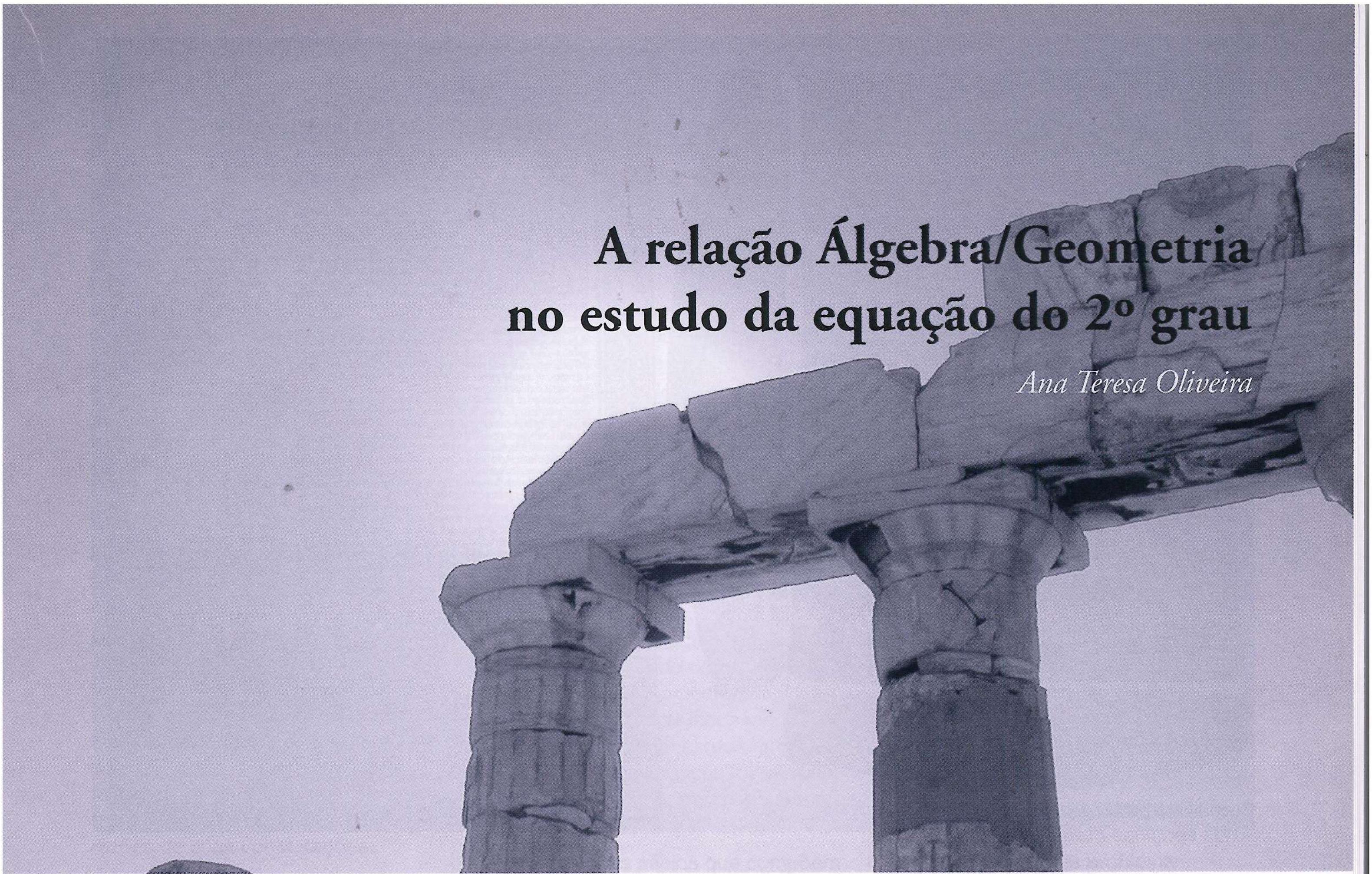


A relação Álgebra/Geometria no estudo da equação do 2º grau

Ana Teresa Oliveira

Um pouco de história

Os egípcios

O papiro mais famoso, que permitiu conhecermos quase tudo o que sabemos hoje sobre a matemática dos egípcios, foi o *Papiro de Rhind* [1], provavelmente escrito próximo a 1650 a.C., descoberto em 1858 e que contém 85 problemas.

