Teoria de Jogos: Apresentação e Representação

Maria Cristina Peixoto Matos
Manuel Alberto Martins Ferreira

Este artigo é o primeiro de uma sequência que tem por objectivo familiarizar os leitores com a teoria de jogos, uma disciplina muito interessante e actual. A nossa abordagem, através de uma linguagem simples e minimizando a simbologia matemática, pretende realçar as diversas aplicações da teoria, pelo facto de pensarmos que as aplicações ajudam a entender a teoria e ilustram o processo de construção dos modelos. Para além de que as diferentes aplicações permitem comprovar que problemas semelhantes surgem em áreas distintas e que os mesmos instrumentos se podem aplicar em cada situação.

1. O que é teoria de jogos?

Foi há aproximadamente quarenta anos que o matemático John von Neumann e o economista Oskar Morgenstern, ao tentarem resolver determinados problemas económicos, *repararam* que os problemas típicos do comportamento económico coincidiam com os princípios matemáticos aplicados a determinados jogos de estratégia. Foi o princípio da teoria de jogos.

Nas décadas seguintes, após a publicação da obra *Theory of Games and Economic Behaviour* (1944), a teoria de jogos despertou grande interesse devido quer às suas novas propriedades matemáticas, quer às suas diversas aplicações a problemas sociais, económicos e políticos, etc. Continuamente em desenvolvimento, esta disciplina afecta várias ciências em amplos aspectos. A razão pela qual as aplicações são imensas e se ocupam de problemas altamente significativos deve-se ao facto da estrutura matemática da teoria tornar mais fácil definir os conceitos com rigor, verificar a consistência das ideias e explorar as implicações dos resultados. Consequentemente, conceitos e resultados são precisos, interpostos com motivações e interpretações dos próprios conceitos. Além disso o uso dos modelos matemáticos cria independência dos meros interesses matemáticos.

A teoria de jogos analisa situações competitivas que envolvem conflitos de interesse. A sua premissa básica é a racionalidade das decisões, ou seja, supõe que cada jogador procura constantemente maximizar algum benefício, que pode ser de qualquer ordem, isto é, procura objectivos exógenos bem definidos (é racional) e tem em conta o seu conhecimento ou expectativas sobre o comportamento dos outros jogadores (age estrategicamente).

A teoria de jogos usa a matemática para expressar as suas ideias formalmente contribuindo para o entendimento dos fenómenos que se observam quando são tomadas decisões que interagem entre si.

2. O que é um jogo?

Quando perguntamos a alguém o que é um jogo geralmente respondem-nos que é qualquer passatempo ou diversão. Se pedirmos que nos dêem exemplos de jogos, a resposta é, com muita frequência: xadrez, damas, monopólio, póquer, futebol, andebol, basquetebol, vídeo jogos, etc. Se analisarmos as respostas com o mínimo de atenção verificamos que a maior parte das pessoas define um jogo de forma pouco rigorosa, no entanto, os exemplos de jogos que sugerem não deixam dúvidas sobre o que é, de facto, um jogo. Também das respostas dadas podemos constatar, que dos vários exemplos de jogos sugeridos estes podem ser classificados em categorias diferentes: jogos de mesa, jogos de cartas, jogos desportivos, jogos electrónicos; jogos com vários jogadores e jogos com apenas um jogador.

Pelo facto de estarmos perante situações tão diferenciadas que recebem o mesmo nome, jogo, elas devem possuir alguma característica ou um conjunto de características comuns. Fazendo uma análise simples podemos identificar de imediato que em todo o jogo existem regras que indicam ao jogador o que pode ou não fazer. Por outro lado, o jogador procura uma estratégia que resulte na obtenção de determinado objectivo em oposição com os outros jogadores que também tentam optimizar o seu ponto de vista. O resultado final depende do conjunto das estratégias adoptadas por todos os participantes, fenómeno que se denomina por interdependência estratégica. Então, "um jogo é qualquer situação governada por regras com um resultado bem definido caracterizado por uma interdependência estratégica".

Atendendo à sua generalidade, podemos encontrar jogos em abundância na vida real: política internacional (como obter vantagens numa negociação de paz), economia (como aumentar a nossa participação em relação aos nossos concorrentes), vida familiar (como manobrar os pais para que eles comprem uma moto para o filho), uma batalha, campanhas eleitorais, uma partida de xadrez, uma partida de futebol são disto exemplo.

