Algoritmos e sentido do número

Joana Brocardo, Lurdes Serrazina e Jean-Marie Kraemer

No documento curricular publicado em 2001 — Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais — no bloco Números e Cálculo são indicadas várias competências matemáticas que os alunos devem desenvolver ao longo dos três ciclos do Ensino Básico. Neste artigo vamos centrar-nos na "aptidão para efectuar cálculos mentalmente, com os algoritmos de papel e lápis ou usando a calculadora, bem como para decidir qual dos métodos é apropriado à situação" (DEB, p. 60) procurando construir um significado partilhado do modo de entender esta competência e analisar as implicações que esse significado pode ter ao nível da planificação do trabalho do professor do 1º Ciclo.

Começamos por analisar dois exemplos que contextualizam uma discussão sobre as dificuldades e potencialidades dos algoritmos.

Analisando dois exemplos

Exemplo 1. Uma professora do 1º Ciclo pediu aos seus 13 alunos de 4º ano que resolvessem a seguinte situação:

$$50007 - 19 = \_\_\_\_\_\_.$$

Intencionalmente, esta proposta não foi apresentada a partir de qualquer contexto. Todos os alunos entenderam, e bem, que deviam procurar determinar o valor exacto da diferença entre 50007 e 19. Também, todos eles, tentaram resolver a situação proposta recorrendo ao algoritmo. Segundo a sua professora, todos deveriam usar o seguinte procedimento: "9 para 17, 8 e vai 1; 1 mais 1, 2; 2 para 10, 8 e vai 1 ..."

A análise do número de respostas certas (7) pode levar-nos a considerar que esta questão parece levantar alguma dificuldade a estes alunos e que quase metade dos alunos tem, pelo menos em algumas situações, dificuldade em seguir o procedimento que lhes foi ensinado para resolver as *contas de subtrair*.

As respostas dadas pelos 6 alunos que *erraram* a conta foram:

50008; 5000098; 50088;
56988; 50018; 50018.

Respostas como estas sugerem que as crianças não desenvolveram uma tendência de antecipar uma resposta e de controlar a exactidão do resultado a partir dessa antecipação. De facto, pensamos que eles têm a noção de que depois de tirarem 19 de 50008 devem obter um número inferior a 50008. No entanto, uma vez que usam um procedimento que apenas faz apelo a um percurso mecanizado não pensam nos números e na operação e dão uma resposta *cega* e que corresponde ao resultado da *conta* que fizeram.

Exemplo 2. Uma das questões de um teste aplicado a cerca de 1000 alunos de 4º ano foi a da Figura 1.

Uma das indicações explícitas que lhes era dada antes de começarem a resolver o teste era a de procurarem mostrar como resolviam cada uma das questões havendo, no enunciado, espaço para o fazerem (ao lado de cada pergunta havia um espaço em branco).

Uma análise estatística das respostas dadas a esta questão (onde se contabilizou apenas o número de respostas certas, erradas e não resolvidas) permitiu verificar que esta pergunta se revestia de alguma dificuldade.

Na vida de todos os dias, o recurso aos algoritmos tradicionais é cada vez menos importante e apela-se mais à capacidade de estimar e de calcular de modo flexível.

O André tem 50 euros. Quantas galinhas pode comprar com este dinheiro?

Figura 1.

De entre os alunos que resolveram o teste, escolhemos, ao acaso, duas turmas de 4º ano e analisámos as respostas a esta questão. No quadro seguinte, resumimos as respostas e os processos usados por estes alunos (Tabela 1).

Analisando estes resultados podemos salientar vários aspectos. Em primeiro lugar, para justificar as respostas que apresentam, os alunos ou usam um algoritmo ou não usam *nada*. Naturalmente que isto não significa que os alunos que não apresentam o processo que seguiram para resolver o problema não tenham usado nenhum processo. Mas, pelo menos aparentemente, não sentem a necessidade de exprimir por escrito o raciocínio que usam.

Em segundo lugar, apesar da consideração anterior, não podemos deixar de salientar que 19 dos 36 alunos recorram a um algoritmo para resolver este problema, ou seja, revelam não ser capazes de decidir se uma determinada situação requer o uso de um cálculo exacto ou de um cálculo aproximado (aspecto que nos parece muito importante e que é destacado em vários documentos (DEB, 2001; Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999). Pensamos que, no 4º ano, os alunos já deveriam ser capazes de ver que 5 galinhas não podia ser, uma vez que $5 \times 10 = 50$. Depois podiam experimentar com 4. Para saber que $4 \times 12 = 48$, esperamos que o leitor concorde connosco e reconheça que ninguém deve precisar do algoritmo da multiplicação.

