



*António M. Fernandes*

# C xeter

**Um géometra excepcional**



Coxeter é por muitos considerado o maior geômetra clássico do século XX. Assim expressa, esta ideia pode considerar-se consensual. Quisérámos não utilizar o adjetivo clássico e outros, como Alan Connes, responsável pelo desenvolvimento da denominada *geometria não-comutativa*, elevando esta disciplina a um nível de abstracção e generalidade nunca antes alcançado, libertando-a de noções como a de ponto, se perfilariam, dada a riqueza conceptual e o carácter revolucionário do seu trabalho, como candidatos naturais a um tal título. Estes são, contudo, exercícios de um tipo subjectivo a que não teremos qualquer necessidade de recorrer, tal é a importância do trabalho de Coxeter. Este foi fruto de uma intensa actividade matemática, que alimentou durante cerca de 70 anos, ao longo dos quais publicou 12 livros e mais de 200 artigos em geometria e em teoria de grupos.

Coxeter distinguiu-se pelo modo como explorou a relação entre álgebra e geometria, para ser mais preciso, a relação entre a *teoria de grupos e geometria*. O fulcro deste relacionamento reside no conceito de simetria. Ele viria, contudo, a elevar esta relação a um nível de sofisticação tal que obteve, por esta via, uma ferramenta fundamental na descrição de muitos objectos que habitam em espaços hiperdimensionais, onde a força do olhar, de pouca valia em tais circunstâncias, é substituída pela força do cálculo algébrico. Consideremos, a título de exemplo, o caso dos polítopos regulares. Obtém-se um poliedro convexo, num espaço de determinada dimensão, intersectando um número finito de semi-espacos (no plano, um semi-espaço é a porção do plano que fica de um dos lados de uma recta, no espaço ordinário, um semi-espaço é a porção do espaço que fica de um dos lados de um plano, e assim sucessivamente). Um poliedro pode, assim, ser ilimitado (por exemplo um ângulo no plano). Aqueles que correspondem a regiões limitadas designam-se de polítopos. É difícil caracterizar a noção de regularidade em termos puramente geométricos, mesmo que tomemos a decisão de nos restringir a espaços de dimensões pequenas. Mas, ainda pior, essas formas são difíceis de generalizar e essa generalização seria pouco útil. Felizmente, Coxeter engendrou um modo de proceder a esta caracterização em termos puramente algébricos. Na figura seguinte representa-se um icosaedro e uma das suas

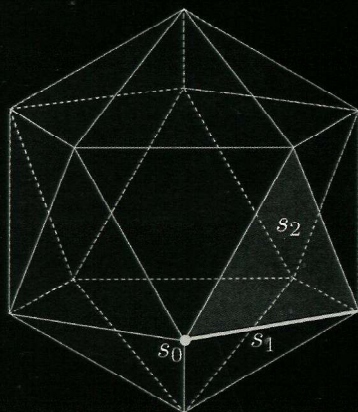


Figura 1. Icosaedro com uma das suas bandeiras assinalada.

*bandeiras*. Neste caso (da dimensão 3) uma bandeira é uma sequência  $(s_0, s_1, s_2)$ , onde  $s_0$  é um ponto,  $s_1$  é uma aresta que incide nesse ponto e  $s_2$  é uma face que incide nesta aresta. A regularidade do icosaedro é traduzida pelo seguinte facto algébrico dadas duas quaisquer bandeiras,  $b_1 = \langle s_0^1, s_1^1, s_2^1 \rangle$  e  $b_2 = \langle s_0^2, s_1^2, s_2^2 \rangle$  existe sempre uma isometria do espaço  $\theta$  que transforma  $b_1$  em  $b_2$ , no seguinte sentido  $\theta(s_0^1) = s_0^2, \theta[s_1^1] = s_1^2$  e  $\theta[s_2^1] = s_2^2$ .

Em linguagem da teoria de grupos diz-se que o grupo de isometrias do icosaedro actua transitivamente no conjunto das suas bandeiras.

