Matemática escolar e conhecimento do meio

Construindo matemática a partir do corpo humano

Luis Carlos Cachafeiro

Neste artigo analisam-se as propriedades dos contextos da vida real que se podem utilizar com uma turma. Podemos ver que o corpo humano fornece contextos especialmente interessantes pelo conhecimento que os alunos têm desse assunto. Isto é considerado um atractivo pois permite-lhes aprender matemática juntamente com um melhor conhecimento de si mesmos. Analisaremos também dois exemplos de contextos deste tipo que utilizamos para o desenvolvimento da trigonometria e das funções.

Nós estudámos algumas das possibilidades do uso do corpo humano como fonte de contextos para a matemática e comprovámos que garante que praticamente a totalidade dos alunos conheça a temática e estimula a sua curiosidade.

A matemática e a vida real

É evidente que as mudanças sociais reflectem-se também na escola e põem em questão conteúdos e metodologias que estão estáveis desde há anos. Um dos objectivos da matemática escolar é o de adquirir conhecimentos, geralmente sob a forma de procedimentos de cálculo, para a vida diária, necessários no trabalho, no comércio, etc. Para a grande maioria das pessoas, estas necessidades não passavam de matemática muito elementar, pouco mais do que aritmética e só em casos pontuais (na engenharía, marinha, etc.) precisava-se de uma matemática superior. Para sectores da população qualificados, os estudos de matemática fornecem uma formação teórica juntamente com uma preparação matemática aplicada. Exemplos destas aplicações vêem-se no tradicional cálculo logarítmico ou comercial.

Mas a suposta utilidade da matemática não é constatada por muitas pessoas que a consideram muito abstracta e não os tem ajudado a uma melhor preparação para o trabalho [Cockroft 85]. Estudos recentes mostram que há uma utilização diária de ferramentas matemáticas em muitas profissões, mas frequentemente os utilizadores não chegam a reconhecer que usam ferramentas matemáticas [Nunes et al. 93, Masingila et al. 96], no entanto, para uma boa utilização dessas ferramentas é necessária uma formação matemática prévia.

O conhecimento matemático formal sustenta-se em experiências da vida real e a matemática informal tem por base o conhecimento matemático já adquirido. Mas a relação entre estas duas formas de conhecimento não é, na maior parte dos casos, óptima. Na introdução do euro pôde ver-se a necessidade do cálculo mental, apesar da abundância de calculadoras, listas com preços nas duas moedas, etc. O forte aumento do Índice de Preços no Consumidor nesses meses deve-se, em boa medida, ao problema do cálculo de equivalências.

Actualmente, com a explosão da informação numérica, os cidadãos precisam de uma certa formação matemática para interpretar os dados numéricos que se utilizam no trabalho, comércio e consumo e também para interpretar ideias e informação de jornais, propaganda, etc. Para uma formação de qualidade, no ensino da matemática precisa-se de materiais ligados à vida real dos alunos, tanto os de hoje como os de um futuro mais ou menos imediato. Caso contrário, a maioria da população disporá de poucas oportunidades de adquirir um verdadeiro conhecimento do meio.

Contextos. Modelos e matematização.

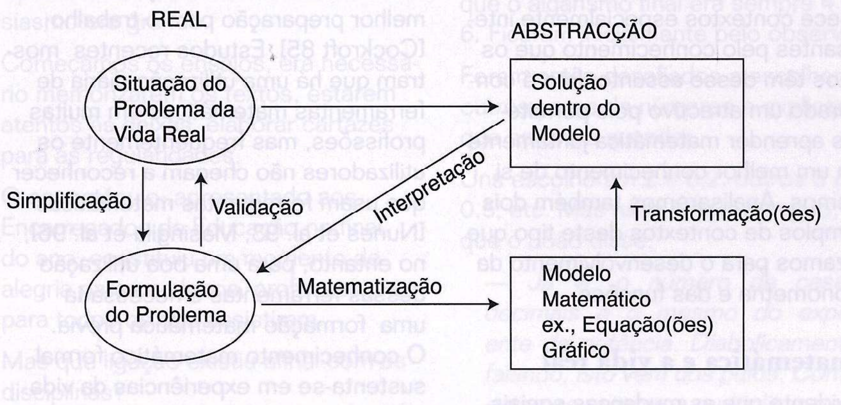
Para uma integração do conhecimento teórico e aplicado, terão maior importância do que as mudanças nos conteúdos matemáticos as experiências escolares de aproveitamento do conhecimento informal em vez do matemático formal.

