# Cálculo Algébrico Simbólico nas nossas escolas: alguns axiomas e exemplos

*John F. Mahoney*

*A crescente divulgação dos sistemas de computação algébrica, que actualmente já se encontram disponíveis em alguns modelos de calculadoras, levou-nos a seleccionar, para este número, um artigo da autoria de John Mahoney, no original* Computer Algebra Systems in Our Schools: Some Axioms and Some Examples, *publicado pelo National Council of Teachers of Mathematics, em Novembro de 2002, num número temático da revista* Mathematics Teacher.

*Ao longo deste artigo são-nos apresentadas algumas das potencialidades destes sistemas, ao mesmo tempo que são discutidos aspectos relativos à sua integração no ensino da matemática.*

Os alunos podem resolver os problemas tradicionais de álgebra e cálculo usando tecnologia com cálculo algébrico simbólico (CAS), mas pode esta tecnologia ajudar os alunos a aprender matemática? Com tecnologia CAS podem decompor expressões em factores, resolver equações e sistemas de equações, calcular derivadas e integrais, resolver equações diferenciais, etc. Dadas as poderosas ferramentas da tecnologia CAS, é importante antecipar como o seu uso afectará o ensino da matemática. Este artigo inclui cinco axiomas, de algum modo provocativos, e exemplos acerca do uso do CAS nas nossas escolas.

*Axioma 1:*
*A tecnologia CAS tem potencial para desenvolver a compreensão matemática dos alunos de um modo tão significativo como já tiveram as calculadoras gráficas.*

Há mais de uma década que os alunos usam calculadoras gráficas para explorar conceitos do ponto de vista gráfico e numérico. Estas calculadoras traçam rapidamente o gráfico de uma grande variedade de funções, incluindo as que são dadas na forma polar ou paramétrica. Facilmente produzem tabelas de valores de funções e usam técnicas de regressão para encontrar funções que se adequam aos dados disponíveis. Permitem ver, de uma forma rápida e fácil, as relações existentes entre os gráficos de várias funções. As potencialidades gráficas tornam ainda possível a investigação de propriedades das funções ao encontrar zeros, vértices e pontos de intersecção. A tecnologia CAS dá aos alunos as ferramentas para investigarem matemática algebricamente.

*Exemplo 1:* Os gráficos de quatro parábolas da forma

$$y = x^2 - 2kx + 3$$

estão representados na figura 1. Um aluno com uma calculadora gráfica pode ver o efeito de alterar o parâmetro $k$ e a relação entre $k$ e o vértice da parábola.

Com a ajuda de uma calculadora com tecnologia CAS, um aluno investigando as mesmas parábolas pode determinar que os vértices têm coordenadas

$$(k, 3 - k^2)$$

e concluir que esses vértices são também pontos da parábola

$$y = 3 - x^2,$$

(figura 1). O aluno pode tentar generalizar este resultado para descobrir o lugar geométrico dos vértices de uma parábola da forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

quando $b$ varia, (figura 2). Resolvendo em ordem a $b$ a equação da abcissa do vértice,

$$x = -\frac{b}{2a}$$

e substituindo esta expressão na equação geral obtém-se a equação

$$y = c - ax^2$$

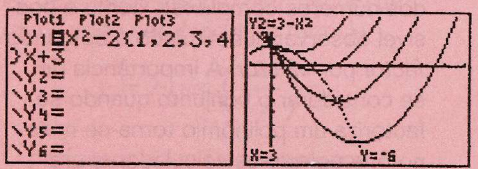


Figura 1.

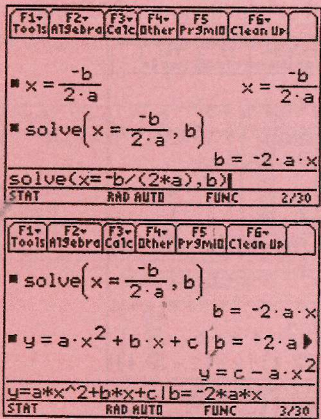


Figura 2.

do lugar geométrico dos vértices duma parábola.

