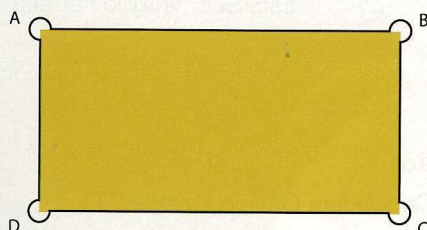


O Problema do ProfMat 2003

José Paulo Viana

O concurso apresentado aos participantes no *ProMat 2003* de Santarém consistiu na resolução do problema *Tabelas, tabelas ...*:

Aquela mesa de bilhar media 1 metro por 2 e tinha um buraco em cada canto.



O Garcia é um excelente bilharista. Colocou a bola no canto C e deu-lhe uma forte tacada sem efeito. A bola partiu veloz, foi fazendo várias tabelas e, depois de percorrer exactamente 13 metros, entrou num buraco.

Quantas tabelas fez a bola e em que buraco entrou?

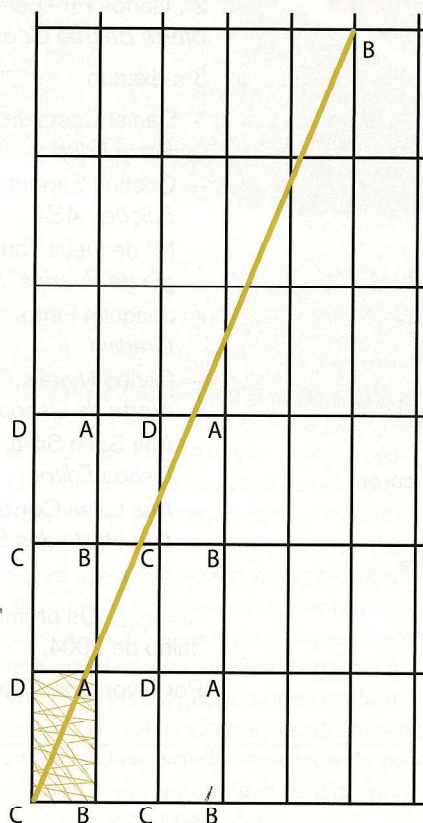
Comecemos pela introdução feita pelo Nuno e Angelina:

Como bilharistas experimentados — experimentamos muito e acertamos pouco — e baseados numa grande experiência ... teórica, sabemos que, em condições de mesa ideais e com bilharistas como o Garcia, se for dada uma forte tacada em qualquer direcção (para o lado de dentro da mesa, claro ...), a bola poderá entrar em algum dos outros buracos mas nunca em C.

E passemos agora à resolução do Eduardo Veloso:

Como as tabelas do bilhar funcionam como espelhos, os trajectos sobre o bilhar para tacadas a partir do ponto C, equivalem a semirectas do 1º quadrante com origem em C, se imaginarmos o bilhar reflectido indefinidamente nas tabelas/espelhos e nas imagens dessas tabelas umas nas outras. Estas reflexões formam uma rede rectangular.

Note-se a colocação, nessas imagens, dos buracos A, B, C e D que estão indicadas apenas nos primeiros rectângulos da rede.



Para $n \geq 0$ inteiro, os buracos têm na rede as seguintes coordenadas:

A $(2n+1, 2n+2)$

B $(2n+1, 4n)$

C $(2n, 4n)$

D $(2n, 2n+2)$

Como a bola acaba por cair num buraco, o seu trajecto nesta rede é um segmento com origem em C $(0, 0)$ e extremidade num nó. Esse segmento é a hipotenusa h de um triângulo rectângulo em que os catetos são as coordenadas (números naturais) j e k do buraco onde a bola caiu.

Como $h=13$, temos que procurar j e k (par) tais que $j^2+k^2=169$.

Os quadrados dos números pares que podem interessar são 4, 16, 36, 64, 100 e 144. O único cuja diferença para 169 é um quadrado perfeito é 144. A diferença é 25 e portanto o buraco onde a bola caiu tem as coordenadas $(5, 12)$, ou seja, é um B.

Quanto ao número de tabelas em que bate antes de cair em B, podem contar-se na figura: são 9.