A forma mais habitual de usar os contextos reais na aula tem como uma etapa fundamental a simbolização e a matematização. Nas figuras 1 [NCTM 89] e 2 [Dapueto, Parenti 99] apresentam-se dois aspectos complementares da relação entre um problema da vida real e o modelo matemático utilizado na solução deste. Passemos, de seguida, a considerar as principais fases deste processo:

- Partir de um problema real e assumido (pelo menos em teoria) pelo aluno. Nalguns casos o seu enunciado pode ser simples mas noutros será muito complexo. O contexto talvez esteja explicitamente próximo da matemática mas noutros casos esta está oculta, como na maior parte dos problemas de desafio matemático.
- No problema dado identificam-se alguns aspectos e elementos que possivelmente sejam necessários para a sua resolução. Esses aspectos e elementos têm, geralmente, uma ligação a elementos matemáticos.
- Com esses elementos o aluno estabelece uma ligação com o mundo matemático, através de simbolismos próprios desta ciência, construindo um modelo praticamente equivalente (pelo menos do ponto de vista matemático) à situação inicial. Pode ser que a equivalência não seja teórica mas sim que proporcione uma aproximação suficiente (como no caso da substituição de funções discretas por contínuas ou reciprocamente). A matematização supõe o estabelecimento de uma relação entre os aspectos e elementos da situação dada e os equivalentes matemáticos juntamente com as ligações entre eles.
- Um dos elementos da situação relacionados com a parte matemática é aquele ou aqueles que no enunciado aparecem como questões. Procura-se com o modelo matemático obter, a partir dos dados existentes, a informação correspondente a essas questões. Em caso de descoberta, resolve-se o problema.
- É possível que o modelo matemático construído não seja consistente ou não se relacione bem com a descrição inicial ou que o que se obtém não tem sentido no contexto. Nesses casos, a solução obtida não é aceitável e deverá retomar-se o problema numa das etapas anteriores até chegar a uma solução correcta.

Alguns aspectos relacionados com os contextos realistas

O esquema anterior é muito geral e na prática há diferenças entre contextos que diferem em aspectos relevantes como o formato de apresentação da informação, o tipo de questões a resolver, a matemática empregue ou construída, etc. Muitas vezes o problema reduz-se a exercícios muito simples de uso de uma operação ou procedimento e a matematização é, aparentemente, simples. Noutros casos o processo tem como finalidade a construção de conceitos matemá-



NCTM's [1998, p. 138] modelo do processo de modelação

Figura 1.