Os egípcios tratavam a incógnita de uma equação por *aha* e os papiros mostram que a sua álgebra era bastante primitiva e prática. Na maioria das vezes, os problemas não exigiam nada mais do que a solução de uma equação linear simples, e eram, geralmente, resolvidas pelo método que ficou conhecido por *a regra da falsa posição*. Há, no entanto, a presença de problemas que envolvem variável com expoente 2, apesar de os egípcios não se terem dedicado à equação do 2º grau e ao cálculo das suas raízes.

Um dos problemas contidos num papiro datado de aproximadamente 1950 a.C. está citado abaixo, bem como a solução que apresentaram através do método da falsa posição.

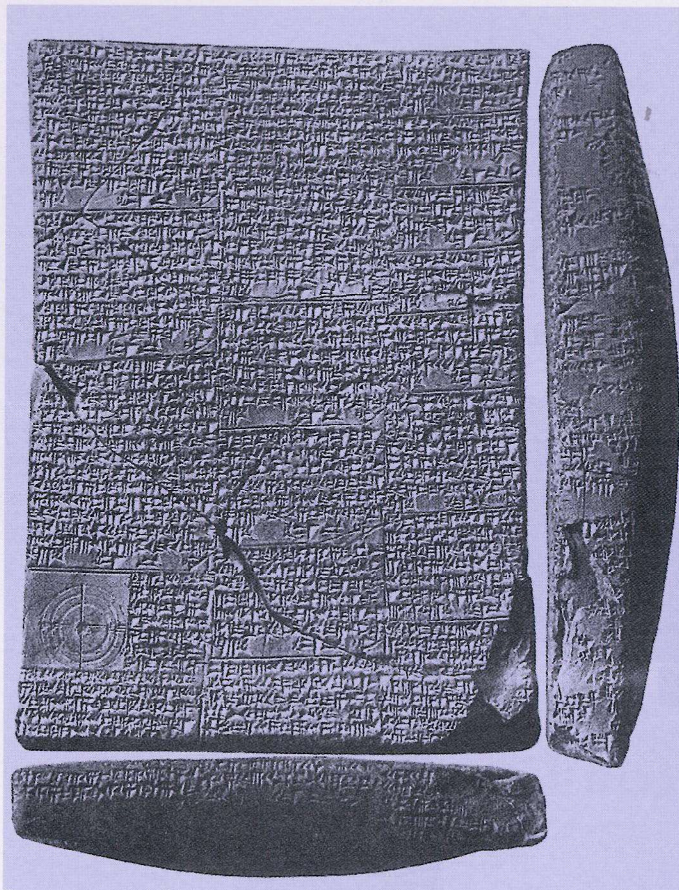
> *Uma dada superfície de 100 unidades de área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão um para o outro como 1 está para $3/4$* (Eves, 1995, p. 74).

Ao resolvermos o problema pelo método da falsa posição como faziam, por conveniência devemos partir de $y=4$, o que facilita o cálculo da quarta parte. Consequentemente, $x=3$. Isto fornece $x^2+y^2=25$ em vez de 100, que é o valor que o problema pede que seja encontrado. Se, contudo, dobrarmos estes valores, temos a situação que nos interessa, que é $x=6$ e $y=8$. Como podemos observar, estes valores têm a soma de seus quadrados igual a 100. Os valores iniciais encontrados eram *falsos*, o que provavelmente explicou o nome atribuído ao processo.

