HEX

Jorge Nuno Silva

Generalidades

O jogo Hex foi inventado (pelo menos) duas vezes. Uma, pelo matemático e poeta dinamarquês Piet Hein em 1942, a outra pelo matemático americano John Nash em 1948, mas foi Martin Gardner quem o popularizou nas colunas do *Scientific American*. Trata-se de um jogo de conexão que se desenrola num tabuleiro como o ilustrado na Figura 1.

Há dois jogadores, um joga com peças cinzentas (●), o outro com as azuis (●). Cada jogada consiste em colocar num hexágono livre uma peça da sua cor. Ganha quem conseguir unir duas margens paralelas com a sua cor. Na Figura 1 o jogador que conduz as azuis deve tentar unir as margens que correspondem aos pontos cardeais NE e SO.

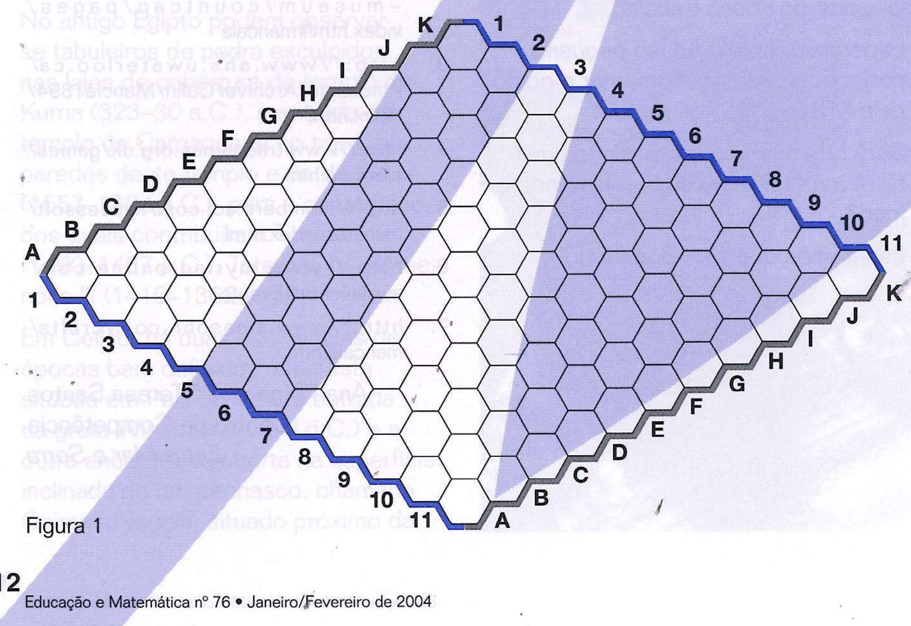


Figura 1

Pode jogar-se com outras dimensões do terreno de jogo, mas tabuleiros pequenos conduzem a jogos muito previsíveis, e demasiado grandes a jogos muito demorados. A dimensão ilustrada, 11 por 11, reúne hoje o consenso dos praticantes.

Para jogar por email pode utilizar-se somente os caracteres ASCII do teclado, obtendo imagens como a da Figura 2 (para um tabuleiro 5x5)

```
A B C D E
1 ♦ ♦ ♦ ♦ ♦
  2 ♦ ♦ H ♦ ♦
    3 ♦ ♦ H V ♦
      4 ♦ V ♦ ♦ ♦
        5 ♦ ♦ ♦ ♦ ♦
```

Figura 2

A notação H–V deve-se ao facto de, para utilizar um tabuleiro deste género, teve de se proceder a uma rotação, cada jogador está agora naturalmente associado a uma direcção (Horizontal, Vertical).

Para dar uma ideia da complexidade deste jogo, vejamos o número de posições que podem ocorrer de facto num jogo que se desenvolve em tabuleiros pequenos. Num 2x2 temos 17, num 3x3 temos 2 844 e, num 4x4, há mais de 4 800 000 posições possíveis. Num tabuleiro 11x11 não se sabe quantas posições legítimas há, mas o seu número é impressionante. É este facto que justifica que os computadores não sejam muito bons jogadores de Hex.