*Exemplo 2:* O que significa decompor um polinómio em factores? A resposta depende de se estar a fazer a decomposição no âmbito do conjunto dos números racionais, reais ou complexos. As calculadoras gráficas permitem ao utilizador escolher o conjunto desejado. A figura 3 ilustra a sintaxe dos comandos. O comando *factor* $(x^2 - 4.x - 5)$ dá o resultado

$$(x-5)(x+1),$$

uma vez que esta função quadrática é factorizável no conjunto dos números racionais. O comando *factor*

$$(x^2 - 4.x - 6)$$

dá o resultado

$$x^2 - 4.x - 6,$$

uma vez que esta função não se decompõe no conjunto dos números racionais. Decompõe-se sim no conjunto dos números reais, como é possível constatar incluindo $x$ no comando. De um modo semelhante, o polinómio

$$x^2 - 4x - 6$$

não é factorizável no conjunto dos números reais mas sim no conjunto dos números complexos, como é possível observar substituindo o comando *factor* por *cfactor*. A importância de se considerar o conjunto quando se factoriza um polinómio torna-se mais notória porque as calculadoras gráficas usam comandos ligeiramente diferentes consoante efectuam a decomposição no conjunto dos números racionais, reais ou complexos.

*Exemplo 3:* Os alunos podem usar a tecnologia CAS para investigar a composição de funções. A figura 4 mostra o efeito cíclico da composição repetida da função

$$f(x) = \frac{x-1}{x}$$

Aqui a função é repetidamente composta com ela própria. Depois de três iterações o resultado é a função identidade

$$I(x) = x,$$

e a iteração seguinte produz a função original.

> *Axioma 2*
> *A tecnologia CAS pode permitir aos alunos aprender bem cálculo mesmo que não dominem a álgebra.*

Muita da álgebra é aritmética generalizada. As calculadoras gráficas podem ajudar os alunos a aprender conceitos de álgebra embora possam não dominar a aritmética. As calculadoras podem realizar operações aritméticas com precisão e, por conseguinte, libertá-los para se concentrarem nos conceitos e nas técnicas algébricas. Pensa-se que os alunos não estão prontos para aprender álgebra nos 8º e 9º anos, porque o seu conhecimento de aritmética é insuficiente. As calculadoras científicas e gráficas podem ajudá-los a aprender álgebra mais facilmente. Muito do cálculo é álgebra generalizada e geometria. O cálculo é, muitas vezes, um filtro que impede os alunos de ingressarem em cursos de ciências, economia e matemática. Os alunos podem não ser capazes de estudar cálculo mais avançado porque não dominam a álgebra e o cálculo elementar. As calculadoras com tecnologia CAS tornam possível estudar—e dominar—esses conceitos.

*Exemplo 4:* Um aluno pediu-me ajuda porque não conseguia obter a resposta correcta quando tentava calcular

$$\int (\cos x - \sin x)^2 dx$$

Olhei para o seu trabalho e vi que tinha erradamente desenvolvido a expressão

$$(\cos x - \sin x)^2$$

como

$$\cos^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x.$$

Não tinha compreendido que estava a fazer um erro de álgebra e não um erro de cálculo. Fi-lo desenvolver a expressão numa calculadora com CAS (figura 5), e ajudei-o a compreender porque o seu resultado não era equivalente ao resultado da calculadora.

*Exemplo 5:* Considere-se a equação

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} = 1$$

que apresentei a uma turma de matemática avançada. Os alunos cometem normalmente muitos erros ao resolver equações com radicais. Frequentemente perdem-se nos detalhes do problema e falham na compreensão da abordagem correcta, que envolve gerar possíveis soluções, seguido da

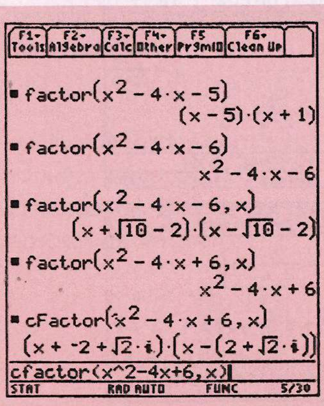


Figura 3.