Tomando este facto como a definição de polítopo regular, Coxeter abriu as portas para que a álgebra pudesse substituir o olhar humano onde, como já se disse, esse olhar de pouco vale. Em certo sentido, podemos dizer que tanto o trabalho de Coxeter como o trabalho de Connes, revelam que a geometria consiste mais no exercício do pensamento geométrico que no estudo de propriedades de objectos particulares como o são pontos, rectas, planos ou outros, quaisquer que sejam.

Esta conexão entre a álgebra e a geometria foi ainda explorada por Coxeter a um outro nível. Ele produziu extenso trabalho no domínio da classificação dos grupos finitamente gerados, designadamente naqueles que são gerados por reflexões. Alguns dos resultados mais elegantes que se conhecem nesta área foram obtidos por Coxeter, depois de associar a cada grupo em estudo um determinado polítopo de que o grupo é o grupo de simetrias, usando assim a sua intuição geométrica na solução definitiva do problema.

Coxeter exerceria uma notável influência em diversas personalidades, não só outros matemáticos que com ele colaboraram ao longo da sua vida, (o trabalho em colaboração foi, de resto, uma das características de Coxeter) como também em outras, trabalhando em áreas distintas da matemática. O seu trabalho na classificação de polítopos regulares seria particularmente apreciado em meios tão distintos, como a Química, a Filosofia, a Arquitectura ou a Arte. Veremos disso alguns exemplos já de seguida.

## A geometria como um meio de transformar o mundo

O filósofo R. Buckminster Fuller foi profundamente influenciado pelo trabalho de Coxeter. Classificar Fuller como filósofo é, talvez, demasiado restritivo; ele era o que se pode considerar, e muitos efectivamente consideraram, como um pensador abrangente. Buckminster Fuller nasceu em 1895. Chegou a frequentar a Universidade de Harvard, mas foi expulso logo no primeiro ano devido a alegada *irresponsabilidade e falta de interesse*. Não obstante este facto, que certamente terá sido tomado como um mau indicador, ao longo da sua vida Fuller receberia 49 doutoramentos Honoris Causa e seria nomeado para receber o Prémio Nobel da Paz.



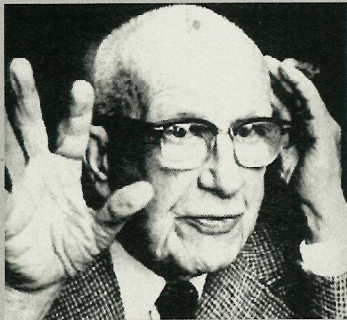


Figura 2. R. Buckminster Fuller.

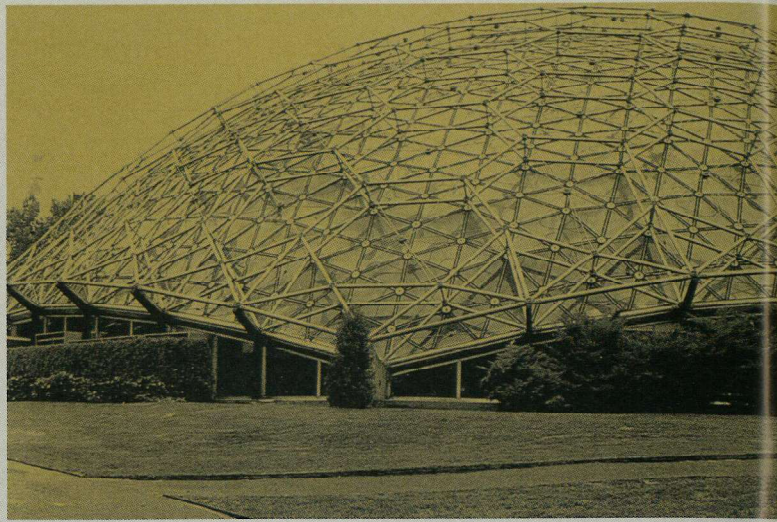


Figura 3. Cúpula geodésica.