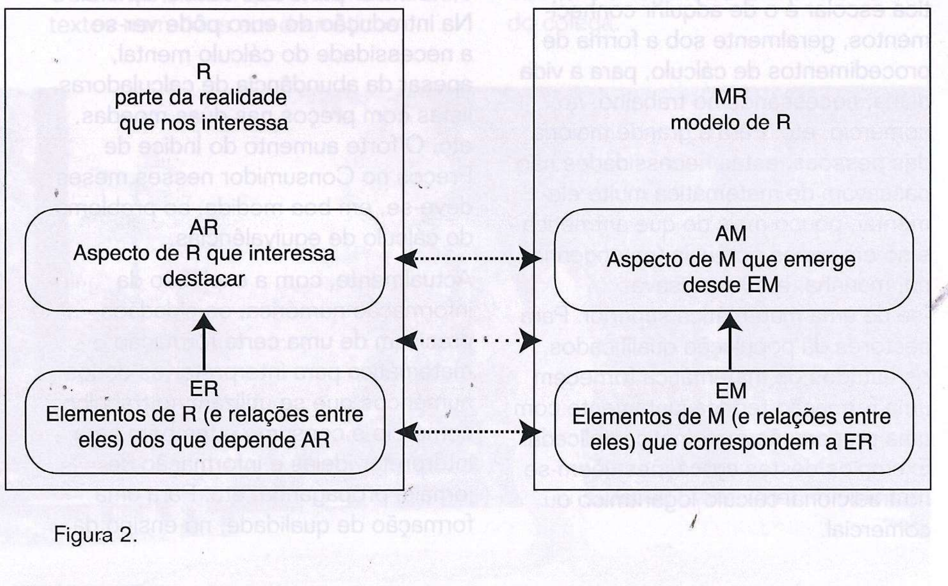


Figura 2.

ticos a partir de experiências reais (como é o caso da derivada como generalização da velocidade). Não é o mesmo um problema em que o aluno não tem praticamente informação e outro sobre o qual conhece bem o contexto e é capaz de empregar uma poderosa heurística para argumentar, rejeitar casos pouco ou nada justificáveis, etc. Também há grande diferença entre situações iniciais que apresentam elementos que não se utilizam no problema e outras em que a correspondência entre dados iniciais e objectos matemáticos usados na resolução é quase directa.

Parte da informação necessária para a resolução de um problema não será dada explicitamente. Deste modo, há alunos que terão problemas por conhecerem mal o contexto do problema, mas esta não é a única dificuldade. Em geral, quando num contexto se aplicam de modo coerente uma matemática simples e outra superior, no primeiro caso requere-se menos informação adicional que no segundo. Assim, os alunos com mais conhecimentos matemáticos, chegam mais longe e deste modo obtêm maior prazer (êxito) que o grupo dos de nível mais baixo. Por esta razão, estes não vêem, ao contrário dos outros, que a matemática produza informação nova que ajude ao desenvolvimento do seu quotidiano. Quanto mais oculta estiver essa informação maior estímulo provoca (mais poder parece ter quem o resolve) [Walkerdine 88].

Uma questão importante na análise dos contextos vem dada pelas características do formato empregue. F. Fernandez [Fernández 97] observou que alguns formatos estimulam o uso de determinados procedimentos que depois não ajudam na resolução. Os melhores alunos são capazes de concentrar-se mais nas características da solução que se pedem que no formato em que o problema vem apresentado. A selecção de um bom problema precisa que o formato do contexto tenha uma relação acessível com o objecto matemático incluído no modelo a considerar.

Há contextos que interessam de diferentes maneiras a uns alunos e a outros, o que depende de factores como o seu meio e também de factores pessoais como questões afectivas, motivações, efeito surpresa no aluno, etc. As razões que induzem a surpresa na aula de matemática estão relacionadas com as conexões entre matemática formal e realidade quotidiana [Nunokawa 01]. Um efeito surpresa, pode repercutir-se numa maior memorização pelo que quando os alunos são verdadeiramente surpreendidos pelo professor consegue-se uma descoberta inesquecível.

Analisando o processo de construção do conhecimento matemático vêem-se algumas propriedades que devem ter os contextos:

- Ser próximos do aluno e assumidos tanto pela temática como pela questão a resolver. Esta deve constituir uma verdadeira questão, não conhecida, cuja solução chegue a produzir curiosidade ou surpresa.
- Que a situação de partida se possa dirigir directamente à utilização ou criação de uma matemática real desde o ponto de vista tanto da situação inicial como da matéria.
- Que, pela temática, formato de apresentação e conteúdos, sirva para todo o grupo de alunos e não seja de interesse apenas para alguns.