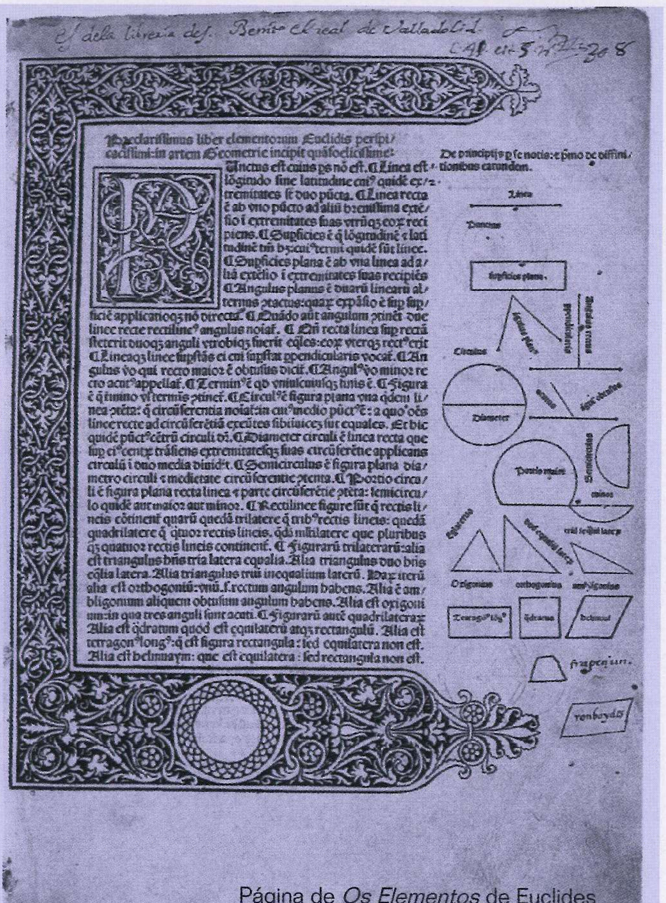
No tocante à equação do 2º grau, não construíram nenhum conhecimento substancial a respeito de sua solução ou aplicações. Propuseram, contudo, soluções para equações que envolviam o expoente 2, como pudemos observar no exemplo fornecido, sem terem formalizado nenhum processo que se voltasse para o cálculo das raízes da equação do 2º grau. Não esboçaram tendências nem intenções de articular conhecimentos geométricos, aritméticos e algébricos. Se pudermos entender que os dois papiros mais expressivos foram dirigidos, também, aos alunos desta época, e considerando que o conteúdo deste material era quase todo prático e priorizava cálculos—eles mostraram regras para cálculos sem motivação—provavelmente esta foi a tendência do ensino de matemática no Egipto.

Os babilónios

O que em geral é tratado por *civilizações babilónicas* são as da antiga Mesopotâmia, como os sumérios, os acadianos, os caldeus, os assírios e outros que habitaram a área. Na verdade, estamos tratando da matemática desenvolvida pelos povos que habitaram a região entre os rios Tigre e Eufrates, incluindo todos os que acabamos de citar.

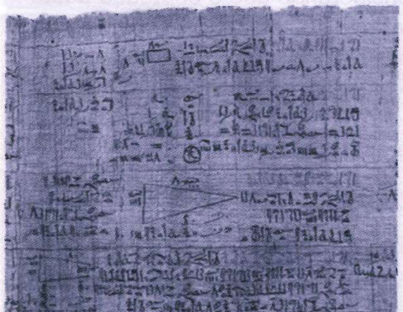


Documento babilónico



Página de *Os Elementos* de Euclides

É curioso destacar que não usavam letras para representar as quantidades, pois o alfabeto não era, ainda, conhecido, mas apresentavam, próximo a 2000 a.C., *álgebra retórica* bem desenvolvida. A propósito de termos usado o termo retórica para caracterizar a álgebra desenvolvida pelos babilónios, é conveniente citarmos os três estágios no desenvolvimento da notação algébrica.



O papiro de Rhind

Na *álgebra retórica*, os argumentos da resolução de um problema são expostos em prosa pura. Um estágio posterior é caracterizado por *álgebra sincopada*, que envolve algumas abreviações para quantidades e operações usadas frequentemente. No último estágio, o da álgebra simbólica, as resoluções são expressas com símbolos que nada têm a ver, aparentemente, com aquilo que representam . Dentro de sua álgebra ainda retórica, colocavam no lugar de letras, palavras tais como *comprimento, largura, área, volume*.

As equações quadráticas foram classificadas em três tipos, e todos estiveram presentes nos textos babilónicos. São da forma $x^2 + px = 9$, $x^2 = px + 9$ e $x^2 + q = px$.

Nesta época não havia a intenção de se resolver uma equação da forma $x^2 + px + q = 0$ com p e q positivos, pelo facto de a equação não ter raiz positiva. Vamos citar um exemplo de problema encontrado em *tabletes babilónicos*.

Subtraiu-se o lado de um quadrado de sua área e isto é 14,30. Pede-se o lado (Boyer, 1974, p. 23).

Este número—14,30—que está representado no sistema sexagesimal, equivale a 870 no sistema decimal. Logo, o problema consiste em resolver a equação $x^2 - x = 870$. A solução é dada pelos babilónios, com palavras e no sistema sexagesimal, assim:

— Tomar 1, o coeficiente do lado do quadrado. Dividir 1 em duas partes. $0;30 \times 0;30 = 0;15$ e acrescentar 14,30. O resultado—14,30;15—tem raiz quadrada igual a 29;30.