Finalmente, apesar da relativa *popularidade* do uso do algoritmo (19 alunos em 36 resolvem o problema usando um algoritmo) apenas 9 conseguem obter, através dele, uma resposta correcta para o problema. Alguns destes alunos parecem ter sérias dificuldades em ter uma noção minimamente razoável da ordem de grandeza do resultado que devem obter ao dividir 50 por 12 — a dois alunos dá 7, a outro dá 105! Os outros, parecem evidenciar uma escolha não pensada dos dados do problema e da *conta* que podem usar.

Os algoritmos: que problemas, que potencialidades?

Vantagens dos algoritmos

Embora de um modo não totalmente explícito, temos vindo a salientar algumas ideias que podem ser interpretadas como significando que consi-

Sentidos	Procedimentos usados	Nº alunos	Respostas dadas
Estruturar 50 em partes de 12	$50 : 12$	**5**	**4**
		1	105
		2	7
"Fazer" 50	Adição sucessiva $12 + 12 = 24$ $24 + 12 = 36$ $36 + 12 = 48$	**4**	**4**
Sentido incorrecto	Adição $12 + 15$	1	27
	Subtracção $50 - 12$	4	38
	Multiplicação 12×50	1	600
	Divisão $120 : 30$	1	23
Não apresentam o modo como chegaram à resposta	Não apresentam o modo como chegaram à resposta	**3**	**4**
		2	48 (preço 4 galinhas)
		1	50 (grandeza inicial)
		2	12 (valor de 1 grupo)
		2	2
		2	3
		1	600
Não apresentam nenhuma resolução		4	
Total alunos		36	33% de respostas correctas

Tabela 1.

deramos os algoritmos como algo de nocivo e que não deve ser incluído no ensino da Matemática. Pelo contrário, estamos conscientes de várias potencialidades importantes dos algoritmos:

— *generalidade:* o algoritmo é válido para quaisquer números. Para calcular $52 - 27$ uso as mesmas regras que para calcular
$52007978 - 354756$.

— *eficácia:* um algoritmo pode sempre conduzir a uma resposta certa, ou seja, desde que se usem bem as regras, temos a certeza de chegar a um resultado certo.

Por outro lado, a procura e utilização de procedimentos algorítmicos é uma faceta importante da Matemática. Sem que isso signifique que o seu ensino se limite a focar os procedimentos e técnicas rotineiros, se queremos proporcionar aos alunos uma verdadeira experiência matemática não podemos ignorar os algoritmos.

Dificuldades dos alunos

Um estudo realizado por Kamii e Dominick (1998) permite-nos ter uma ideia dos efeitos da aprendizagem dos algoritmos. Três grupos de alunos resolveram problemas de adição/subtracção: 1) "grupo dos não algoritmos" (não conheciam os algoritmos); 2) "grupo dos algoritmos" (tinham aprendido na escola os algoritmos); e 3) grupo que tinha aprendido alguns algoritmos em casa, mas não na escola.

A comparação dos resultados permite fazer duas observações:

— o "grupo dos não algoritmos" apresentou, na globalidade, a maior percentagem de respostas correctas;

— os alunos do "grupo dos algoritmos" que erraram o resultado apresentaram respostas bem menos razoáveis do que as respostas incorrectas dadas pelos alunos do "grupo dos não algoritmos".

Segundo Kamii e Dominick (1998) os algoritmos são prejudiciais porque: (1) encorajam as crianças a desistir do seu próprio pensamento, isto é, utilizam um procedimento rotineiro que parece impedi-las de pensar, como pode concluir-se dos exemplos apresentados antes; (2) fazem-nas esquecer o que já sabem sobre o valor de posição na escrita dos números, impedindo o desenvolvimento do sentido do número, como é indicado no Currículo Nacional — compreensão global do número e das operações.

Kamii e Dominick referem também que quando as crianças inventam os seus próprios procedimentos fazem-no indo da esquerda para a direita, ao passo que nos algoritmos têm de o fazer ao contrário. Por exemplo, para calcular $366 + 199$.