Buckminster Fuller foi um dos primeiros futuristas a refletir sobre os problemas da humanidade de uma forma macroscópica e global. Em 1927, decidiu trabalhar *sempre e apenas em prol de toda a humanidade*. Adoptando esta postura reflexiva abrangente, Fuller pretendia obter estratégias consistentes para a eliminação de problemas gerais da humanidade como são a *pobreza, a doença e a habitação precária*. Com o seu programa almejava ainda poder antever quais viriam a ser, no futuro, os problemas críticos da humanidade. Esta estratégia global de resolução de problemas foi pelo próprio designada de *Comprehensive Anticipatory Design Science*, cujo lema era fazer mais com menos, manifestando assim uma clara preocupação com a otimização dos recursos naturais e com a poupança de energia. Este princípio de otimização que, em última análise, possibilitaria a todos um melhor padrão de vida, foi baptizado por Fuller como *dymaxion*. No âmbito desta filosofia, Fuller afirma:

Aprendi na escola que para fazer uma esfera, que é o que uma bolha é, se tem que utilizar o número  $\pi$ . Também aprendi que esse mesmo  $\pi$  é um número irracional ... assim, em que circunstâncias é que a Natureza ignora este facto e, como resultado de algum compromisso, produz uma bolha? E milhões delas por segundo? Penso que são demasiadas decisões para a Natureza tomar.

Todo o programa intelectual de Fuller foi implementado em termos práticos. Ele buscou incessantemente essas soluções óptimas para inúmeros problemas. O seu maior instrumento foi a geometria e, em particular, a geometria desenvolvida por Coxeter, que procurou aplicar no estudo de formas que pudessem ser resistentes e poupar energia, não apenas na sua utilização mas igualmente na sua realização. A este campo de estudo chamou Fuller, *Sinergética*, tema sobre o qual escreveu muito, destacando-se *Synergetics, Explorations in the Geometry of Thinking*, publicado pela primeira vez em 1975. A obra é dedicada a Coxeter; reproduz-se abaixo a respectiva dedicatória.

Este trabalho é dedicado a H. S. M. Coxeter, Professor de Matemática da Universidade de Toronto.

Para mim, nenhuma outra experiência da infância reforça mais as nossas capacidades exploratórias que a

geometria. A sua inspiradora eficiência afastando o que não é essencial, e avaliando uma variedade de aspectos desconhecidos a partir de uns, poucos, conhecidos, assim como a elegância das suas demonstrações, conduzem-nos à descoberta e ao entendimento de uma estratégia para a resolução global de problemas. Face à sua extraordinária vida como matemático, o Dr. Coxeter é o géometra do nosso turbulento século XX que é espontaneamente aclamado como o conservador de todo o património histórico da ciência da análise dos padrões. Dedico-lhe este trabalho com particular estima e a todos os géometras de todos os tempos com agradecimento pela importância que tiveram para a humanidade, importância da qual ele constitui o maior exemplo.

Da influência de Coxeter sobre Fuller resultaria ainda a denominada *Geometria Sinérgica*, de que a famosa cúpula geodésica é, talvez, a mais emblemática concretização.

### A descoberta do C60

Os resultados teóricos de Coxeter na classificação de polítopos e respectivos grupos de simetrias, assim como os modelos concretos de Fuller, seriam determinantes na caracterização da estrutura de uma nova molécula, cuja descoberta valeria aos seus autores o Prémio Nobel da Química, em 1996: Neste ano, a Real Academia das Ciências Sueca decidiu atribuir o Prémio Nobel da Química, conjuntamente a Robert F. Curl, Jr. (Rice University, Houston, USA), a Harold W. Kroto (University of Sussex, Brighton, U.K.) e a Richard E. Smalley (Rice University, Houston, USA), pela descoberta de um novo arranjo molecular de átomos de carbono, designado por C60. A nova estrutura obtém-se vaporizando previamente carbono através de um laser intenso, e permitindo a condensação do gás resultante num meio composto por gases inertes. Deve referir-se que o C60 não é o único tipo de composto que resulta destas experiências mas, como aqueles cientistas notaram, é o mais abundante e o mais estável. A estabilidade estrutural está geralmente associada a uma geometria peculiar, frequentemente, a configurações espaciais muito simétricas.