3. Representações dos jogos

Os elementos essenciais de um jogo são:

- Jogadores — intervenientes do jogo
- Estratégias — conjunto de decisões que os jogadores tomam
- Resultados (*payoffs*) — ganhos ou perdas de cada jogador

Como a estratégia de cada jogador afecta o resultado final do jogo, cada jogador deve interessar-se por saber o que os demais jogadores podem fazer e deve estar consciente de que estes ponderarão sobre quais as suas decisões.

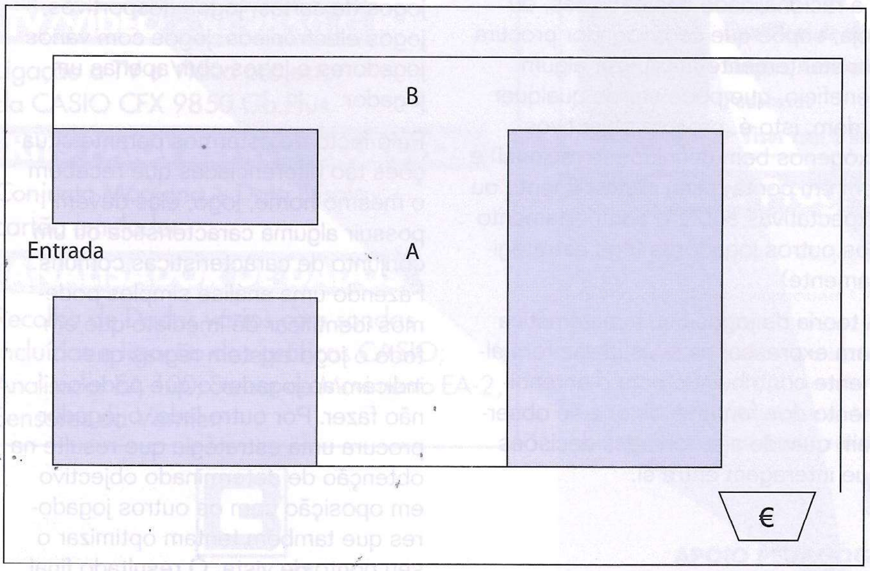

Figura 1. Labirinto do pote de ouro

Os termos estratégia, jogador e *payoff* têm aqui aproximadamente o mesmo sentido que em linguagem comum. No entanto, um jogador não tem que ser necessariamente uma única pessoa. Se todos os membros de um grupo têm a mesma opinião em relação ao modo de actuar no jogo, o grupo inteiro pode ser considerado um único jogador, um jogador pode ser uma empresa, uma cidade, um país ou uma equipa de futebol.

Em teoria de jogos, uma estratégia significa um plano de acção completo, que descreve quais serão as reacções de um jogador perante qualquer circunstância possível. Em linguagem comum, a palavra estratégia parece indicar uma atitude inteligente, neste caso tal não acontece. Existem estratégias deficientes bem como estratégias muito adequadas. Por outro lado temos de colocar a hipótese de um jogador alterar a sua estratégia ao longo do jogo. Como exemplo desta situação basta pensarmos nos jogadores de xadrez ao reconsiderarem a sua posição após jogada do seu oponente ou mesmo a revisão anual dos aumentos salariais entre sindicatos e governo. Todavia podemos considerar que todas estas decisões estão englobadas constituindo uma única estratégia.

Agora que já sabemos quais os elementos que devem ser tomados em conta quando estudamos um jogo levanta-se uma questão: como formalizar o jogo de forma a encontrarmos a(s) sua(s) solução(ões)? A teoria de jogos apresenta vários modelos matemáticos para o efeito. O mote do seguinte exemplo é apresentar três representações: forma normal ou forma estratégica, forma extensiva e forma codificada.

Consideremos o jogo da Figura 1 denominado Labirinto do pote de ouro.

Dois jogadores, jogador 1 e jogador 2, têm de encontrar, dentro das saídas do labirinto, aquela que contém o pote com certa quantia de dinheiro Q. O objectivo do jogo é que os dois jogadores tomem decisões de forma a encontrarem a saída correcta e dividir equitativamente o dinheiro. Caso não encontrem esta saída não ganham nada. O jogador 1 joga em primeiro lugar e pode ir para a direita ou para a esquerda. Se decidir ir para a direita, o jogo acaba com um resultado 0 para cada jogador. Esta situação será representada por $(u_1, u_2) = (0, 0)$. Se escolher ir para a esquerda, chega a vez do jogador 2 tomar a sua decisão. Da mesma forma este jogador pode escolher ir para a direita ou para a esquerda. Se escolher esquerda, o jogo acaba com um resultado $(u_1, u_2) = (0, 0)$.