Quando utilizam o algoritmo

$$\begin{array}{r} 366 \\ +\underline{199} \\ 565 \end{array}$$

o que a maior parte das crianças faz é:

$6 + 9 = 15$, colocam o 5 e sobra 1

$1 + 6 + 9 = 16$, colocam o 6 e sobra o 1

$1 + 3 + 1 = 5$

Ao passo que quando são capazes de pensar por si próprias, inventando os seus próprios procedimentos, fazem:

$$300 + 100 = 400;\ 60 + 90 = 150;\ 6 + 9 = 15$$

$$\longrightarrow 400 + 150 + 15 = 565$$

ou

$$366 + 199 = 300 + 200 + 65 = 565$$

Usar percebendo um algoritmo?

"As crianças têm dificuldade nos algoritmos porque não percebem o que estão a fazer". Esta é uma das ideias que várias vezes ouvimos a colegas professoras do 1° ciclo. Será que é assim? Em primeiro lugar, propomos que cada um se interrogue sobre a compreensão que usa para realizar um algoritmo. Por exemplo, continuando nas operações elementares, analisemos o que poderá ter de ocorrer à nossa mente para usar um *algoritmo percebendo.*

1) Comecemos pela tarefa apresentada no início do artigo:

$$50007 - 19 = \underline{\qquad}$$

Se usarmos o algoritmo que os 13 alunos de 4° ano aprenderam teríamos de pensar de um modo muito semelhante ao seguinte:

— como de 7 não posso tirar 9, tenho de usar a propriedade de invariância do resto e somar dez unidades ao aditivo e uma dezena ao subtractivo. Assim, faço 9 para 17 e 2 para 0;

— mas como de 0 não posso tirar 2 tenho que adicionar 100 unidades ao aditivo e 1 centena ao subtractivo. Assim faço 2 para 10 e 1 para 0;

— mas ...

Penso que todos concordamos que nenhum de nós faz isto. O que usamos é um conjunto de regras não pensadas que adquirimos à custa de uma grande prática. Usamos, também, um procedimento expedito — o *e vai um* — que nos ajuda a mecanizar o processo. No entanto, ele não pode ser fundamentado do ponto de vista matemático — de facto *não vai nada* — e, por isso, o seu uso não envolve nenhuma compreensão.

2) Quando calculamos $3427 : 16$ pelo algoritmo tradicional é preciso perceber qual o número que multiplicado por 16 é o mais próximo de 3247.

Para isso, os alunos têm de construir a tabuada do 16 (Tabela 2).

E, para além disso, têm de compreender o valor de posição representado pelos diferentes algarismos, começando por ver que com 34 centenas podem fazer 2 centenas de grupos de 16,

1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	32	48	64	80	96	112	128	144

Tabela 2.

3427	16
$\underline{3200}$	200
0227	10
$\underline{160}$	
067	$\underline{+\ \ 4}$
$\underline{64}$	214
4	

Fazer a subtracção para 34 centenas, ver depois que ainda sobram 22 dezenas o que dá para fazer 1 dezena de grupos de 16, obtendo deste modo o quociente.

No entanto, ninguém está a pensar em tudo isto quando faz de uma forma rotineira o algoritmo. É com certeza importante e é da essência da própria matemática a aquisição de rotinas e todos nós quando utilizamos os algoritmos não o fazemos percebendo, mas é preciso que as crianças tenham oportunidade para pensar sobre os números.

Calcular pensando no número, nas operações e nas suas relações

Uma alternativa ao uso quase obrigatório do algoritmo para resolver os problemas ou exercícios numéricos é a de estabelecer que os alunos podem escolher os seus próprios processos: podem fazer desenhos, podem concretizar a situação usando diferentes tipos de materiais, podem inventar estratégias. Esta opção tem sido veiculada de diversas formas no nosso país e é hoje um dos argumentos que ouvimos repetir com alguma frequência quando se questiona o ensino focado nos algoritmos.

Embora numa fase inicial da aprendizagem da Matemática o recurso à representação, por meio de desenhos, das situações problemáticas propostas aos aluno seja um importante meio de compreender as operações e as relações numéricas, ela não é uma estratégia potente para trabalhar com números *grandes*. Deixar que um aluno recorra sempre a um desenho para resolver um problema é limitador da sua compreensão dos números e das operações e impede o desenvolvimento de competências importantes para lidar com situações mais complexas, ou que, simplesmente envolvam o cálculo com números superiores a 20.