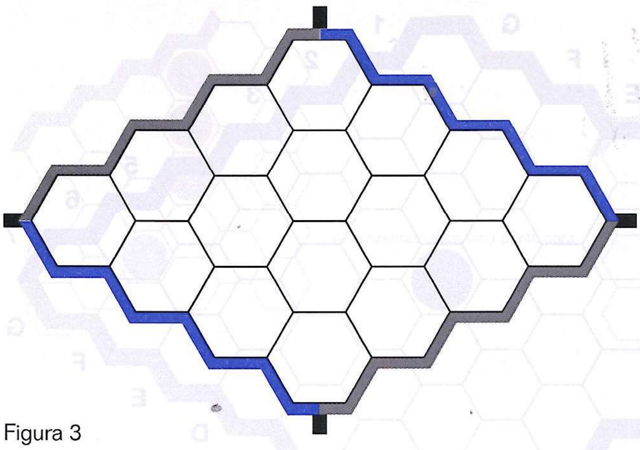


Figura 3

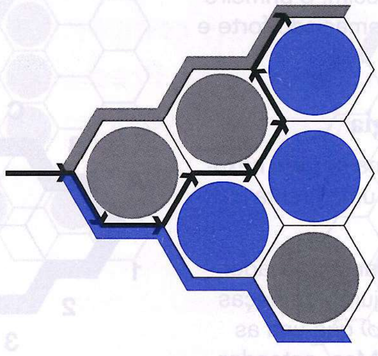


Figura 4

Há vários locais na www onde se pode jogar Hex (por exemplo, http://www.mazeworks.com/hex7/index.htm) e onde obter programas grátis para descarregar (aconselhamos Hexy, em http://home.earthlink.net/~vanshel).

Alguma teoria

Nenhum jogo de Hex pode terminar empatado. Este resultado pode ver-se intuitivamente, se interpretarmos uma cor como sendo água, e a outra um muro de pedra. Se imaginarmos todas as casas do tabuleiro ocupadas, então das duas uma: ou flui água, ou há um dique que separa duas massas de água. Claro que também há uma demonstração matemática deste resultado, da autoria de David Gale. Não a faremos aqui em pormenor, mas mostraremos em que se baseia. Admitamos que todos os hexágonos estão ocupados. Por conveniência identificamos cada margem com a respectiva cor e acrescentamos quatro segmentos nos cantos, como ilustrado na Figura 3.

Escolha-se um vértice exterior de um dos cantos com ângulo agudo. Trace-se uma linha para um vértice adjacente segundo as regras (ver Figura 4):

- Cada linha deve separar hexágonos ocupados por cores diferentes.
- Não se pode percorrer a mesma linha, nos dois sentidos, em movimentos consecutivos.

Gale provou que esta linha quebrada não pode terminar dentro do tabuleiro, nem pode visitar duas vezes o mesmo vértice. Portanto, terá de terminar num vértice exterior. Isso prova que uma das cores ligou as duas margens correspondentes.

No caso exemplificado na Figura 5 as cinzentas ganharam.

Outro resultado importante da teoria deste jogo, e que se deve a John Nash, é o facto de qualquer jogo de Hex poder, teoricamente, ser sempre ganho pelo primeiro jogador, se este conhecer a estratégia apropriada. Contudo, para dimensões não triviais (11x11 é um dos casos, claro) ninguém conhece essa estratégia. O argumento de Nash prova a existência de uma estratégia vencedora para o primeiro jogador, mas nada nos ajuda a encontrá-la. Trata-se de uma demonstração por absurdo.

Já vimos que nenhum jogo de Hex pode terminar empatado, logo ou o primeiro ou o segundo jogador tem uma estratégia vencedora.