Optando o jogador 2 pela direita, o jogo também termina. Neste caso encontraram o pote de dinheiro, e o resultado do jogo será representado por

$$(u_1, u_2) = \left(\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}\right).$$

Os dois jogadores, obviamente, pretendem chegar à saída que tem o pote pois, tal como na vida real, quanto mais dinheiro melhor.

A análise feita teve como base uma descrição simplista do jogo. A teoria de jogos tem uma forma precisa de descrever o jogo, a representação na forma extensiva. (Figura 2)

O desenvolvimento de um jogo consiste nas decisões que os vários jogadores tomam. Assim comecemos a descrição deste jogo com o primeiro ponto de decisão. Um círculo significa que algum jogador tem que tomar uma decisão nesse ponto. O número do jogador ao qual corresponde decidir, neste caso o jogador 1, aparece no interior do círculo. Deste ponto de decisão saem dois segmentos de recta. Estes segmentos representam as opções do jogador 1 nesse ponto de decisão: esquerda ou direita. O segmento designado Direita conduz a uma parede, fazendo com que o jogo acabe. O final do jogo representa-se por um ponto terminal. Cada ponto terminal tem associado um resultado. Como encontrar uma parede supõe cada jogador ganhar *0 euros*, o resultado $(0,0)$ é o que se associa a esse ponto terminal. Se o jogador 1 decidir ir para a esquerda, chega a outro ponto de decisão. Quem tem de tomar a decisão neste ponto é o jogador 2. Igualmente, neste ponto de decisão o jogador 2 tem duas possibilidades, esquerda ou direita. Estas opções (também chamadas jogadas) representam-se novamente por meio de segmentos de recta que saem do ponto de decisão, denominadas Esquerda e Direita. Se o jogador 2 vai para a esquerda, encontra uma parede (um ponto terminal) e o resultado será $(0,0)$. Se vai para a direita, sairá do labirinto (ponto terminal) e conseguirá o pote de ouro. O resultado será

$$\left(\frac{Q}{2},\frac{Q}{2}\right).$$

A forma extensiva contém toda a informação sobre o labirinto do pote de ouro que é necessária para o resolver. Em termos matemáticos, a forma extensiva é um diagrama de árvore, chamado assim porque se vê à direita desde o ponto de partida. Existem termos especiais para os elementos da forma extensiva. Os pontos destacados da árvore chamam-se nós. Todo o jogo começa com um nó inicial. No nosso jogo este é o nó onde o jogador 1 decide. Um nó com um círculo à sua volta e um número de um jogador no seu interior chama-se conjunto de informação. Este indica a que jogador compete jogar e o que o jogador sabe nesse momento. Os segmentos de recta que saem de cada nó designam-se por ramos, seguindo a metáfora da árvore, equivalendo cada um a uma estratégia que o jogador tem à sua disposição. Os resultados correspondentes a cada nó terminal recebem o nome de *payoffs*.

Vimos que a forma extensiva do labirinto do pote de ouro consiste em nós, ramos, nós terminais e *payoffs*. A teoria de jogos tem outra forma para descrever este jogo. Esta descrição, que se baseia apenas em estratégias, denomina-se forma normal ou forma estratégica. A forma normal codifica toda a informação da forma extensiva numa matriz.

Para construirmos a forma normal do Labirinto do pote de ouro, listamos as estratégias de cada jogador. Neste jogo o jogador 1 tem duas estratégias possíveis. Estas estratégias são Esquerda e Direita. De forma semelhante o jogador 2 também tem duas estratégias: Esquerda e Direita. Atendendo ao número de estratégias que cada jogador dispõe a matriz que se irá obter será do tipo 2×2 (isto é, uma matriz com duas linhas e duas colunas). Consideremos que as linhas correspondem às estratégias do jogador 1 e as colunas correspondem às estratégias do jogador 2. Os *payoffs* correspondentes aos nós terminais da forma extensiva do jogo vão constituir os elementos da matriz da forma normal. Por exemplo, o par de estratégias: o jogador 1 vai para a esquerda e o jogador 2 vai para a direita corresponde ao vector de *payoffs*

$$\left(\frac{Q}{2},\frac{Q}{2}\right).$$

De forma análoga se constróem os outros elementos da matriz. Assim, observamos na Figura 3 a matriz de pagamentos que representa o jogo Labirinto do pote de ouro na forma normal.