Figura 4. Representação artística da estrutura molecular do C60.

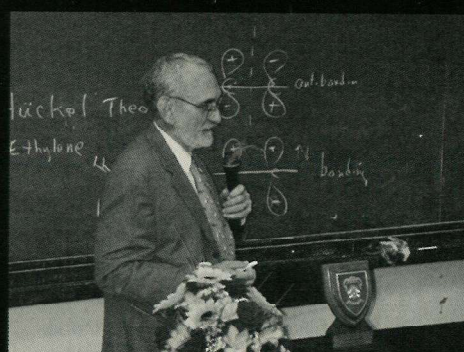
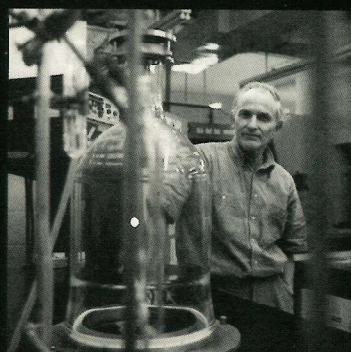
Os resultados de espectrometria confirmaram esta previsão. E, da confrontação desses dados experimentais, com a teoria matemática, designadamente com a teoria relacionada com a classificação dos poliedros e a caracterização das suas simetrias, concluiu-se que a estrutura molecular do C60 seria a de um icosaedro truncado. É importante notar que os primeiros dados experimentais não apontavam claramente para este tipo de conclusão. De facto os resultados relativos à descoberta do C60, foram publicados na revista *Nature*, e recebidos com um misto de entusiasmo e suspeita, já que nenhum físico ou químico, imaginaria que os átomos de carbono se podiam arranjar numa simetria diferente daquelas que já eram conhecidas.

Os sólidos platónicos são frequentemente tomados como modelos para estruturas moleculares. Pelo menos, como primeiras aproximações para a descrição dessas estruturas. Também neste caso uma busca semelhante teve lugar, através da análise do tipo de simetria encontrada. Assim sendo, foi todo o trabalho teórico na classificação de poliedros e na análise dos respectivos grupos de simetrias, para o qual Coxeter contribuiu de modo decisivo, que em primeiro lugar apontou o tipo de estrutura da nova molécula. Essa geometria inesperada viria a ser confirmada experimentalmente, através da realização de experiências, mais complexas e mais precisas.

### Arte como matemática intuitiva

Considere-se, como último exemplo, a influência do trabalho de Coxeter sobre o artista gráfico Maurits Escher. Este possuía já ampla obra gráfica, obra essa, em muitos casos, cheia de significado matemático. O problema de pavimentar o plano agradava particularmente a Escher, que se tornou sensível a esta questão depois de visitar Alhambra. Nos anos 50, no entanto, Maurits estava particularmente interessado naquilo que se poderia designar por *representação do infinito*. Um exemplo desse tipo de representação é a sua obra *Wirldpool*. Nela, os motivos principais convergem gradualmente para um ponto no centro de toda a composição enquanto que, gradualmente, vão diminuindo de tamanho.