— Acrescenta-se 29;30 a 0;30, que tinha sido multiplicado por ele mesmo, e 30, o resultado, é o lado do quadrado.

Ao observarmos os problemas propostos e resolvidos pelos babilónios, estes não deixam dúvidas quanto à questão de que os babilónios entendiam um produto como a área de um rectângulo, um quadrado como uma área de um quadrado, se observarmos a terminologia usada em seus problemas. Entretanto, apesar de os formularem usando termos da geometria, os processos usados nas suas soluções foram predominantemente algébricos. A presença de elementos geométricos para dar nomes aos valores envolvidos nos seus problemas—dados ou valores a serem descobertos—não significa que tenham dado algum enfoque geométrico aos problemas algébricos. O nome *quadrado*, provavelmente, figurava com o mesmo sentido que atribuímos a uma letra na álgebra simbólica. E não a nenhum carácter demonstrativo ao que propuseram. As soluções eram fornecidas como receitas a serem seguidas.

Os gregos

Entre 800 a.C e 800 d.C ficou caracterizado um período de mudanças nos pólos de civilizações. Uma nova civilização crescia rapidamente rumo a assumir a liderança da produção cultural da época—os gregos. Foram estes os responsáveis, sem dúvida, por dar à matemática um novo tratamento. Ou seja, os gregos encarregaram-se de fazer o que as civilizações orientais tinham deixado por fazer—buscar as razões de suas constatações.

Uma das mais importantes descobertas de Pitágoras, foi ter colocado a questão da parceria entre dois ramos da matemática—aritmética e geometria—surgindo os irracionais. A razão entre a diagonal e o lado do quadrado não podia ser expressa por um número racional. Daí a dificuldade encontrada na época em se resolver a equação da forma $x^2 = 2$. *Números*, até então, significavam *números racionais*. Desta forma, a irracionalidade de $\sqrt{2}$ colocou a álgebra diante de um problema que aparentemente era simples, quanto à sua formulação, mas que numericamente não tinha solução.

O impasse quanto aos *incomensuráveis* foi responsável pela origem da *Álgebra Geométrica* dos gregos. A álgebra foi reformulada em termos geométricos. Dentro deste novo enfoque, a equação $x^2 = 2$ passou a ter solução geométrica, pois x é a diagonal de um quadrado de lado 1.

Os princípios da álgebra geométrica motivaram a apresentação de soluções geométricas para a equação do 2° grau. Na álgebra geométrica plana, três operações fundamentais foram definidas:

— A soma de dois segmentos de reta a e b é um segmento c tal que c pode ser dividido em duas partes de tal forma que (modernamente) $a + b = c$.

— A soma de dois polígonos A e B é um polígono C que pode ser dividido em duas partes tais que (modernamente) $A + B = C$.

— O produto de dois segmentos de reta de medidas a e b é um rectângulo R determinado pelos dois segmentos. Cabe observar que este produto não é entendido como um número, mas como um objecto geométrico.

Dentro desta forma de interpretar as variáveis e as operações entre elas, a raiz quadrada de um determinado elemento N é o lado de um quadrado de área N. Analogamente, $a.b$ é a área de um rectângulo de lados medindo a e b. De acordo com estes princípios, as equações quadráticas foram resolvidas pelos gregos, geometricamente, explorando *áreas*.

Entre os vários sábios que compõem a história da matemática grega, Euclides destaca-se como um dos que mais influenciaram a matemática no mundo. Sua principal obra—*Os Elementos*—é composta por treze livros e, talvez, seja o material escrito mais reproduzido e estudado. Foi composto, provavelmente, em torno de 300 a.C. Serviu, inclusive, como guia do currículo escolar por muito tempo, de onde eram retirados os conteúdos geométricos e a sua abordagem axiomática e dedutiva. É considerado, portanto, como uma referência para quem deseja conhecer as características da matemática antiga e o nível de desenvolvimento alcançado pelas diversas civilizações, nas diversas áreas em que organizamos o conhecimento em matemática.