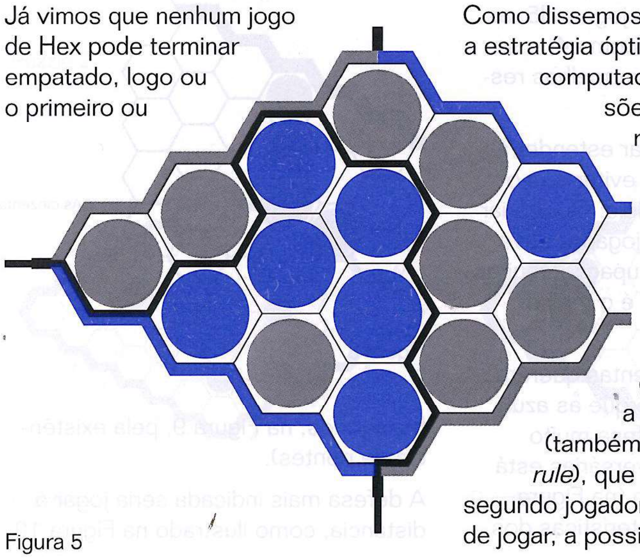


Figura 5

Suponhamos que era o segundo jogador que, jogando perfeitamente, tem a vitória assegurada. Então o primeiro começa por jogar aleatoriamente, e encara-se como sendo o segundo jogador, roubando-lhe a estratégia vencedora que se supôs existir. Sempre que tiver de jogar onde, por acaso, já o tinha feito, torna a jogar à sorte … Assim, tem a vitória garantida, partindo do princípio que há estratégia vencedora para o segundo. Resumindo: se admitirmos que o segundo jogador vai ganhar então … o primeiro ganha! Absurdo. Como alguém tem de dispor de uma estratégia vencedora, terá de ser o primeiro.

Este argumento é agora clássico e aplica-se a muitos jogos, tendo ficado conhecido por *argumento do roubo de estratégia*.

Como dissemos, ninguém conhece a estratégia óptima, nem mesmo os computadores, se as dimensões do tabuleiro forem razoáveis. Contudo, se a primeira jogada for muito forte, por exemplo nas casas centrais da diagonal menor, o primeiro jogador fica na posse de grande vantagem. Daí a instituição da *pie rule* (também conhecida por *swap rule*), que consiste em dar ao segundo jogador, na sua primeira vez de jogar, a possibilidade de trocar de cores, aproveitando o primeiro lance do seu adversário. Assim, o primeiro jogador não jogará demasiado forte e a luta fica equilibrada.

Táctica e Estratégia

Duas peças da mesma cor em hexágonos que partilhem uma aresta dizem-se *adjacentes*.

Claro que, para ganhar, um jogador necessita de um conjunto de peças adjacentes (um *grupo*) que una as suas duas margens. Mas, estender os seus grupos com movimentos adjacentes, nem sempre é a melhor ideia. Vejamos quais as distâncias, contabilizadas em termos de movimentos adjacentes, a uma casa determinada.

Na Figura 6, à distância de um lance de d4 estão as casas c4, c5, d3, d5, e3, e4, são as casas adjacentes a d4. As casas adjacentes a estas, que ainda não tenham sido listadas, só precisam de mais uma jogada para serem atingidas. Assim, à distância de duas jogadas de d4 estão b4, b5, b6, c3, c6, d2, d6, e2, e5, f2, f3, f4. E assim sucessivamente.

Repare-se que, para ir de d4 a qualquer casa que diste desta casa duas unidades há sempre dois caminhos, portanto d4 pode sempre ligar-se, por adjacência, a qualquer casa a duas unidades de distância. A este tipo de ligação chama-se *ponte*. As pontes são das jogadas mais fortes do Hex. A Figura 7 mostra uma ponte entre d4 e e5.

Aqui as peças d4 e e5 não podem ser separadas. Se as azuis jogam d5, as vermelhas respondem com e4, e se as azuis jogam e4, as vermelhas respondem com d5.

Devemos sempre tentar estender a nossa *conectividade* e evitar que o adversário estenda a dele. Contrariar as intenções do outro jogador deve ser sempre uma preocupação, muitas vezes uma boa defesa é o melhor ataque.

Admitindo que as cinzentas querem estender-se para sul, o que as azuis querem evitar, uma defesa muito próxima das peças adversárias está condenada ao fracasso (na Figura 8, por causa das características dos hexágonos; na Figura 9, pela existência de pontes).

A defesa mais indicada seria jogar à distância, como ilustrado na Figura 10.