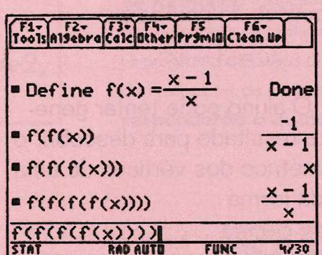


Figura 4.

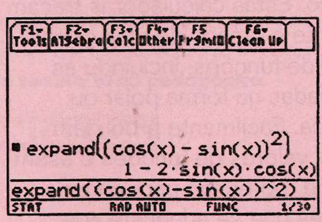


Figura 5.

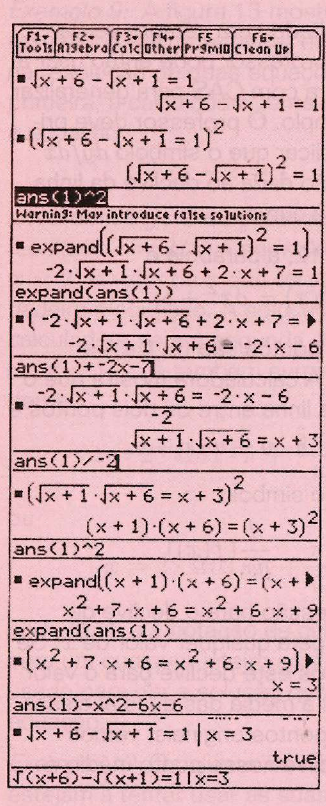


Figura 6.

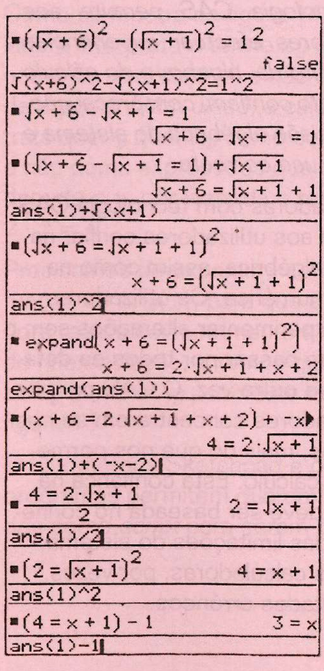


Figura 7.

eliminação das que se revelam falsas. Uma vez que o CAS remove o tédio do cálculo, isso ajuda os alunos a centrarem-se no que é importante. Como professor, foi-me possível usar o exemplo seguinte para ajudar os alunos a centrarem-se nos procedimentos e não nos detalhes.

Os meus alunos começaram por sugerir elevar ao quadrado os dois membros da equação (figura 6). Vimos o aviso *Pode introduzir falsas soluções*, que a TI–89 produz, quando se realiza uma tal operação. Este aviso alerta o utilizador para a necessidade de confirmar se as soluções da equação assim obtida também o são da equação inicial. A turma queria resolver a equação e assim desenvolvemos o caso notável, somámos

$$(-2x-7)$$

a ambos os membros e dividimos tudo por $-2$. De novo elevámos ao quadrado ambos os membros e efectuámos o produto. Somando

$$-x^2-6x-6$$

a ambos os membros conseguimos resolver em ordem a $x$. Testámos o resultado na equação original.

Perguntei aos alunos se conheciam outras formas de resolver a equação. Uma sugestão foi a de elevar ao quadrado cada termo (figura 7). A calculadora deu o resultado *falso* porque esta equação é equivalente a

$$(x+6)-(x+1)=1$$

ou seja a $5=1$. Outra sugestão foi adicionar o termo

$$\sqrt{x+1}$$

a ambos os lados da equação e depois elevar ao quadrado os dois membros. Depois de simplificar a equação, somar $-x-2$ aos dois lados e dividir por 2 ambos os membros. Elevando de novo ao quadrado os dois lados e subtraíndo 1, obtém-se o mesmo valor para $x$ que foi obtido usando o primeiro método.