A análise das potencialidades dos materiais manipulativos é complexa (ver, por exemplo, Gravemeijer, 1991) e pensamos ser um ponto em que ainda não se reflectiu bastante no nosso país. Uma questão que pensamos ser crucial é o papel dos materiais na formação da noção dos números e das operações e no desenvolvimento de formas mais ou menos algoritmizadas de cálculo. Assim, os materiais têm um papel intermediário entre a realidade concreta e a sua representação mental e/ou entre as operações concretas dessa realidade e as operações matemáticas. Utilizar materiais concretos para aprender a subtrair deve desenvolver uma forma de raciocinar e de calcular que corresponde à forma mais abstracta de resolver o problema. Por exemplo, utilizar blocos unitários com a mesma cor bloqueia o cálculo inteligente uma vez que incentiva a contagem 1 a 1 em vez de centrar a atenção na utilização de relações entre os números.

Dar liberdade aos alunos para inventar as suas próprias estratégias e procedimentos é uma opção pedagógica que pode ser importante. De facto, várias investigações mostram que as crianças inventam e desenvolvem estratégias para lidar com problemas numéricos (por exemplo, Fuson *et al.*, 1997).

Consideremos o exemplo $368 + 208$. Quando as crianças têm liberdade de escolher as suas próprias estratégias, a grande maioria dos alunos utiliza dois métodos. O primeiro consiste em decompor os números, adicionar os grupos e recompor a partir dos resultados:

$$368 = 300 + 60 + 8;\ 208 = 200 + 8$$

$$300 + 200 = 500\ ;\ 60 + 0 = 60;\ 8 + 8 = 16$$

$$500 + 60 + 16 = 576$$

O segundo método consiste em somar 208 a 368 saltando na sequência numérica:

$$368 + 200 = 568;\ 568 + 8 = 576$$

A operação $368 + 198$ faz apelo aos mesmos métodos. Mas, neste caso, o número 198 *convida* uma minoria de crianças a transformar $368 + 198$ em $368 + 200$ e a compensar retirando 2 ao resultado. "É $568 - 2 = 566$". Este método é mais sofisticado uma vez que se baseia na utilização das relações entre as relações numéricas, ou seja,

— na equivalência das adições: $368 + 198 = 368 + 200 - 2$, logo 566;

— as subtracções: $70 - 36 = 70 - 35 - 1$, logo 34;

— as adições e as subtracções: $22 - 18 = 4$, porque $18 + 4 = 22$.

Neste sentido, o cálculo por transformação é mais elaborado do ponto de vista matemático (mais formal) que as formas de cálculo sequencial (em linha) e decimal onde as relações numéricas utilizadas só servem para encurtar ao máximo os cálculo realizados *no interior* do procedimento utilizado.

Como referem Fosnot e Dolk (2001), para ser capaz de calcular usando o sentido do número não basta dispor de uma listagem de estratégias. É preciso começar por olhar para os números, ser capaz de estabelecer relações que possam derivar deles e jogar com essas relações.

Qual será então o desafio que se coloca ao professor para conseguir ajudar os seus alunos a desenvolver o sentido do número?

Pensamos que o desafio é fácil de perceber, no entanto, é mais difícil de realizar. A ideia consiste em criar as condições que permitam às crianças desenvolver, elas próprias e desde o início da escolaridade, os *instrumentos* que lhes permitam inventar, formalizar e flexibilizar progressivamente métodos e técnicas de cálculo adequados à resolução dos problemas colocados pela vida de todos os dias. E, na vida de todos os dias, o recurso aos algoritmos tradicionais é cada vez menos importante e apela mais à capacidade de estimar e de calcular de modo flexível.

A *primeira condição* consiste em acompanhar a tendência natural de desenvolvimento de procedimentos de cálculo. Adicionar e subtrair desenvolve-se a partir da contagem de quantidades; multiplicar e dividir a partir da estruturação dessas quantidades em grupos equipotentes. Contar e estruturar desenvolvem-se em ligação com a noção que as crianças constroem dessas quantidades, desses números e do que fazem com essas quantidades e esses números. É nestas actividades com objectos concretos e que envolvem a exploração de situações da vida de todos os dias que nascem as representações mentais mais primitivas dos números e das operações e é nelas que se enraíza aquilo a que chamamos *sentido do número*.

A *segunda condição* consiste em ligar estruturalmente o desenvolvimento de métodos e de técnicas de cálculo à construção dos números, da sua organização e da sua estruturação e à reconstrução do nosso sistema de numeração de posição. São as descobertas das estruturas dos números e, como tal, as relações entre os números que geram a descoberta das possibilidades de explorar essas estruturas e relações. Se 8 é $5+3$ e se 9 é $5+4$, $8+9$ é $5+5+3+4$, logo $10+7$. E se 80 é $50+30$ e 90 é ......, $80+90$, só pode ser $100+70$.