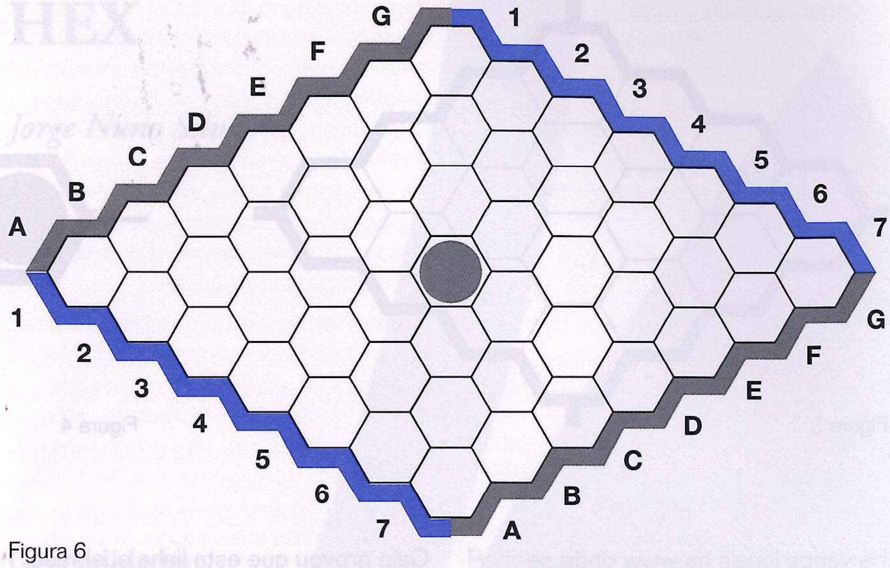


Figura 6

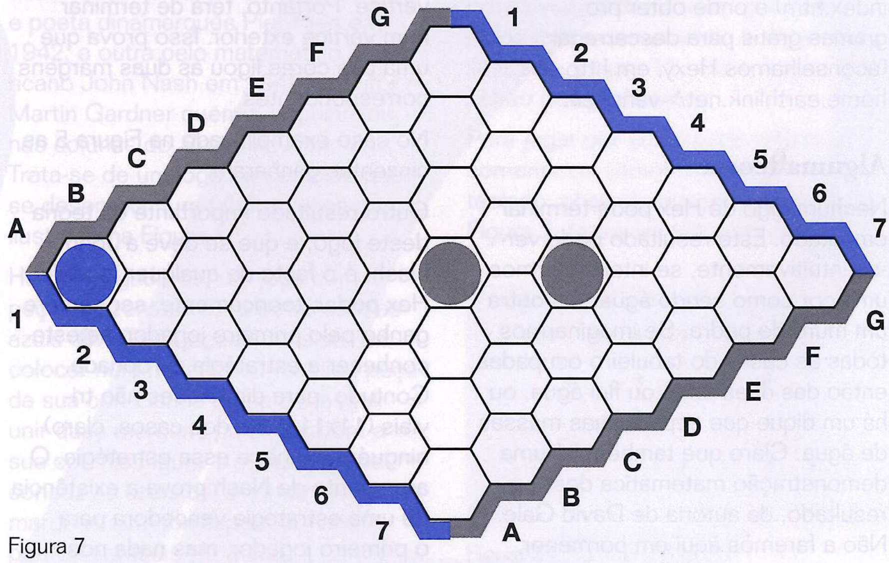


Figura 7

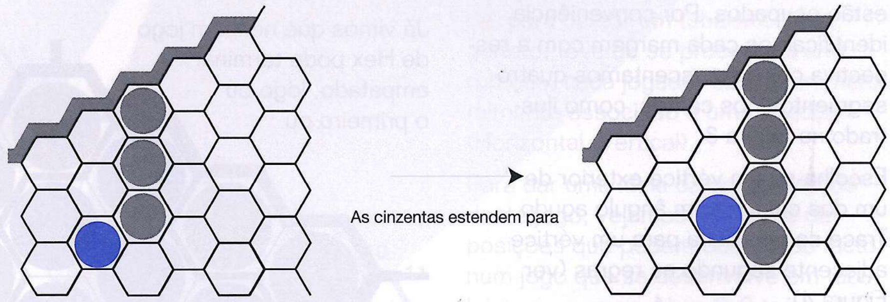


Figura 8

Para considerações tácticas e estratégicas mais aprofundadas deve consultar-se a bibliografia no final, nomeadamente o livro de Cameron Browne.