No livro II desta obra, encontramos a solução de uma equação da forma $ax + x^2 = a^2$. Assim com se mostra na figura 1, Euclides parte de um quadrado $ABCD$ de lado a. AD é bissectado em E. Traçamos EB, prolongando o lado DA a F de tal modo que $EF = EB$. Completamos o quadrado $AFGH$. Prolongamos GH até cortar DC em K. Desta forma aplicamos ao segmento AD um rectângulo $FK = ax + x$ igual a um quadrado

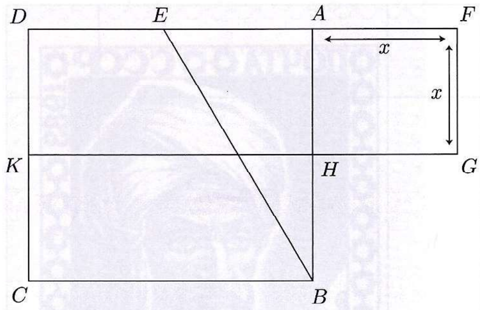


Figura 1.

dado $AC = a$ e excedendo por um quadrado x . No desenho fornecido, x é a medida do lado AF.

Provavelmente, a abordagem geométrica fornecida por Euclides para a solução da equação do 2° grau deve ter tido sua motivação a partir da descoberta dos irracionais. O facto de $x^2 = 2$ não ter solução no universo dos racionais, desafiou os gregos, que buscavam soluções exactas para os problemas que queriam resolver, apesar de conhecerem soluções aproximadas para alguns problemas.

É importante considerar que, embora a solução geométrica para a equação do 2° grau tenha surgido como um caminho para resolver um problema sem solução no campo numérico, não significa que este procedimento geométrico seja acessível ou de fácil compreensão. O facto de passarem a ter condições de resolver as equações quadráticas não significou, de forma nenhuma, que conquistaram processos mais simples. Os processos geométricos que fornecemos e analisamos são sofisticados e de difícil compreensão.

De acordo com a metodologia proposta pelos gregos, para resolver equações quadráticas, era necessário entender x e os coeficientes das equações como quantidades geométricas e lidar com construções e teoremas para a obtenção do valor de x—raiz da equação—que eram sofisticados e envolviam um alto nível de elaboração.

Os árabes

Três homens se destacaram na matemática árabe: Al - Khwarizmi, Tabit ben Qurra e Omar Khayyam. Entre eles, contudo, Muhammad ibn Musa Al -

Al - Khwarizmi, num selo

Khwarizmi, nascido em 780 d.C., em Khiva, foi o responsável pelo apogeu das actividades islâmicas nas ciências exactas.

A álgebra de Al-Khwarizmi, seu principal trabalho, tinha o título *Hisab al-jabr wal-mugabala*, o que significa *ciência da redução e da confrontação* ou *ciência das equações*. Esta álgebra tornou-se conhecida em todo o Ocidente por meio de suas traduções latinas e a palavra al-jabr se tornou o mesmo que álgebra. Este trabalho é expresso em palavras, isto é, em álgebra *retórica*, ainda distante de ser um trabalho em álgebra *sincopada* ou *simbólica*.

Al-Khwarizmi, neste trabalho que o notabilizou, tratou das equações quadráticas, forneceu regras para a obtenção de soluções, apresentou demonstrações para as regras apresentadas e ilustrou-as trabalhando sobre exemplos.

Analisando as soluções apresentadas nesta obra em sua versão latina, encontramos a resolução, em seis capítulos, dos seis tipos de equações que podemos compor se considerarmos três espécies de quantidades combinadas: raízes—x, quadrados—x^2 e números, como foram interpretados pelo autor.

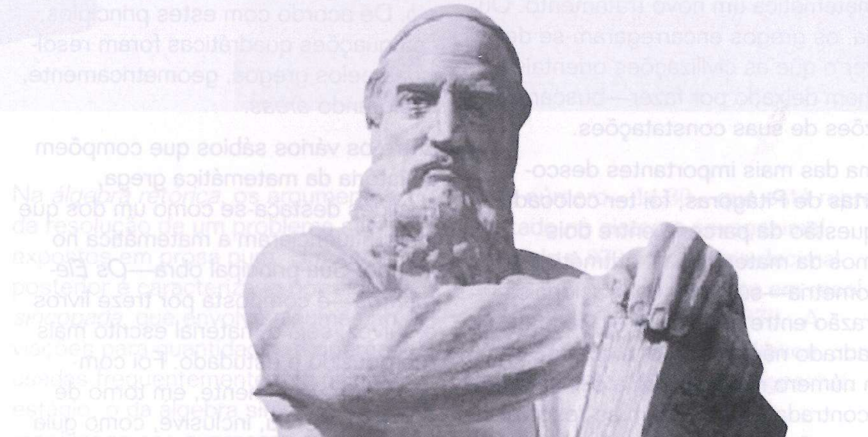
Os seis tipos expressos em álgebra *retórica* são referidos a seguir, apresentados, cada qual, da maneira como os expressamos em álgebra simbólica—raízes iguais a quadrados $bx = ax^2$, raízes iguais a números $bx = c$, quadrados iguais a números $ax^2 = c$, quadrados e raízes iguais a números $ax^2 + bx = c$, raízes e números iguais a quadrados $bx + c = ax^2$, quadrados e números iguais a raízes $ax^2 + c = bx$.