Este exemplo ilustra como o uso das calculadoras com CAS nos permite concentrar nos grandes passos básicos envolvidos na resolução de equações, mais do que nas especificidades de cada passo. Idealmente, depois de verem exemplos como este, os alunos devem ser capazes de resolver por si próprios problemas semelhantes. Projectando este exemplo, os professores podem convidar os alunos a participar. Os alunos podem sugerir os passos a tentar e ver, de imediato, o efeito das suas sugestões. As calculadoras com CAS podem permitir uma álgebra dinâmica.

*Axioma 3*

*A tecnologia CAS tornará mais fácil, aos professores de álgebra, geometria e cálculo elementar, a introdução de conceitos de cálculo mais avançados.*

Os professores de aritmética mais inovadores introduzem conceitos de álgebra e geometria enquanto ensinam alunos de níveis elementares. Familiarizam os seus alunos com processos de resolução de equações lineares e com as propriedades das figuras geométricas. Os professores do ensino secundário podem usar os SCA para familiarizar os seus alunos com conceitos de cálculo.

*Exemplo 6:* Um professor pode convencer os seus alunos, por exemplo, que o perímetro de um polígono regular de $n$ lados inscrito num círculo de raio $r$ pode ser dado pela fórmula

$$p=2n\sin\left(\frac{180}{n}\right)r.$$

O professor pode fazer os alunos explorarem os resultados desta fórmula para valores particulares de $n$ e de $r$ com uma calculadora gráfica ou um CAS compatível. Na figura 8, a variável $x$ é usada em lugar de $n$

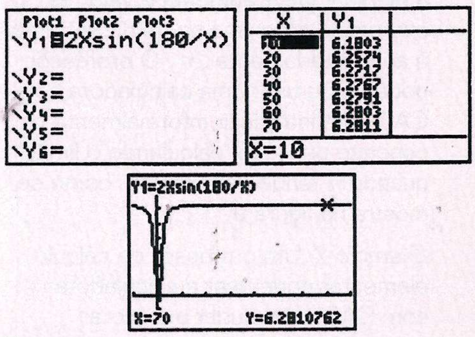


Figura 8.

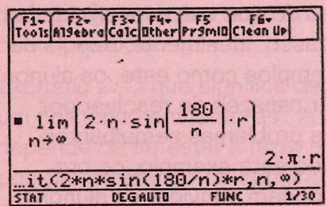


Figura 9.

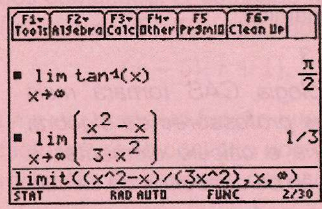


Figura 10.

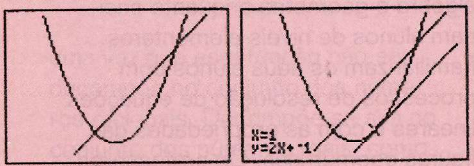


Figura 11.

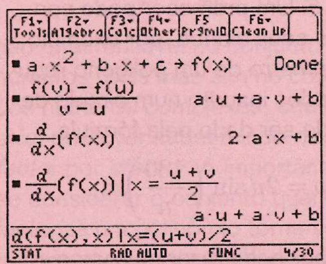


Figura 12.

e o valor de $r$ é 1. Quer a tabela de valores, quer o gráfico indicam que à medida que $x$ aumenta o valor da expressão aproxima-se de 6,2811, isto é aproximadamente $2\pi$. O professor pode então usar uma calculadora com CAS para introduzir informalmente o conceito de limite, calculando o limite quando $n$ tende para infinito, como se mostra na figura 9.