A última forma de representação que apresentaremos designa-se por forma codificada. A forma codificada de um jogo assenta no pressuposto de uma leitura linear do jogo e consiste numa tabela que contém toda a informação do jogo. Para se construir a forma codificada de um jogo começamos por codificar as estratégias de cada jogador. Como já vimos anteriormente cada jogador tem 2 estratégias: ir para a esquerda — E; ir para a direita — D.

Começamos por construir a tabela, segundo a ordem da esquerda para a direita, preenchendo a primeira coluna com o número da jogada. A coluna imediatamente à direita contém um par ordenado que indica qual o jogador que está a jogar e qual a estratégia adoptada. Logo à direita desta coluna colocamos a informação correspondente ao jogador que joga em segundo lugar, um par ordenado com o número do jogador e a sua estratégia escolhida. Sendo as jogadas sequenciais, para além de mudar de coluna, muda-se de linha. Caso as jogadas sejam simultâneas faz-se apenas mudança de coluna. De forma análoga se preenchem as seguintes colunas até se esgotarem as jogadas. A última coluna indica os *payoffs* resultantes das jogadas efectuadas sendo aqueles colocados na linha correspondente ao jogador que conduziu à jogada final. A ordem dos jogadores é arbitrária quando as jogadas são simultâneas. Os campos não preenchidos repetem a informação da linha anterior.

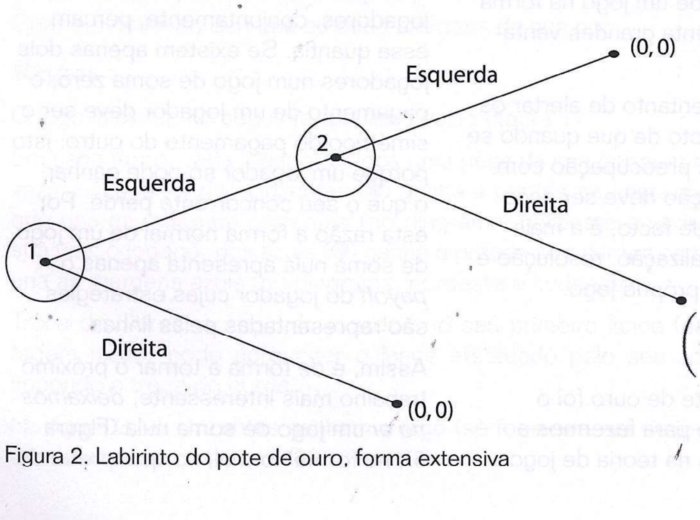

Figura 2. Labirinto do pote de ouro, forma extensiva

		Jogador 2	
		Esquerda	Direita
Jogador 1	Esquerda	(0, 0)	$\left(\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}\right)$
	Direita	(0, 0)	(0, 0)

Figura 3. Labirinto do pote de ouro, forma normal

1	(1,"D")		(0, 0)
	(1,"E")		
2		(2,"E")	(0, 0)
		(2,"D")	$\left(\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}\right)$

Figura 4. Labirinto do pote de ouro, forma codificada

Voltemos ao labirinto do pote de ouro agora representado na forma codificada. Uma vez que quando o jogador 1 escolhe ir para a direita o jogo termina, não havendo qualquer intervenção do jogador 2, na coluna correspondente a este jogador não se coloca qualquer informação. Caso o jogador 1 opte pela esquerda, é a vez do jogador 2 tomar uma decisão. Neste ponto, não havendo simultaneidade de jogadas, mudamos de linha e em função das escolhas do jogador 2, preenchemos a coluna dos *payoffs*. (Figura 4)

Neumann e Morgenstern foram os criadores da distinção entre representação de um jogo na forma extensiva e representação na forma normal. No entanto alguns puristas afirmam que só se devem estudar jogos na forma extensiva. Os autores da distinção das representações defendem que o estudo dos jogos na forma normal facilita a sua compreensão.