Já sabemos que nem toda a realidade é partilhada por todas as pessoas. Mesmo numa turma, encontramos diferenças entre grupos de interesses tanto ao nível da própria matemática (fornecedora de muitos dos exemplos e situações usadas) como noutras matérias e, mais ainda, na temática não académica. Há algum tema que possa ser de interesse para quase todos os alunos e que não seja complexo de mais para o trabalho com ele na turma?

Contextos de interesse

Observamos que as temáticas geralmente usadas como a física, o comércio, a matemática são especialmente adequadas para gerar ou usar as principais noções matemáticas, mas nalguns casos há dificuldades para aproveitar esses contextos, porque há alunos para os quais eles não lhes interessam, ou porque desconhecem alguma ferramenta necessária para chegar ao final. Nós estudámos algumas das possibilidades do uso do corpo humano como fonte de contextos para a matemática e comprovámos que garante que praticamente a totalidade dos alunos conheça a temática e estimula a sua curiosidade. Além disso, permite trabalhar com vários conteúdos matemáticos (quase a totalidade dos que se desenvolvem desde o 9° ano de escolaridade) e a utilização de caminhos e heurísticas diferentes.

Na segunda metade do século XX apareceram alguns exemplos de uso de materiais no ensino da matemática que utilizam alguma característica do corpo humano [Berté, Castelnuovo]. Mas a necessidade de procurar novos contextos motivadores para os alunos, o reconhecimento de que se deve aproveitar na turma as aplicações matemáticas como se tem estudado desde a Educação Matemática Realista [RME] e também a proliferação de dados numéricos sobre o corpo possibilitou que agora desenvolvamos novos trabalhos em que alguma característica do corpo humano é utilizada na aula de matemática [Pequito 01, Young 02]. No livro *Las matemáticas del cuerpo humano* [Cachafeiro 2000], fizemos uma recolha de exemplos conhecidos e muitos outros praticamente desconhecidos ou novos de como se pode usar contextos relacionados com o corpo humano no ensino da matemática. Em seguida mostramos dois exemplos de actividades relacionadas com alguma característica do corpo: as medidas das mãos e a capacidade do sistema visual para apreciar distâncias.

Exemplos de contextos

Medida de ângulos e distâncias.

Entre as medidas directas, distâncias e ângulos, estes podem parecer que, ao contrário das primeiras, se encontram com pouca frequência na vida dos alunos (se exceptuarmos o ângulo de 90°). Observa-se que, excepto em problemas de Geometria, Desenho e na Física, não há muitas situações em que apareçam ângulos que não sejam de 90°, pelo que parece que os ângulos são de pouca utilidade fora dessas matérias.