*Exemplo 7:* Um professor de cálculo elementar pode usar a calculadora com CAS para ajudar a explorar assimptotas horizontais e, ao mesmo tempo, introduzir o conceito de limite. Pode perguntar à turma: *Qual é o comportamento da função*

$$y = \tan^{-1} x$$

*para grandes valores de $x$? Usem a calculadora para explorar esta função.* Alguns alunos podem substituir $x$ por valores grandes. Outros podem fazer o gráfico da função num domínio amplo e recorrer a *trace*. Outros podem obter valores que estão próximos de 90 e outros podem obter valores próximos de $1{,}571$, dependendo do facto das suas calculadoras estarem a trabalhar em graus ou em radianos. Os alunos devem poder concluir que esta função tem uma assimptota horizontal. O professor pode então usar uma calculadora com CAS para calcular o limite quando $x$ tende para infinito, como se mostra na figura 10. Se a calculadora está no modo graus, a resposta correspondente é 90. A turma pode então explorar o comportamento da mesma função à medida que $x$ se torna cada vez menor. Um outro exemplo poderia ser o cálculo das assimptotas da função

$$y = \frac{x^2 - x}{3x^2}$$

como se mostra na figura 10.

*Exemplo 8:* Os professores podem introduzir o conceito de derivada pedindo aos seus alunos para desenharem uma parábola numa calculadora gráfica ou numa calculadora com CAS e seleccionarem quaisquer dois pontos sobre a função, calculando em seguida o declive da linha que une esses pontos. Na figura 11, a parábola é $y = x^2$ e os pontos são $(-1{,}1)$ e $(3{,}9)$. A equação da recta que passa pelos dois pontos é $y = 2x + 3$. Desenhamos então a linha tangente à curva em $x = 1$, valor correspondente à média das abcissas dos dois pontos originais. Algumas calculadoras, como a TI–83 Plus, têm um comando que permite ao utilizador desenhar a tangente a uma curva num dado ponto. Os alunos podem observar que esta tangente parece paralela à primeira recta, como se vê na figura 11.

Este resultado será sempre verdadeiro? O professor pode então usar a calculadora com CAS para generalizar este exemplo. O professor deve primeiro explicar que o símbolo $dy/dx$ é a notação dada ao declive da linha tangente à curva.

Na figura 12, a parábola é

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

e os dois pontos são $(u, f(u))$ e $(v,\ f(v))$. A calculadora mostra que o declive da linha entre os dois pontos é

$$a \cdot u + a \cdot v + b.$$

A seguir, o símbolo

$$\frac{d}{dx}(f(x))$$

dá a expressão para o declive da tangente para qualquer valor de $x$. Se calcularmos este declive para o valor de $x$ igual à média das duas abcissas dos dois pontos originais, vemos que o declive nesse ponto médio é também

$$a \cdot u + a \cdot v + b.$$

Este trabalho mostra que o declive de uma linha secante a uma parábola é igual ao declive da tangente no ponto médio das abcissas dos pontos em que a secante cruza a parábola.

*Axioma 4:*

*A tecnologia CAS permite aos utilizadores efectuar experiências no âmbito da álgebra e do cálculo enquanto confiam, com precaução, na precisão algébrica do sistema e no seu uso correcto.*

As calculadoras com tecnologia CAS permitem aos utilizadores confiar na precisão algébrica, assim como na precisão numérica. Os utilizadores podem experimentar alterações sem o esforço de passar por todos os detalhes uma e outra vez. O CAS permite aos utilizadores concentrarem-se nos problemas, mais do que nos pormenores de cálculo. Esta confiança na precisão deve ser baseada no conhecimento das limitações do sistema, porque as calculadoras, por vezes, dão resultados erróneos.

*Exemplo 9:* A figura 13 mostra os resultados aparentemente erróneos na resolução de duas equações. Na primeira, a calculadora tenta resolver a equação

$$3 \cdot x - 2 = 4$$

em ordem a $y$. O surpreendente resultado $1 = 2/x$ é equivalente a $x = 2$, o valor de $x$ que torna verdadeira a equação. A solução da calculadora para a segunda equação, $\sin x = 1/2$, é também surpreendente:

$$x = 2 \cdot @n1 \cdot \pi + \frac{5 \cdot \pi}{6}$$

ou

$$x = 2 \cdot @n1 \cdot \pi + \frac{\pi}{6}$$

onde $@n1$ é a notação da calculadora para um qualquer inteiro arbitrário usado para dar a solução geral da equação.