Escher procurou, em vão, obter resultados explorando o caminho inverso, ou seja, que os motivos principais, partido do centro da composição, se aproximassem de um número infinito de pontos de uma circunferência limite, diminuindo gradualmente de tamanho. Depois de muitos esforços infrutíferos, Escher decidiu procurar Coxeter, na esperança que este o pudesse ajudar. Acabariam por se conhecer no Congresso Internacional de Matemática, que decorreu em Amesterdão, em 1954. Escher conhecia o trabalho de Coxeter sobre grupos cristalográficos em espaços hiperbólicos e procurou-o para obter mais informação nesta área. Coxeter acabaria por enviar a Escher uma cópia de um artigo seu, juntamente com uma carta onde agradecia ao artista holandês o facto de este o ter autorizado a reproduzir algumas das suas ilustrações. Nesse artigo, vários aspectos sobre cristalografia em espaços hiperbólicos eram mencionados e, embora não tivesse conseguido entender o conteúdo do ponto de vista matemático, Escher deixou-se impressionar por uma das figuras que descrevia uma pavimentação do plano de Poincaré com triângulos congruentes. O próprio Escher reconheceria que essas figuras o afectaram profundamente, revelando-se como a solução para o seu problema. De facto assim foi. Algum tempo depois, a materialização dos propósitos de Escher surgiu na forma de uma série de litografias com o título geral *Aproximating the Circle*. Coxeter diria dessas obras que Escher, não tendo compreendido os cálculos matemáticos efectuados para a obtenção da pavimentação do plano de Poincaré pôde, apesar de tudo, apreender a essência da construção de um ponto de vista puramente intuitivo.



Figuras 5, 6 e 7. Da esquerda para a direita: Richard E. Smalley, Harold W. Kroto e Robert F. Curl, Jr.



## Uma vida plena

Harold Scott MacDonald Coxeter nasceu em Kensington (Inglaterra) em 9 de Fevereiro de 1907. Os pais de Coxeter interessavam-se por arte. A mãe era pintora e o pai, embora gerisse a Coxeter & Son, uma empresa fundada pelo avô de Coxeter, tinha como verdadeiros interesses a música e a psicologia. É assim natural assumir que, convivendo com este intenso interesse pela arte, o próprio Coxeter fosse por ela influenciado. Efectivamente, ainda criança, manifestou um enorme interesse pela música tendo, inclusivé, composto várias peças para piano, entre as quais a ópera *Outomn*. Com o advento da adolescência, porém, esse interesse musical foi cedendo o seu lugar ao interesse pela matemática e, em particular, pela geometria.

A educação de Coxeter seguiu o padrão típico de um membro da classe média inglesa da época. Depois de ter passado por outras escolas chegou à *St. George's School*. No período de três anos que passou nesta instituição travou conhecimento com John Flinders Petrie (1907–1971), filho único do famoso egiptólogo Sir Flinders Petrie. O conhecimento de ambos foi travado em circunstâncias peculiares já que se conheceram enquanto estiveram internados na enfermaria da escola, convalescendo de pequenas enfermidades. Para ocuparem o tempo discutiam muito sobre a questão dos cinco sólidos platônicos, um assunto que nos respectivos livros de texto aparecia como opcional. Colaborariam durante muitos anos, resultando dessa colaboração variadas contribuições no domínio do estudos dos poliedros em dimensões superiores. O fascínio de Coxeter pela geometria foi, já se referiu, precoce. Aos 16 anos ganhou um prêmio com um ensaio intitulado *Analogia dimensional*. Este trabalho despertou a atenção de Bertrand Russel que era amigo do pai de Coxeter, (ambos eram militantes do movimento pacifista). Russel reconheceu de imediato o talento matemático de Coxeter e decidiu apresentá-lo a E. H. Neville, um matemático que anos antes tinha sido responsável, juntamente com G. H. Hardy, pela ida do matemático indiano Ramanujan para Inglaterra. Neville aconselhou o jovem Coxeter a abandonar todos os seus outros interesses e preparar-se para ingressar em Cambridge. Ele abandonou então a *St. George's School* e começou a receber lições privadas de alemão e de matemática, preparando a ida para Cambridge seguindo, deste modo, o conselho de Neville. O seu professor de matemática era então Alan Robson e foi sob a sua orientação que Coxeter adquiriu o conhecimento matemático necessário para o seu ingresso em Cambridge. Refira-se, a título de curiosidade, que Robson foi responsável pela publicação do primeiro trabalho matemático de Coxeter, uma breve nota, que surgiu na *Mathematical Gazette*, em 1926.