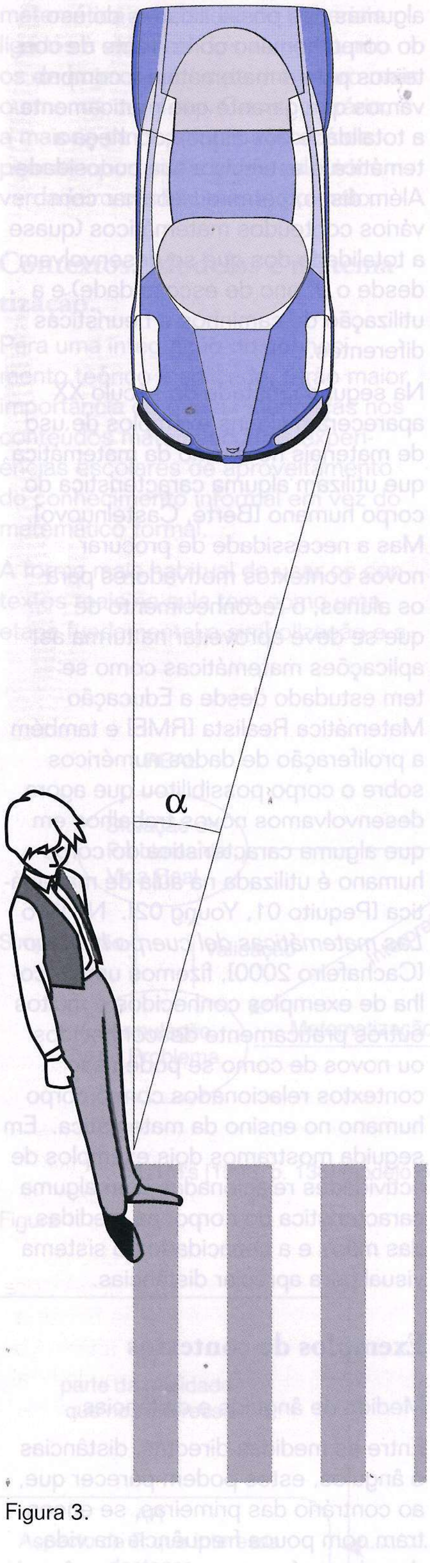


Figura 3.

O uso mais frequente de ângulos é quando são utilizados para conhecer distâncias, sendo este o objectivo inicial da trigonometria. Os primeiros problemas de aplicação da trigonometria são o de conhecida uma distância e um ângulo num triângulo rectângulo obter o valor de outro lado desse triângulo. Mas um enunciado desse tipo parece estar já muito longe da realidade dos alunos. Quando é que precisam de conhecer distâncias? perguntam. Mas a resposta resulta realmente surpreendente: fazêmo-lo com muita frequência.

Na turma perguntamos:

- Vocês conhecem algum sistema que possamos utilizar para conhecer a distância a que se encontra uma pessoa ou um automóvel?

Resposta de um aluno:

- Se o vemos com um tamanho pequeno sabemos que se encontra longe.

Efectivamente, uma das formas que empregamos para determinar uma distância a um objecto é a observação do tamanho aparente e contrastá-lo com a medida do objecto. O tamanho aparente é o resultado da medida do ângulo que abarca o objecto numa direcção dada. Quando se vê ao longe um automóvel, o tamanho aparente é geralmente o critério mais importante para saber a distância. Como relacionar de modo matemático a distância e o ângulo? Começamos com uma representação à escala no papel, utilizando diversas medidas (para um objecto de 1m e considerando distâncias de 5, 10, 20 m), obtêm o valor do ângulo e representam numa tabela. A relação não é proporcional (nem directa nem inversamente) e dará origem ao conceito de tangente trigonométrica.

Depois dessa exploração incluímos a definição de tangente e problemas relacionados com a medida de ângulos e cálculo de distâncias. Para que o sistema visual use um mecanismo desse tipo é preciso que no cérebro existam sistemas de reconhecimento de padrões, de inclinação e ângulos, etc. Os estudos sobre o cérebro confirmam a existência, efectivamente, de colunas de orientação sensíveis a distintos ângulos [Frisby 87].

Outro mecanismo fidedigno de medida de distâncias a partir da medida de ângulos é a disparidade retiniana que utiliza a paralaxe ou diferente visão de um objecto de duas posições diferentes.

Na figura 3 observa-se que α é o ângulo de visão do automóvel pelo peão e na figura 4 (página seguinte) que a diferença dos ângulos β_1 e β_2 mostra a paralagem da face da pessoa.

Com uma simples experiência comprova-se o uso dos dois olhos para o cálculo preciso da distância a um objecto. Depois observa-se o modo em como a diferença de ângulos permite obter a distância. A seguir realizam-se exercícios de obtenção de medidas usando este mecanismo. Por fim passamos a obter a precisão do sistema, obtendo a diferença mínima de ângulos capazes de ser detectados pelo sistema visual.

