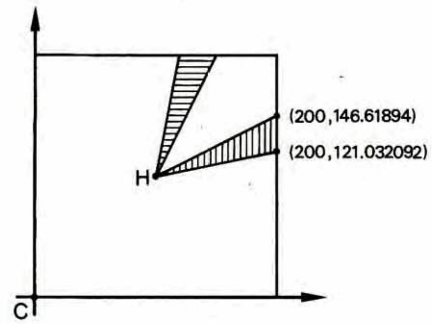

Figura 3

Note-se que a abordagem do problema apenas contemplou uma estratégia de fuga, talvez mesmo a mais simples, a mais linear; outras estratégias poderiam ter sido consideradas como, por exemplo, a hipótese do prisioneiro poder alterar a sua trajectória antes mesmo de chegar ao seu destino, ao ver que o cão ia chegar primeiro do que ele.

Quanto a mim, este problema só por si já é um bom problema a colocar aos alunos, não só pelo desafio que pode provocar quanto à procura de uma boa estratégia, mas também pelo conjunto de conhecimentos de Geometria e de Álgebra necessários para a sua resolução; porém, ele pode constituir ainda um belo exemplo da útil e vantajosa utilização do microcomputador na sala de aula -- como simulador de situações problemáticas. Creio mesmo que, se na simulação a apresentar aos alunos limitarmos os caminhos do prisioneiro (não deixarmos que o homem tome os caminhos que o conduzem à liberdade), ficaremos com um belíssimo começo de aula, onde os ingredientes de uma boa motivação estão associados a um bom problema para resolver.

Um problema, normalmente, tem várias formas de resolução e levanta sempre novas questões. Um problema dos problemas é mesmo tentar resolvê-los pelo processo mais simples e mais económico, bem como resolver as novas questões levantadas, porque mais complicadas e mais problemáticas. Relativamente a este problema do Cão e do Prisioneiro gostaria de deixar aqui a seguinte questão:

«Qual a velocidade que o cão precisa ter para que o homem, nas condições trabalhadas neste texto, não tenha hipóteses de fuga?».

Xeque Mate! (conclusão)

Pelo teorema anterior, conclui-se que:

$$\mathbf{N = an^3 + bn^2 + cn + d}$$

Atendendo a que f(0)=0, f(1)=1, f(2)=5 e f(3)=14, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + b + c = 1 \\ 8a + 4b + 2c = 5 \\ 27a + 9b + 3c = 14 \end{cases}$$

que conduzirá a:

$$\begin{cases} a = 1/3 \\ b = 1/2 \\ c = 1/6 \\ d = 0 \end{cases}$$

E, portanto, o número de quadrados de um tabuleiro do tipo nxn é:

$$\mathbf{1/3\ n^3 + 1/2\ n^2 + 1/6\ n = 1/6\ n\ (n+1)\ (2n+1)}$$

Uma extensão do problema

Quantos cubos há num cubo do tipo nxnxn?

Imagine-se, por exemplo, um cubo construído com $\mathbf{n_3}$ cubos de madeira, desses que se oferecem às crianças para fazerem construções e puzzles. Quantos cubos, de diferentes tamanhos, se podem identificar?

É quase irresistível adequar a fórmula anterior às três dimensões e conjecturar que há $\mathbf{1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3}$ cubos. De facto, a conjectura é verdadeira, como se pode concluir utilizando qualquer uma das abordagens anteriores ou provando-a pelo método de indução matemática seguindo um percurso paralelo.

Novas extensões do problema

No caso do tabuleiro de xadrez, contámos apenas os quadrados que são rectângulos especiais. E se contássemos todos os rectângulos?

Também no segundo caso, contámos apenas os cubos que são paralelipípedos especiais. E se contássemos todos os paralelipípedos?

Temos, assim, dois novos problemas que se podem considerar extensões dos anteriores.

Quem quer quebrar a cabeça? Ficamos a aguardar as vossas descobertas.