A terceira condição deriva naturalmente das duas primeiras: retardar a aprendizagem dos algoritmos para poder dar possibilidade aos alunos de aperfeiçoar o seu sentido do número para poder aceitar o desafio dos algoritmos.

Conflitos causados pela mudança

Quando os professores do 1° ciclo tentam modificar a sua prática de acordo com as condições enunciadas no ponto anterior, podem ter de enfrentar, pelo menos, três conflitos: os manuais não têm esta perspectiva, os pais consideram que ensinar matemática é ensinar as *contas*, a formação de professores não tem correspondido a estas exigências.

Relativamente aos manuais é realmente verdade que muitos deles continuam a incluir desde cedo a escrita na forma de algoritmo mesmo quando ela não faz nenhum sentido, como é o caso da adição de números representados apenas por um algarismo.

Em relação aos pais é normal que eles tenham uma concepção da matemática correspondente às suas vivências enquanto alunos deste nível de escolaridade. É preciso conversar com eles sobre o que se pretende com o ensino da matemática hoje, de forma que compreendam que as exigências de hoje não são as do seu tempo e tomem consciência das competências que se pretendem desenvolver.

No que diz respeito à formação de professores, nunca e, cada vez mais hoje em dia, a formação inicial de professores foi considerada como adequada para o exercício da profissão *ad eternum*, pois a escola evolui. A formação inicial deve ser aquela imprescindível para começar a ensinar com a consciência de que é preciso continuar a formação quer pela reflexão e discussão com os colegas sobre o que se passa nas salas de aula, quer pela participação em acções de formação mais formais. Em última análise os professores devem ter iniciativa começando, por exemplo, a questionar a qualidade dos manuais, discutir o que deve ser o manual e ter uma atitude crítica sobre algo que saiu da cabeça de alguém e nunca foi testado pelos professores na sala de aula.

Reflexão final

Se queremos desenvolver a competência enunciada no início deste artigo, isto é, a "aptidão para efectuar cálculos mentalmente, com os algoritmos de papel e lápis ou usando a calculadora, bem como para decidir qual dos métodos é apropriado à situação" não podemos continuar a trabalhar apenas os algoritmos.

Como quisemos mostrar ao longo deste artigo, na nossa perspectiva, os algoritmos continuam a ser introduzidos aos alunos muito cedo não lhes dando oportunidade para desenvolver o sentido do número e pensar de um modo crítico sobre o sentido das operações, tendo como consequência o não desenvolvimento de outras estratégias de cálculo. Trabalhar as operações introduzindo estratégias de cálculo mental, tendo por base a composição e decomposição dos números, utilizando as características de estarmos a lidar com um sistema de numeração de posição, parece-nos uma tarefa crucial a fazer antes da introdução dos algoritmos formais. Os pais devem ser esclarecidos sobre os objectivos que se pretendem. Se compreenderem que o importante é que as crianças aprendam a lidar com os números e as operações de um modo significativo e saibam resolver problemas terão, com certeza, uma atitude colaborante.

Os professores têm de fazer uma utilização crítica dos manuais e sempre que possível fazer uma selecção criteriosa dos mesmos. Para isso é fundamental o trabalho em equipa de professores do mesmo ano ou da mesma escola, reflectindo em conjunto, tendo como base os problemas concretos que surgem na prática. Deste modo têm noção das suas necessidades, vão identificando a quem podem recorrer e envolvem-se em formação com sentido.

Bibliografia

DEB (2001). Currículo Nacional: Competências Essenciais. Lisboa: Departamento de Educação Básica, Ministério da Educação.

Fosnot, C. T. e Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense, addition, and subtraction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P. & E. Fennema (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and substraction. In: *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 28, N. 2, 130-162.

Gravemeijer, K. P. E. (1991). An instruction-theoretical reflection on the use of manipulatives. Em L. Streefland (ed.), *Realistic mathematics education in primary school.* Utrecht: Freudenthal Institute.

Kamii, C. e Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. Em L. J. Morrow e M. J. Kenney (eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics.* Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Joana Brocardo, ESE Setúbal
Lurdes Serrazina, ESE Lisboa
Jean-Marie Kraemer, CITO – Holanda