*Exemplo 10:* Os alunos de cálculo que estejam a tentar usar as suas calculadoras para diferenciar implicitamente, necessitam de o fazer cuidadosamente. Consideremos a curva cuja equação é

$$x^2 - xy + 2y^2 = 0$$

e tentemos encontrar a expressão para $dy/dx$.

Como se mostra na figura 14, a calculadora interpreta o termo $xy$ como o nome de uma variável e não o produto de $x$ por $y$. Além disso, a calculadora trata quer $y$ quer $xy$ como constantes e não como expressões que dependem de $x$ e, por isso, dá o resultado $2 \cdot x = 0$.

Precisamos de exprimir $y$ como função de $x$, $y(x)$, para que a calculadora realize correctamente a operação de diferenciação, e temos que introduzir $xy$ como $x \cdot y$, como se mostra na figura 15.

O Geometer's Sketchpad e outros programas permitem guardar comandos como *script* para serem reutilizados mais tarde. As calculadoras TI–89 e TI–92 têm uma capacidade semelhante. Todos os comandos que o utilizador insere na calculadora podem ser gravados como texto. Este texto pode depois ser executado passo a passo como um *script*. Pode também ser modificado facilmente. Esta capacidade permite aos utilizadores investigar relações algébricas. O utilizador pode começar com um exemplo específico e se os resultados se mostrarem interessantes, o trabalho pode ser guardado como *script*. Então o exemplo pode ser alterado para um outro do mesmo tipo. Se os resultados são ainda interessantes, o *script* pode ser usado para tentar esboçar a essência da prova de uma relação.

*Exemplo 11:* Considere-se um polinómio do terceiro grau com três raízes reais: 3, –2 e –4. Traçamos o gráfico do polinómio

$$y = (x - 3)(x + 2)(x + 4).$$

A média dos dois primeiros zeros é

$$\frac{3 + (-2)}{2} = 0,5.$$

Traçamos a tangente ao gráfico do polinómio para $x = 0,5$ e observamos, na figura 16, que a tangente parece cruzar a terceira raiz do polinómio.

Podemos usar a calculadora TI–89 para determinar se a tangente passa de facto pelo ponto $(-4, 0)$. Os passos, indicados na figura 17, são:

- Introduzimos na memória um dado polinómio como $f(x)$.
- Calculamos a média dos dois primeiros zeros (raízes).
- Calculamos o valor da derivada no ponto médio daqueles zeros.
- Escrevemos a equação da recta tangente nesse ponto e usamo-la para encontrar o valor de $x$ quando esta cruza o eixo dos $xx$.
- Resolvemos a equação em ordem a $x$ e verificamos que a tangente cruza o eixo dos $xx$ em $x = -4$, a terceira raiz.

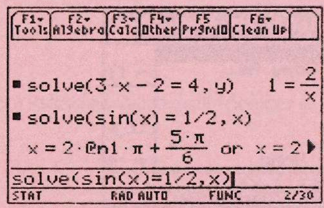


Figura 13.

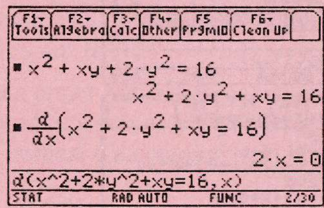


Figura 14.

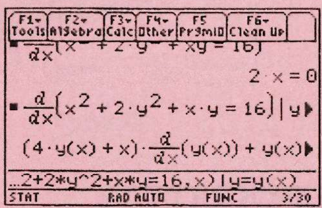


Figura 15.

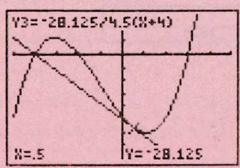


Figura 16.

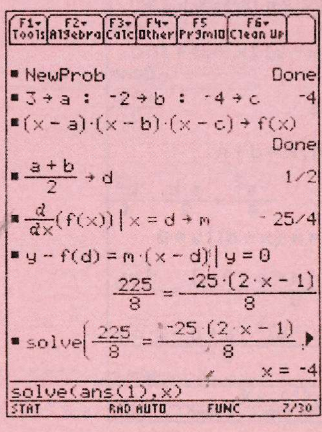


Figura 17.