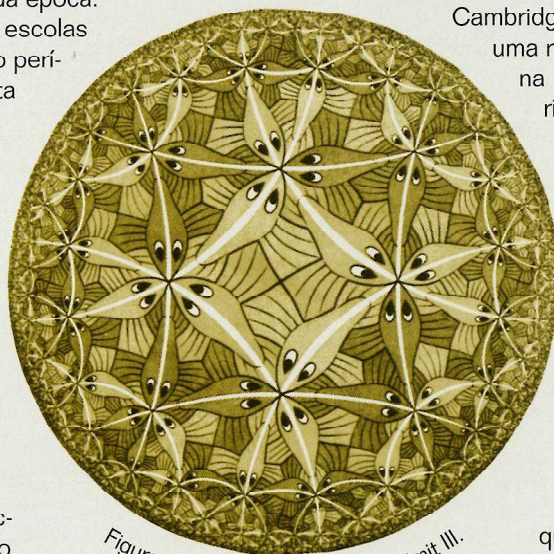


Figura 8. M. C. Escher—Circle Limit III.

Fruto desta eficaz preparação, Coxeter ingressou, finalmente, no Trinity College (Cambridge). Foi aí que pôde receber a influência de alguns dos matemáticos mais importantes da época como J. E. Littlewood, G. H. Hardy, S. Pollard, H. W. Richmond, P. W. Wood, A. S. Ramsey, Max Newman, Philip Hall, A. S. Besikovitch, L. Wittgenstein e H. F. Baker que seria o orientador da sua tese de doutoramento, cuja defesa decorreu em 1931. Em 1929, Coxeter recebeu o prestigiado *Smith's prize*, atribuído aos não doutorados com o melhor ensaio num qualquer tópico de matemática. Mas já em 1928, resultado de investigações independentes, Coxeter tinha publicado nos *Proceedings of the Cambridge Mathematical Society* um artigo intitulado *The pure Archimedean polytopes in six and seven dimensions*. Durante a sua estadia em Cambridge, Coxeter cumpria religiosamente uma rotina, participando todos os sábados na *Tea party*, um seminário que decorria na Escola de Artes. (Refira-se, a propósito, que a *Tea Party* é muitas vezes mencionada como o melhor de todos os seminários de geometria, organizados durante o Séc. XX.) Foi frequentando este seminário que Coxeter conheceu o matemático canadiano B. Robinson. Os dois haveriam de estar juntos durante 56 anos na Universidade de Toronto até a morte de Robinson em 1992. Juntamente com Robinson, Coxeter fundou o *Canadian Mathematical Congress* que viria mais tarde a ser a *Canadian Mathematical Society*, de que ambos foram presidentes. Coxeter foi ainda fundador e primeiro editor do *Canadian Mathematical Journal*. Ambos, Coxeter e Robinson, fizeram ainda parte do conselho editorial do *Mathematical Expositions*. No passado dia 31 de Março de 2003, Coxeter faleceu em Toronto no Canadá. Quem sabe poderá agora substituir a álgebra pelo olhar celeste, no momento em que, certamente, pela força do seu génio e do seu trabalho, conquistou o direito à imortalidade.

### Referências

- F. A. Sherk, P. McMullen, A. C. Thompson, A. I. Weiss (eds.); *Kaleidoscopes*. Selected Writings of H. S. M. Coxeter, Can. Math. Soc., Series of Monographs and Advanced Texts, John Wiley & Sons, 1995.
- H. S. M. Coxeter, W. O. J. Moser; *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer Verlag, 1984.
- H. S. M. Coxeter; *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, 1989.
- H. S. M. Coeter; *Regular Polytopes*, Dover, 1973.
- H. S. M. Coxeter; *Non-Euclidean Geometry*, MAA, 1998.

António M. Fernandes  
Instituto Superior Técnico