Todas as formas de representação de jogos abordadas anteriormente têm vantagens. A forma normal simplifica o jogo matematicamente e codifica toda a informação da forma extensiva numa matriz. Além disso a forma normal é mais adequada a situações em que se pretende estabelecer propriedades comuns a todos os jogos. Por outro lado é mais fácil fazer a descrição verbal de um jogo quando este está representado na forma extensiva ou na forma codificada. Estas formas também são de mais fácil utilização quando se pretende estudar parte de um jogo ou jogos mais pequenos. De facto, se estamos perante um jogo muito complicado, uma das maneiras de o analisar é considerar subjogos e, neste caso, é melhor ter a representação extensiva ou codificada do jogo. Nestas condições é mais fácil determinar quais os ramos/colunas que se devem escolher do que partir de uma matriz.

Ocorre por vezes que jogos com formas extensivas ou formas codificadas diferentes tenham a mesma forma normal. Isto é devido ao facto da forma normal suprimir alguma informação disponível na forma extensiva. Cada forma extensiva ou forma codificada tem uma única forma de representação em forma normal. No entanto, para cada jogo na forma normal existem habitualmente vários jogos em forma extensiva ou forma codificada que poderiam corresponder a essa forma normal. Podemos concluir que a forma normal se centra nas consequências das diferentes estratégias, pois suprime parte de minuciosidade da forma extensiva.

Por outro lado, quando se analisam jogos com mais de 3 jogadores, quer a forma extensiva quer a forma normal podem ser de difícil manuseamento, contrariamente ao que acontece com a forma codificada. Contudo, considerando que a importância de uma representação se prende com facilidade de interpretação, facilidade de solucionar o jogo, informação fidedigna do jogo, a representação de um jogo na forma codificada apresenta grandes vantagens.

Gostaríamos no entanto de alertar os leitores para o facto de que quando se estuda um jogo a preocupação com a sua representação deve ser escolher aquela que, de facto, é a mais adequada à formalização, resolução e interpretação do próprio jogo.

4. Um jogo

O labirinto do pote de ouro foi o veículo escolhido para fazermos a primeira incursão na teoria de jogos. Tratando-se de um jogo muito simples, depreendemos que qualquer um de nós consegue facilmente encontrar a sua solução, isto é, antever o que cada jogador deve fazer de modo que todos os jogadores obtenham o maior benefício possível. Obviamente isso nem sempre é possível, como iremos ver. Os jogos serão cada vez mais complicados e cada vez menos fiáveis. Veremos que jogos de dois jogadores com interesses totalmente opostos apresentam soluções aceites universalmente. Se contudo existem mais de dois jogadores, o que ocorre na maioria das vezes, ou se os jogadores apresentam objectivos comuns, pode ser que não existam soluções, ou que existam demasiadas. Normalmente, nestes casos decidimos pelas soluções mais estáveis, pelas mais verosímeis ou mais equivalentes. No entanto, ainda que estas soluções possam ser as mais plausíveis, geralmente não têm por que impor-se às outras.

O passo seguinte será analisar jogos de dois jogadores de soma nula. A interpretação destes jogos é que os interesses dos jogadores são totalmente opostos, um jogador não ganha uma quantia a menos que os outros jogadores, conjuntamente, percam essa quantia. Se existem apenas dois jogadores num jogo de soma zero, o pagamento de um jogador deve ser o simétrico do pagamento do outro; isto porque um jogador só pode ganhar o que o seu concorrente perde. Por esta razão a forma normal de um jogo de soma nula apresenta apenas o *payoff* do jogador cujas estratégias são representadas pelas linhas.

Assim, e de forma a tornar o próximo trabalho mais interessante, *deixamos no ar* um jogo de soma nula (Figura 5), na forma normal, no qual pretendemos que os leitores concentrem a sua atenção por uns momentos e tentem precisar qual será o resultado que se obteria segundo a decisão que tomará em cada caso.

O leitor escolherá uma linha (A, B ou C) e o seu opositor escolhe uma coluna (I, II ou III), de modo que nenhum dos dois conheça qual é a escolha do seu oponente no momento em que tem de tomar uma decisão. O número que figura na intersecção da linha que escolheu e da coluna que escolheu o seu opositor, será a quantidade de euros que lhe terá de pagar o seu oponente. Assim, se tiver escolhido a linha A, e o seu opositor a coluna III, receberá um euro, mas se este tivesse escolhido a coluna II, teria de ser o leitor a pagar-lhe dois euros, uma vez que o número é negativo. Deverá supor que o seu opositor conhece perfeitamente as regras do jogo, e que é tão inteligente como o próprio leitor. Recorde que ao tomar a sua decisão deve ter em conta o que pode pensar o seu oponente.