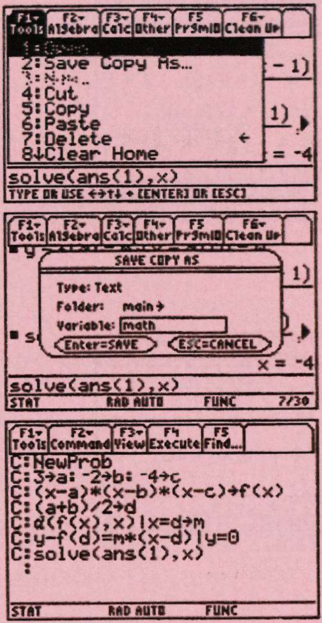


Figura 18.

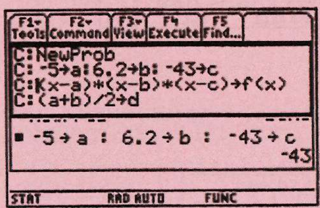


Figura 19.

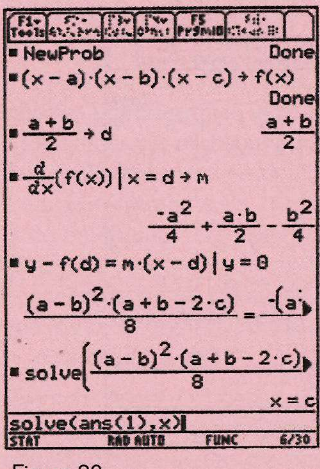


Figura 20.

Em seguida, usamos o editor de texto para guardar uma cópia destes comandos como *script*, como se mostra na figura 18. Podemos alterar os valores de $a$, $b$ e $c$ e correr de novo o *script* passo a passo para verificar se a propriedade é verdadeira para outros polinómios do terceiro grau, como se mostra na figura 19.

Mais interessante ainda, podemos eliminar a segunda linha do *script* e determinar se esta propriedade é sempre verdadeira. A figura 20 mostra o resultado de se executar o *script* sem o comando de dar valores concretos a $a$, $b$ e $c$. O essencial da demonstração algébrica desta propriedade dos polinómios do terceiro grau é produzido por este *script*. Como anteriormente, a tangente ao polinómio do terceiro grau no ponto médio de duas raízes passa pela terceira raiz, $x = c$.

Os alunos podem descobrir e provar outras propriedades interessantes das funções polinomiais e doutras funções. Os alunos poderiam achar tais trabalhos como um desafio insuportável sem o auxílio do cálculo algébrico simbólico, mas muito mais razoável com ele.

*Axioma 5:*

*O CAS irá modificar a matemática que nós ensinamos nas escolas e o modo como o fazemos de maneira semelhante às transformações que ocorreram quando começámos a usar calculadoras gráficas e científicas.*

A popularidade das calculadoras com CAS servirá de catalisador para a mudança. E elas estão a tornar-se populares por três razões:

- São agora relativamente baratas e vendidas em muitos locais.
- Os modelos mais recentes têm um inter-face mais agradável.
- A sua utilização é permitida em alguns exames de matemática nos Estados Unidos.

Cada vez mais estudantes estão a utilizar calculadoras com CAS na sala de aula. Alguns dos meus alunos compram-nas em vez de calculadoras gráficas. Os alunos esperam que os seus professores estejam familiarizados com elas; que os conteúdos matemáticos dos seus cursos reflictam as capacidades das suas calculadoras; e que o seu uso seja permitido nos trabalhos de casa, no trabalho da aula, nos testes e nos exames.