Deste modo o que fazemos é usar uma variante do próprio mecanismo que temos no cérebro de maneira que o trabalho serve-lhes para compreender como somos. Neste caso, os contextos são matematicamente equivalentes aos clássicos de trigonometria, com a diferença que resultam especialmente surpreendentes pelo que supõe novos recursos e conhecimentos.

Funções da mão. Como somos nós mesmos.

As funções permitem trabalhar com relações entre variáveis sujeitas a certos padrões que se mantêm constantes. Assim, conhecendo o padrão e algum dos valores de uma das variáveis pode determinar-se a outra. Mas precisamos que os contextos utilizados tenham interesse e não sejam óbvios. Se é muito simples, não é de interesse e sobretudo, não traz informação nova. Se é muito complexo, alguns alunos têm problemas para chegar a uma compreensão suficiente e a entender as relações estabelecidas entre as variáveis.

Começamos com uma pergunta sobre a forma das mãos de duas raparigas. Qual tem a mão mais magra? O objectivo é o de estender as medidas lineares para obter também uma medida

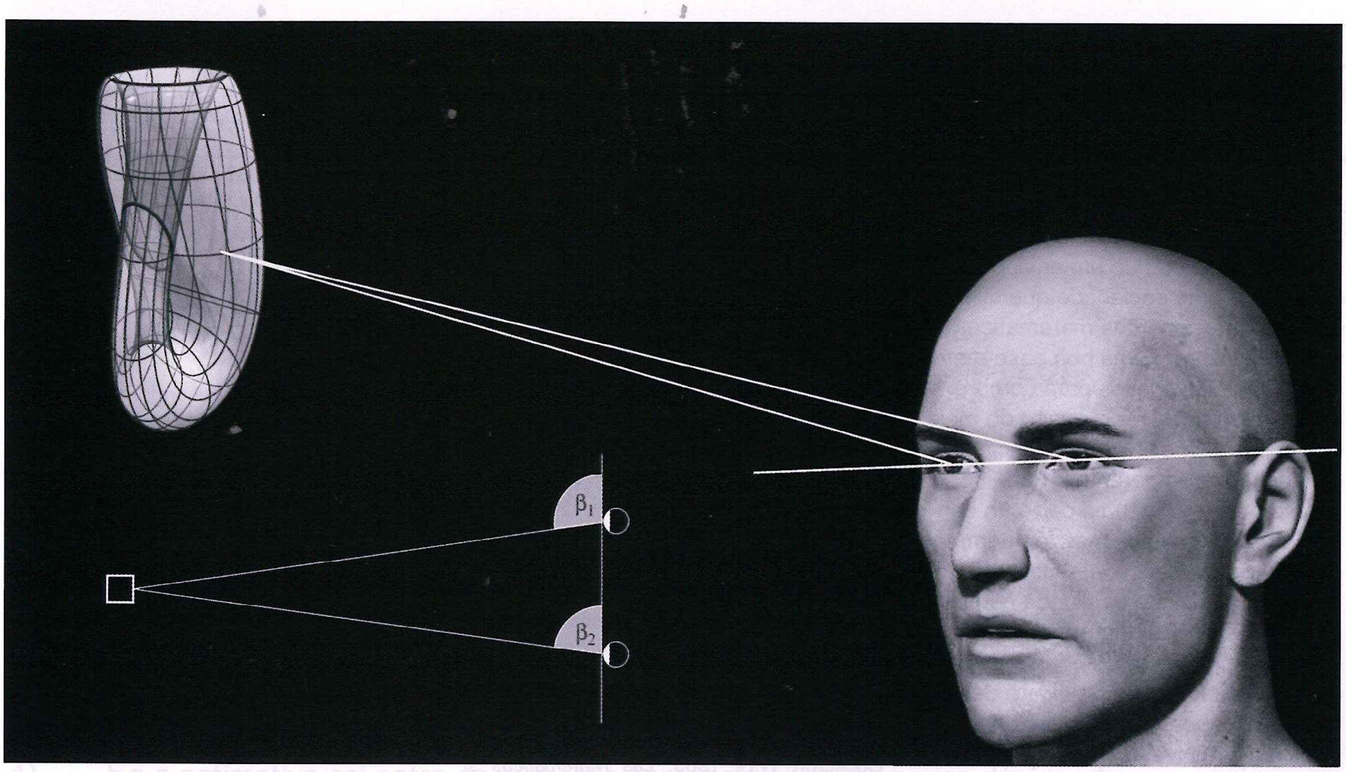


Figura 4.