		OPONENTE		
		I	II	III
LEITOR	A	5	– 2	1
	B	6	4	2
	C	0	7	– 1

Figura 5. Jogo

Bibliografia

Berck, Peter; Sydsaeter, Knut; *Manual de Matemática para Economistas*, McGraw–Hill de Portugal, 1993.

Bicchieri, Cristina; Jeffrey, Richard; Skyrms, Brian; *The Logic of Strategy*, Oxford University Press, Inc., 1999.

Davis, Morton D.; *Introducción a la Teoría de Juegos*; Tradução espanhola por José Carlos Gómez Borrero; Ciencia e Tecnología, Alianza Editorial, Madrid, 1986.

Fudenberg, Drew; Tirole, Jean; *Game Theory*; Cambridge, Mass: Mit. Press, 1991.

Gibbons, Robert; *Game Theory for Applied Economist*; Princeton University Press, 1992.

Matos, M. C. Peixoto and Ferreira, M.A.M.; *Games in Code Form*. Presented at the Fifth Spanish Meeting on Game Theory. Sevilla. 1–3 July. 2002.

Matos, M. C. Peixoto e Ferreira, M.A.M.; *Jogos na Forma Codificada*. Temas em Métodos Quantitativos 3. Editores: Elizabeth Reis e Maria Manuela Hill. ISCTE. Edições Sílabo. Lisboa. 2003.

Neumann, J. von; Morgenstern, O.; *Theory Of Games and Economic Behaviour*, John Wiley & Sons, Inc; New York, 1967.

Osborne, Martin J.; *An Introduction to Game Theory*, Oxford University Press, 2000.

Kara, Tarik, *Lecture Notes on Game theory*, //www.gametheory.net ,2002.

Yildiz, Muhamet, *Game Theory Lecture Notes*, //www.gametheory.net ,2002.

Maria Cristina Peixoto Matos
Instituto Politécnico de Viseu
Escola Superior
de Tecnologia de Viseu
Dep. de Matemática

Manuel Alberto Martins Ferreira
Instituto Superior de Ciências
do Trabalho e da Empresa
Dep. de Métodos Quantitativos

HEX na EM

Neste número da Revista *Educação e Matemática* é publicado em anexo um tabuleiro para o jogo do HEX. Assim, apresentamos de seguida as regras do mesmo.

Material

- Um tabuleiro como o da figura 1.
- 100 peças (50 de cada cor).

Objectivo

Criar um caminho que una as duas margens da sua cor.

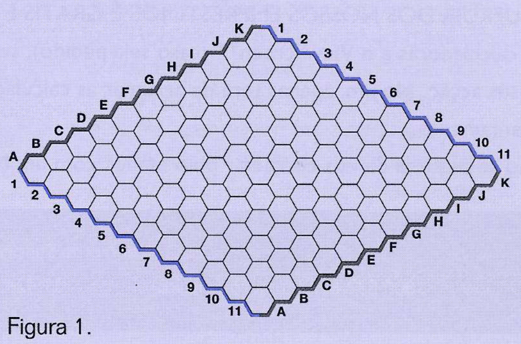

Figura 1.

Regras

O jogo inicia-se no seguinte tabuleiro vazio (figura 1).

Em cada turno, cada jogador coloca uma peça da sua cor num hexágono vazio. O jogador das cinzentas (●) ganha a partida se criar um caminho que una as margens cinzentas (no diagrama, noroeste e sudeste). Por sua vez, o jogador das azuis (●) ganha a partida se criar um caminho que una as margens azuis (no diagrama, nordeste e sudoeste).

Troca de Cores: o segundo jogador, no seu primeiro lance (se vir vantagem nisso) pode aproveitar o lance efectuado pelo seu adversário, impondo a troca de cores.

Na figura 2, as cinzentas ganham o jogo (se for a sua vez de jogar) colocando uma peça na casa G2.

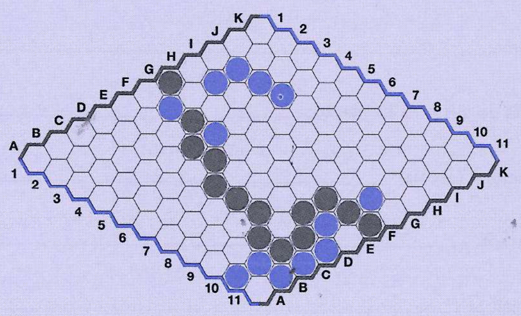

Figura 2.