Há trinta anos atrás, ensinava aos alunos como usar a régua de cálculo, como interpolar dados de tabelas de valores, como manipular a característica e a mantissa de logaritmos, o algoritmo da raiz quadrada, o método Horner, as regras de sinais de Descartes, e uma série de outros tópicos. As calculadoras científicas mudaram o que ensinávamos nos anos 70. As calculadoras gráficas mudaram o que ensinávamos nos anos 90. Anteriormente analisávamos as funções para as representar graficamente, mas agora frequentemente desenhamos o seu gráfico para compreender as suas propriedades. O uso do CAS em computadores e, em particular, nas calculadoras está a vulgarizar-se. Com o maior uso do CAS prevejo que menos ênfase seja dada às técnicas de resolver equações, simplificar expressões, resolver sistemas de equações, decompor em factores, calcular derivadas e integrais. Prevejo que seja dada mais ênfase à modelação e às aplicações. A questão mais importante na educação matemática tem sido sempre: Que matemática é importante ensinar? A resposta, acredito, é que iremos ensinar como modelar situações, equacionar problemas e determinar como os resolver. Com o auxílio do CAS, os alunos podem muitas vezes fazer o resto. No fim da década, as calculadoras com CAS mudarão o que nós ensinamos nas salas de aula. Eu não consigo esperar.

# Tópicos para investigação com CAS

Estas quatro investigações envolvem polinómios. Primeiro, devemos explorar as propriedades com polinómios e, em seguida, generalizar os resultados com a ajuda do CAS.

*Investigação 1*

Muitos polinómios do terceiro grau têm um máximo relativo, um mínimo relativo e um ponto de inflexão. Compare as suas cordenadas.

Resultado: O ponto de inflexão é o ponto médio do segmento que liga os pontos correspondem ao máximo e ao mínimo (figura 21).

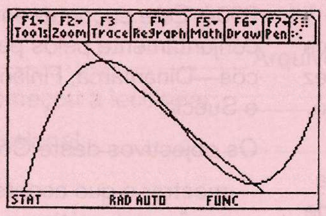


Figura 21

*Investigação 2*

A tangente ao gráfico de um polinómio do terceiro grau, num ponto $P$ qualquer, intercepta o gráfico do polinómio num segundo ponto $Q$. Considere a recta definida por $Q$ e pelo ponto de inflexão, $I$, do polinómio. Calcule a área da superfície compreendida entre a tangente e a curva, entre os pontos $P$ e $Q$. Calcule a área da superfície compreendida entre a recta $IQ$ e a curva, entre os pontos $Q$ e $I$.

Resultado: A razão entre estas duas áreas é $27/16$. Na figura 22, a primeira região está representada a tracejado vertical e a segunda a tracejado horizontal.

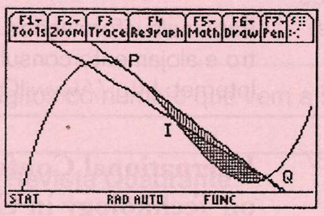


Figura 22

*Investigação 3*

A tangente ao gráfico de um polinómio do terceiro grau, num qualquer ponto $P$, intercepta a curva num segundo ponto $Q$. Considere uma segunda tangente no ponto $Q$, que intercepta o gráfico em $R$.

Resultado: A razão das áreas das regiões consideradas é sempre $16/1$. Na figura 23, a primeira região está identificada com tracejado vertical e a segunda com tracejado horizontal.

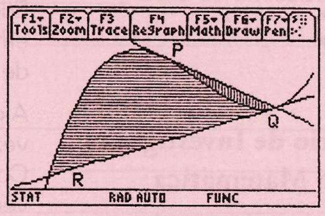


Figura 23

*Investigação 4*

Muitos polinómios do quarto grau têm três *concavidades*, por conseguinte, dois pontos de inflexão. Considere a recta que passa pelos dois pontos de inflexão, $A$ e $B$. Esta recta define com a curva três regiões. Compare as áreas.

Resultado: A região da esquerda (a tracejado horizontal) e a região da direita ( a tracejado vertical), têm a mesma área e a região do meio (a tracejado diagonal) é a soma das outras duas, como se mostra na figura 24.

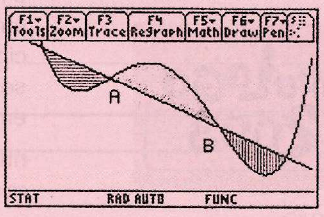


Figura 24

Traduzido por Maria José Bóia e Helena Rocha