Para ilustrar, citaremos um exemplo de problema apresentado por Al-Khwarizmi, fornecido por Van der Waerden (1985, p. 4), que se funda na resolução de uma equação do tipo *quadrados iguais a raízes*.

> *Dividi 10 em duas porções. Multipliquei uma porção pela outra. Depois disto, multipliquei a primeira delas por ela mesma, e o produto da multiplicação dela por ela mesma é quatro vezes aquele (o produto) de uma porção pela outra.*

O que acabamos de ler equivale a dizer *um quadrado de algo desconhecido é igual a quarenta vezes esta quantidade desconhecida, menos quatro vezes o quadrado*, isto é, $x^2 = 40x - 4x^2$. Isto porque, Al-Khwarizmi tratou uma das partes pelo que em álgebra simbólica tratamos por x e a outra pelo que faltava a esta para completar 10, isto é, $10 - x$. E todas as vezes que sugere operações com estas duas porções, elas são entendidas como tal.

Expressar em álgebra simbólica o que está em prosa no texto apresentado remete-nos à expressão



Omar Khayyam (1048–1131). Importante algebrista, filósofo e poeta.

$x.x = 4.x.(10 - x)$ que é equivalente à equação do 2° grau que já citámos anteriormente.

Após o sexto capítulo, é apresentado um novo caminho para a solução destes problemas, revelando um perfil grego na sua conduta. Segundo o próprio Al-Khwarizmi, era preciso constatar a verdade dos factos geometricamente. As soluções apresentando números já tinham sido devidamente exploradas.

Al-Khwarizmi desenvolveu o seu processo de solução geométrica de forma diferente da dos gregos. Três exemplos de equações quadráticas completas que foram tratados pela sua obra são: $x^2 + 10x = 39$, $x^2 + 21 = 10x$ e $3x + 4 = x^2$. Foram dados tratamentos diferenciados a estas equações, pois naquela época, só eram considerados os coeficientes positivos. Vamos exemplificar, apresentando a solução geométrica e a solução numérica fornecidas por Al-Khwarizmi para uma das equações presentes no seu trabalho: $x^2 + 10x = 39$. A solução inicialmente fornecida por Al-Khwarizmi—numérica—foi expressa da seguinte forma:

> Você divide ao meio o número raiz (resultado 5). Multiplique-o por ele mesmo (resultado 25). Adicione 39 (resultado 64). Tire a raiz quadrada deste valor (resultado 8). Tire de 8 o resultado obtido na 1ª etapa (resultado 3).

Geometricamente, esta mesma equação foi resolvida partindo de um quadrado ab para representar x^2. Vejamos a figura apresentada a seguir. Em cada um dos lados deste quadrado, coloca rectângulos c, d, e, f com largura $2\ 1/2$. Para completar o quadrado grande são necessários quatro pequenos quadrados nas quinas, com lado $2\ 1/2$, ou seja, de área $6\ 1/4$ unidades. Como são quatro destes quadrados, a área total é equivalente a 25 unidades.

Se a $x^2 + 10x = 39$, que equivale ao quadrado inicial e aos quatro rectângulos, acrescentarmos 25 unidades temos 64, que é o quadrado completo. Isto leva-nos a descobrir que seu lado mede 8 unidades. Se de 8 retirarmos duas vezes $2\ 1/2$, chegamos à medida do lado x que é 3. (Ver Figura 2.)

É importante observarmos que nos trabalhos árabes, as diversas influências se misturam, deixando-nos em dúvida a respeito da origem da sua álgebra. Tudo leva a crer que se valeram de uma composição, trazendo em suas posturas diferentes nuances metodológicas. Vejamos:

É evidente a presença de inspiração grega, apesar de que seus primeiros modelos de resolução de equações geometricamente são um pouco diferentes do que os gregos propuseram. Sem dúvida, são procedimentos mais simples do que os dos gregos.