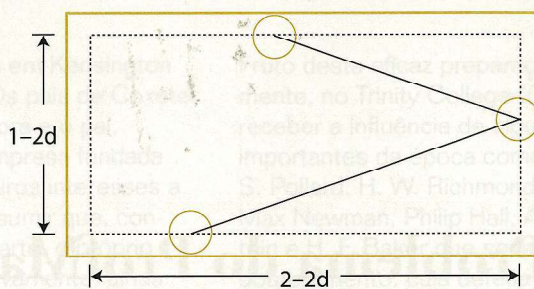
Houve vários outros processos de resolução:

- usando os programas de geometria dinâmica,
- fazendo uma grelha como a da figura anterior e traçando uma circunferência de raio 13 para ver se passava nalgum vértice,
- usando trigonometria,
- utilizando elipses e cálculos algébricos,

– experimentando com a calculadora gráfica.

O António Lucas fez uma curiosa montagem de acetatos para mostrar, passo a passo, a série de tabelas que a bola faz até chegar ao buraco B. Mas a Ana Sofia Silva foi mais longe com uma engenhosa dobragem em papel vegetal que permite ver toda a trajectória da bola no bilhar e depois, desdobrando, a recta que une o buraco de partida com o de chegada passando pelos vários rectângulos tal como se mostrou na resolução do Eduardo. O Miguel Ângelo também usou dobragens para a sua solução. O Daniel e a Sandra juntaram os dois processos, dobragens e acetatos, e depois apresentaram também a resolução em *PowerPoint* (um luxo!).

O Sérgio Valente apresenta, como curiosidade, o ângulo que da trajectória inicial da bola com o lado CD da mesa: $\text{arc sen}(5/13) \approx 22,6^\circ$.



O Carlos Morais verificou que, se houvesse mais um buraco a meio de cada um dos lados maiores (como nas verdadeiras mesas de bilhar), o problema teria outra solução.

O François Jacquet resolve o problema por um dos métodos anteriores mas depois levanta algumas questões extremamente interessantes:

1. Ou estamos a admitir que o diâmetro da bola é zero e por isso a solu-

ção, do ponto de vista matemático é exacta, mas do ponto de vista físico ... !

2. Ou consideramos que a bola tem um certo diâmetro d e então a bola percorre trajectórias no interior de um rectângulo de dimensões $2-2d$ e $1-2d$...

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira

Lista de participantes

Individuais:

António Lucas, Ana Luísa Correia,
Ana Salvado Ana Sofia Silva,
Carlos Morais, Carlos Próspero,
Cristina Saporiti, Eduardo Veloso,
François Jacquet, Gonçalo Perdigão,
Graça Braga da Cruz, Helder Martins,
Joaquim Pinto, Jorge Luz
José Orlando Freitas, Miguel Ângelo Gomes
Sérgio Valente, Vasco Dias
Vera Anselmo

Em equipa:

Daniel Castanho e Sandra Neves
Isabel Martins, M^a José Lopes e Natércia Soares
Iva & Nuno Angelino
M^a de Deus Torres, José Vieira e Célia Vieira

Premiados e prémios

1^o. Eduardo Veloso, *Calculadora Gráfica Voyage 200*, oferta Texas Instruments.

2^o. Carlos Próspero, *Calculadora Gráfica FX 9750 G Plus*, oferta Beltrão Coelho.

3^os exaquo

- Daniel Castanho e Sandra Neves, *Diciopédia*, oferta Porto Editora.
- Cristina Saporiti, “*A Rainha do Sul*”, um livro oferta das Edições ASA
- M^a de Deus Torres, José Vieira e Célia Vieira, “*Antologia de Puzzles*”, um livro oferta da Editora Replicação
- Joaquim Pinto, “*E=mc²*”, um livro oferta das Edições Gradiva
- Carlos Morais, “*Velas que Abriam o Mundo*”, um livro oferta da Lisboa Editora
- Ana Sofia Silva, “*A Estrela de Belém*”, um livro oferta da Lisboa Editora
- Ana Luísa Correia, “*Países do Mundo*”, um CD educativo oferta das Edições Texto

Atenção: Os prémios devem ser levantados até 31 de Julho de 2004.

Por favor, contactar a sede em Lisboa da APM.