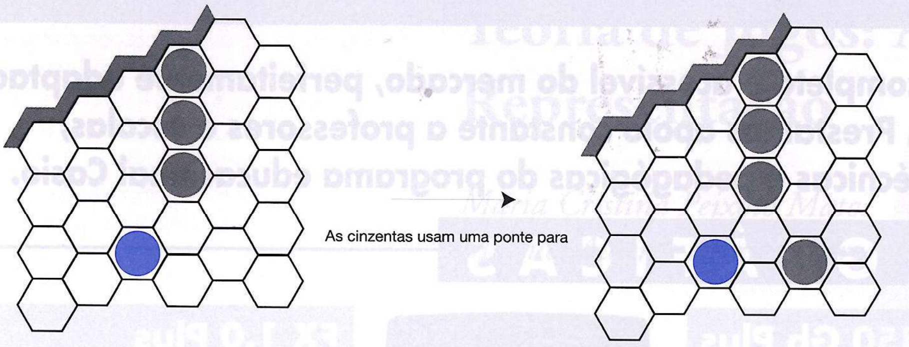


Figura 9

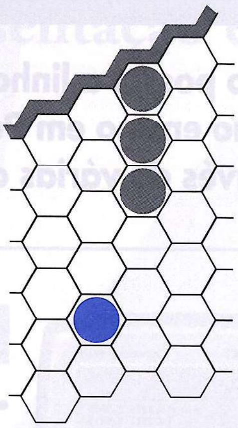


Figura 10

Puzzles

Apresentamos alguns problemas, para que os leitores possam praticar imediatamente.

1. As azuis jogam e ganham (Piet Hein). (Puzzle 1)
2. As azuis jogam e ganham (Piet Hein). (Puzzle 2)
3. As azuis jogam e ganham (Bert Enderton). (Puzzle 3)
4. As azuis jogam e ganham (Bert Enderton). (Puzzle 4)
5. As azuis jogam e ganham (Bert Enderton).(Puzzle 5)

Referências

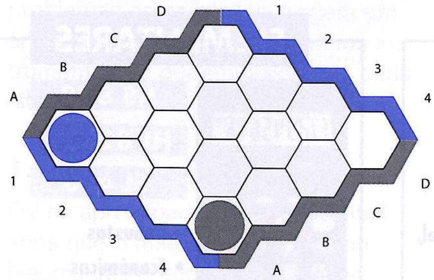
Browne, Cameron (2000), *Hex Strategy: Making the Right Connections*, A. K. Peters.

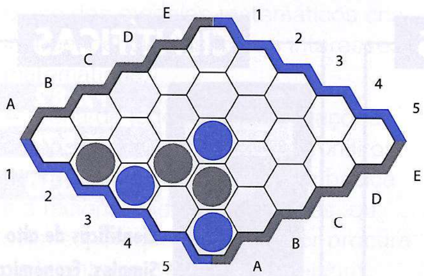
Gale, David (1979), *The game of Hex and the Brouwer fixed point theorem*. American Mathematical Monthly 86(10):818–827.

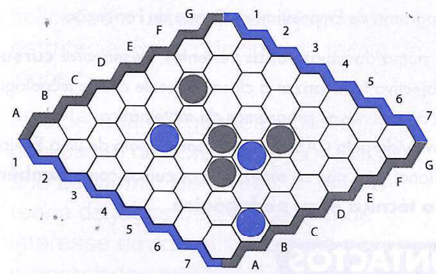
Gardner, M. (1959), *"The Game of Hex,"* Mathematical Puzzles and Diversions, Penguin, Hammondsworth, 70–77.

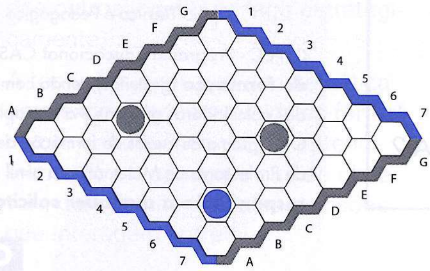
Parlett, D. (1999), *The Oxford History of Board Games*, Oxford University Press, Oxford.

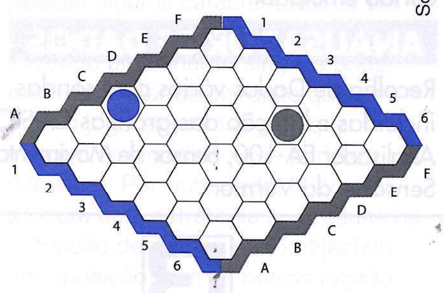
Jorge Nuno Silva
Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais
Universidade de Lisboa


Puzzle 1


Puzzle 2


Puzzle 3


Puzzle 4


Puzzle 5

Soluções: 1. b3; 2. c2; 3. d6; 4. e3; 5. d4.