Revelaram habilidades algébricas ao lidar com as equações do 2° grau. Desta forma, podemos dizer que o seu estilo foi algorítmico e demonstrativo. Este estilo permitiu abordagens referentes tanto ao universo numérico quanto no universo geométrico.

Conclusões

As equações quadráticas tratadas pelos babilónios, apesar de sua terminologia geométrica, tiveram soluções puramente algébricas. Ou seja, não articularam, em seus processos, álgebra e geometria. O seu estilo de solução era algorítmico. Não mostraram compromisso com formulação de regras para soluções de problemas, envolvendo equações do 2° grau.

Os processos gregos foram geométricos, mas bastante sofisticados e de difícil compreensão. As construções eram elaboradas e lidavam com teoremas complexos.

Os árabes apresentaram abordagens diferentes—no universo numérico e no universo geométrico. Com esta soma de procedimentos, revelaram a capacidade de articular dois fios condutores que conduziram o pensamento matemático nas civilizações antigas—a abordagem geométrica presente na matemática grega e o método algorítmico usados pelos babilónios. Devemos aos árabes a ampliação dos horizontes no tocante às possibilidades que ofereceram na solução da equação do 2° grau e consequentemente à dialéctica entre a álgebra e a geometria.

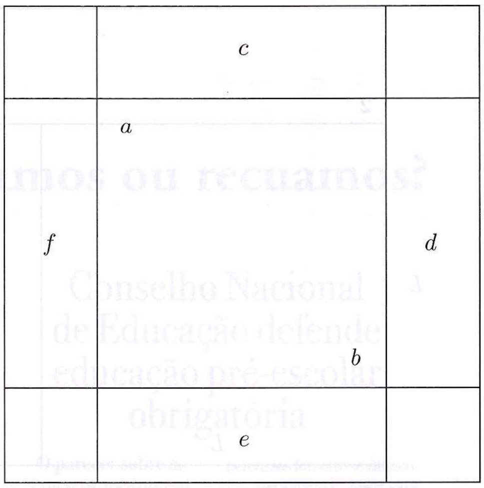


Figura 2.

Ficaram, ainda, diante de dois obstáculos que não podemos deixar de citar—os números negativos nesta época ainda indefinidos, o que restringiu os tipos de equações possíveis de serem solucionadas e a falta de um simbolismo algébrico. Estas duas questões vieram a ser estudadas posteriormente.

Sugestões metodológicas

O estudo da equação do 2° grau envolve terminologias e procedimentos que fazem parte do cenário algébrico. Ao tentar resolver a equação do 2° grau, cada aluno utiliza, em função de sua bagagem de conhecimento e de dificuldades, vários procedimentos ou práticas no cenário algébrico, e as dificuldades com manipulações algébricas são constatadas. Certamente, os recursos à decomposição em factores, ao uso do discriminante, a determinado produto notável … são recursos que estão disponíveis para uns e não para outros. E seja em que nível for, apesar de idades variadas e experiências diversas com este tema, revelam, em diferentes nuances, erros básicos comuns, que se repetem ao longo de sua vida escolar. O uso de letras, notações, convenções algébricas, o conceito de variável … são responsáveis por dificuldades em lidar com expressões algébricas, consequentemente, com a equação do 2° grau.

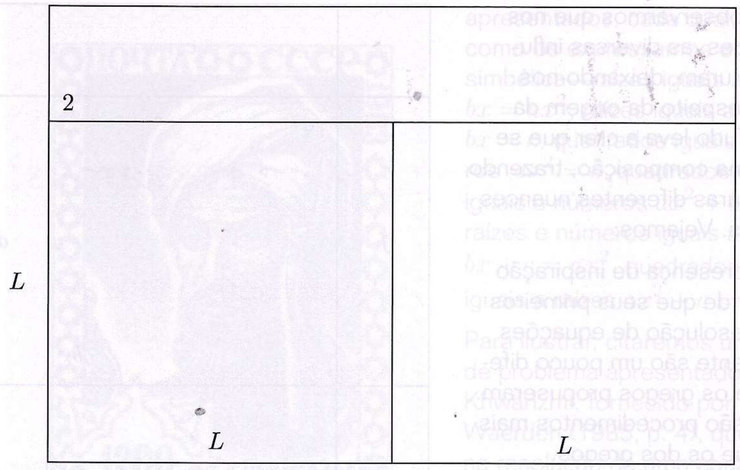


Figura 3.