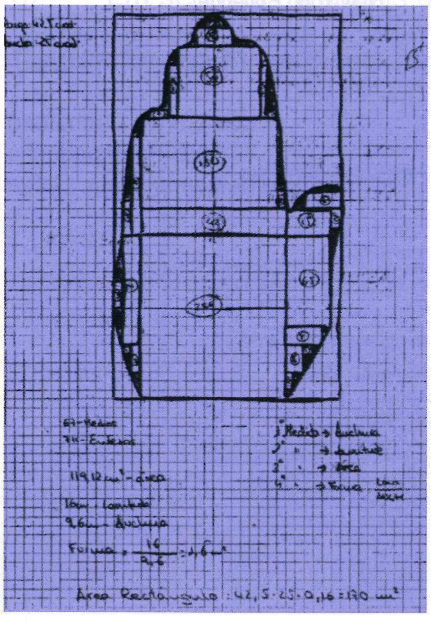


Figura 5.

para a forma. Depois de uma interessante discussão chegam à conclusão de que o quociente comprimento/largura expressará de modo aceitável qual das duas mãos é mais magra: a de maior quociente.

Este quociente serve também para determinar a função $y = k_1 \cdot x$ que, conhecido o valor da largura, podemos obter o comprimento. As pessoas com a mesma forma da mão têm a mesma função para a mão. Isto serve também para idades diferentes de uma mesma pessoa.

Outra função expressa a área da mão a partir da largura desta. Para isso precisa-se de uma série de operações como a obtenção da área (usando fórmulas para a divisão e a recontagem), eliminação de variáveis intermédias, etc. Utiliza-se um novo quociente $k_2 =$ área/(largura·comprimento) que expressa a parte que a mão cobre do rectângulo de medidas a largura e o comprimento da mão (ver figura 5).

A área permite-nos obter uma nova função, neste caso de terceiro grau que exprime o volume a partir exclusivamente da largura da mão mediante o uso não só de um novo quociente k_3 (meia altura /largura) tomando a forma da mão por um tronco de pirâmide. A função volume da mão pode expressar-se assim:

$$V = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot x^3$$

com a variável x para a largura,
$k_1 =$ comprimento/largura,
$k_2 =$ área/(largura·comprimento) e
$k_3 =$ meia altura/largura.

Pode ver-se em [Cachafeiro 01] um estudo mais detalhado desta actividade. A actualidade do uso didáctico das medidas do corpo, vem expresso nas palavras de Nisa Figueiredo no número 63 da *Educação e Matemática* em que, recolhendo algumas observações tiradas da conferencia anual Projecto Panama do Instituto Freudenthal de 1,2 e 3 de Nov. de 2000, escreve:

> "As actividades de medida à volta do nosso próprio corpo constituem um bom começo de aprendizagem das Grandezas e Medidas, uma vez que contribuem para uma maior ligação emocional com a aprendizagem."

Pensamos que uma extensão natural dessas medidas é esta utilização da própria mão que fazemos para tirar proveito do conhecido (a mão) para abordar o desconhecido (a matemática das funções) e um novo critério de comparação: o quociente como a base de uma nova forma de medir.