O ensino de matemática deve priorizar a inter-relação entre os diversos tópicos de ensino. Quando falamos de um ensino que promova a integração entre os diversos assuntos tratados pela matemática escolar, estamos nos referindo a conexões de diversas ordens—entre cada objecto novo de ensino e conhecimentos já adquiridos, entre o conhecimento escolar e o conhecimento quotidiano e entre os diversos contextos matemáticos possíveis de serem alcançados pelos alunos, no seu nível de escolaridade.

Entendemos que apresentar aos alunos a equação do 2º grau como uma expressão algébrica não constitui uma metodologia que lhes proporciona significado. Isto refere-se a apresentá-la como uma expressão da forma $ax^2 + bx + c = 0$ com a, b e c reais e $a \neq 0$, forma geral e abstracta, através da qual todo e qualquer conteúdo semântico é suprimido, indicando-se, apenas, o essencial das relações e transformações matemáticas envolvidas. Trata-se de uma apresentação árida, complexa para alunos principiantes em álgebra. No entanto, há uma série de situações ou problemas que, apesar de responderem à mesma equação, têm conteúdos semânticos muito diferentes em função das relações que se estabelecem entre os dados e suas naturezas. Os dados, por exemplo, podem ser geométricos, sendo esta equação a expressão matemática de uma situação que envolve áreas ou perímetros.

A propósito das diferentes abordagens para a solução da equação do 2º grau apresentadas e analisadas resumidamente neste texto, cabe considerar o quanto é interessante e curioso tratarmos da história da matemática com os nossos alunos, desde que respeitando as restrições que os diferentes níveis da escolaridade apresentam em relação à compreensão das informações. Acreditamos que construir a visão histórica de um conhecimento matemático pode contribuir satisfatoriamente para o processo de ensino/aprendizagem. Este recurso à história pode ser usado pelo professor para ilustrar e clarear noções matemáticas que estão sendo apreendidas pelos alunos, principalmente, fornecendo esclarecimento quanto às suas *razões* e, desta forma, permitindo uma leitura mais crítica sobre o tema que está sendo estudado. Paralelamente, ao estabelecermos relações entre 'conceitos' e sua história, estamos ampliando o valor formativo destes conceitos na medida em que se tornam revestidos de significado cultural, sociológico e antropológico.

Apesar de não almejarmos construções geométricas tão sofisticadas como as que aqui apresentamos, é importante que estejam sempre presentes no trabalho escolar as possíveis articulações entre álgebra/geometria no estudo dos diversos tópicos de conteúdo que propiciam esta relação. As expressões algébricas podem ter representações geométricas e, se assim forem trabalhadas desde o início do aprendizado dos alunos, sem dúvida que o ensino da equação do 2º grau terá sua compreensão bastante facilitada. Ao propormos uma metodologia que integra vários contextos, reiteramos a nossa certeza de que saber matemática exige, entre outras habilidades, a capacidade de inter-relacionar conhecimentos em um mesmo contexto e gerar significados diversos para um determinado conhecimento, transitando por contextos diversos.

Algumas ideias ...

Proponha um problema geométrico qualquer que possa ser traduzido em linguagem matemática pela equação $2x^2 = 18$ *e depois resolva-o.*

Dê uma interpretação geométrica para a equação $x^2 + 3x = 180$. *Desenhe o que falou.*

A figura 3 mostra um corredor rectangular e duas salas quadradas. Temos uma área total de 70m^2. *Qual é o valor de* L *sabendo que é um número inteiro?*

Nota

1 Henry Rhind foi um cidadão escocês que comprou o papiro que levou seu nome numa cidade às margens do rio Nilo.

Referências bibliográficas

Boyer, Carl B. *História da matemática*. São Paulo, Edgard Blücher, 1974. Traduzido para o português por Elza F. Gomide. Tradução de: A History of Mathematics.

Eves, Howard. *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP, editora da Unicamp, 1995. Traduzido para o português por Hygino H. Domingues. Tradução de: An introduction to the history of mathematics.

Oliveira, Ana Teresa de C. C. *A Relação álgebra/geometria no estudo da equação do 2º grau*. Dissertação de mestrado. PUC-RJ, dez. 1997.

Van Der Waerden, B. L. "Three muslimic authors". In: ___. *A history of algebra*, p. 1–13, Alemanha, Springer–Verlag, 1985.

Ana Teresa Oliveira
Instituto Superior de Educação do Rio de Janeiro