Conclusões

As mudanças nas necessidades sociais afectam o ensino da matemática. Precisa-se de um ensino de qualidade numa sociedade que dispõe de muitas ferramentas matemáticas mas na qual, sem uma boa base matemática, há dificuldades para compreender, reflectir e tirar proveito do meio que nos rodeia e viver na consciência de cidadãos competentes. Para isso não só deve mudar uma parte do conteúdo da matemática mas também, em grande medida, a sua metodologia, de modo que os alunos participem na matéria de matemática, em experiências de uso do conhecimento e de conteúdo próximo deles e destas tirar conclusões relacionadas com o meio em que vivem.

Mas há alguns problemas no uso de actividades de fora da matemática no ensino desta. Um deles é o de como chegar a todos os alunos, pois alguns têm dificuldades, por exemplo por falta de experiências básicas nalguns casos, na compreensão das situações na física, economia, etc. Nós observamos que o corpo humano fornece verdadeiros problemas matemáticos, que implicam autêntica matemática (muita dela correspondente aos últimos anos de ensino geral).

Nos dois exemplos apresentados mostramos algumas das características destes contextos, próximos dos alunos, com um significado real para todos que estimula a sua curiosidade e que introduzem matemática real no currículo desses cursos.

Bibliografía.

Berte, A. 1985, 'Qu'y a-t-il de fondamental, pour nos eleves d'Afrique, d'Europe ... ou d'ailleurs?' *Proceedings of the 37 th Cieaem Meetings*, Leiden.

Cachafeiro, L. 2000, *Las matemáticas del cuerpo humano*, Proyecto Sur, Granada.

Cachafeiro, L. 2001, Modelos de funcións. Medidas da man e funcións que xeneran. *Boletín das Ciencias. Enciga* nº 47, 21–29.

Castelnuovo, E. 1985, *La matematica. I numeri*, La Nuova Italia. Firenze.

Cockcroft W.H. 1985, *Las Matemáticas si cuentan*, MEC, Madrid.

Dapueto, C. and Parenti, L. 1999, 'Contributions and obstacles of contexts in the development of mathematical knoledge', *Educational Studies in Mathematics*, 39: 1–21.

Fernandez, F. 1997, *'Evaluación de competencias en Álgebra elemental a través de problemas verbales.'* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada.

Figueiredo, N. 2001, A propósito de um encontro. *Educação e Matemática*. Nº 63: 39.

Frisby, John P. 1987, *Del ojo a la visión*, Alianza Editorial, Madrid.

Masingila, J., Davidenko, S. and Prus-Wisniowska, E. 1996, 'Mathematics learning and practice in and out of school: a framework for connecting these experiences' *Educational Studies in Mathematics*, 31: 175–200.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) 1989, *Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM 1989.

Nunes, T. T., Schliemann, A.D. and Carraher, D.W. 1993, *Street Mathematics and School Mathematics Cambridge University Press*, Cambridge.

Nunokawa, K. 2001, 'Surprises in Mathematics Lessons' *For the Learning of Mathematics*, 21, 3: 43–51.

Pequito, J.A. 2001, A área de Pele Infectada. *Informat. Ministério de Educação.* Nº 8: 4–5.

Walkerdine, V. 1988, *"The Mastery of Reason, Cognitive Development and the Production of Racionality"*, London and New York, Rotledge.

Young, V. 2002, A Matter of "Survival". *Mathematics Teacher.* Vol 95. No 2: 100–103.

Luis Carlos Cachafeiro
IES Pontepedrinha
Santiago de Compostela, Galiza

Materiais para a aula de Matemática

Grão a Grão

O jogo Grão a Grão foi adaptado de Reys et al (1992:26) e tinha o nome de *Estimating Decimals between 0 and 1*. As regras do jogo foram respeitadas, mas foram elaborados outros materiais de apoio a esta actividade, como as fichas de registo e de comentário. O tabuleiro do jogo também foi construído sendo o seu design da responsabilidade de António Menino.

António César de Sá
Maria da Graça Zenhas

A propósito deste material, ler o artigo *Um jogo na aula de Matemática*, publicado nesta revista.